Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 591-606

MAURA UGHI (*)

Teoremi di esistenza per problemi al contorno di quarto e quinto tipo per un'equazione parabolica lineare (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. - Introduzione

In questo articolo intendo studiare l'esistenza di particolari problemi al contorno per una equazione parabolica lineare. Per l'equazione della diffusione tali problemi sorgono quando si esamina il processo di trasmissione del calore studiando sia il mutamento di temperatura del corpo sia quello dell'ambiente, vedi [**1**], [**2**], [**5**]$_1$ [**5**]$_{1,2}$, [**8**]$_1$, [**9**], [**10**].

Nel caso unidimensionale il problema è schematizzato nel modo seguente

$$Lu(x,t) = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)\,u - \frac{\partial u}{\partial t} = g(x,t) \tag{1.1}$$

$$\text{in } D_T \equiv \{(x,t)\colon X_1(t) < x < X_2(t);\ 0 < t < T\}\,,$$

$$u(x,0) = f(x)\,, \qquad X_1(0) < x < X_2(0)\,, \tag{1.2}$$

$$u(X_2(t),t) = h(t)\,, \qquad 0 < t < T\,, \tag{1.3}$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico «U. Dini», Università, Viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 11-I-1979.

$$(1.4)\qquad -\alpha(t)u_x(X_1(t),t)+\beta(t)u(X_1(t),t)=v(t)+\varphi(t)\,,\qquad 0<t<T\,,$$

$$(1.5)\qquad \gamma_1(t)u_x(X_1(t),t)=\gamma_2(t)\dot v(t)+\gamma_3(t)v(t)+Q(t)\,,\qquad 0<t<T\,,$$

$$(1.6)\qquad v(0)=v_0\,,$$

dove L è un operatore parabolico ($a>0$), e T è una assegnata costante positiva.

Le condizioni (1.4), (1.5), (1.6) sono di quarto tipo se si ha che

$$(1.7)\qquad \alpha(t)\equiv 0\,,\quad \beta(t)\geqslant\beta_0>0\,,\quad \gamma_i(t)\geqslant\gamma_0>0\qquad (i=1,2)\,,$$

dove β_0, γ_0 sono due costanti >0.

Sono di quinto tipo se si ha che

$$(1.8)\qquad \alpha(t)\geqslant\alpha_0>0\,,\quad \beta(t)\geqslant 0\,,\quad \gamma_i(t)\geqslant\gamma_0>0\qquad (i=1,2)\,,$$

dove α_0, γ_0 sono due costanti positive.

In [**2**], [**5**]$_1$, [**5**]$_{1,2}$ sono dati teoremi di esistenza e unicità sotto ipotesi simili alle nostre, anche se più pesanti, per problemi con condizioni di quarto o quinto tipo sia su $X_1(t)$ che su $X_2(t)$.

In un precedente lavoro [**10**] ho dato teoremi di unicità e stime a priori per le soluzioni del problema (1.1)-(1.6) sia di quarto che di quinto tipo.

Diamo le seguenti definizioni.

Definizione 1. Diciamo che la coppia di funzioni reali $(u(x,t),v(t))$ è soluzione del problema (1.1)-(1.6) di quarto tipo se

(i) $u(x,t)$ è continua insieme alle sue derivate prima e seconda rispetto a x e prima rispetto a t in D_T, è continua in $\overline{D}_T$ esclusi i punti di discontinuità $\overline{P}$ di f e h, in cui $\liminf\limits_{P\to\overline{P}} u(P)$ e $\limsup\limits_{P\to\overline{P}} u(P)$ devono coincidere rispettivamente con lim inf e lim sup dei dati per $P\to\overline{P}$, ed escluso eventualmente il punto $(X_1(0),0)$ in cui deve essere

$$(1.9)\qquad \begin{aligned}&\inf\Big(\liminf_{t\to 0^+}[v_0+\varphi(t)][\beta(t)]^{-1},\ \liminf_{x\to X_1(0)^+} f(x)\Big)\\ &\leqslant \liminf_{\substack{x\to X_1(0)^+\\ t\to 0^+}} u(x,t)\leqslant \limsup_{\substack{x\to X_1(0)^+\\ t\to 0^+}} u(x,t)\\ &\leqslant \sup\Big(\limsup_{t\to 0^+}[v_0+\varphi(t)][\beta(t)]^{-1},\ \limsup_{x\to X_1(0)^+} f(x)\Big)\,,\end{aligned}$$

u soddisfa le condizioni (1.1)-(1.3).

(ii) esista continuo per $0 < t < T$, $u_x(X_1(t), t) = \lim_{x \to X_1(t)^+} u_x(x, t)$.

(iii) $v(t)$ sia derivabile con continuità per $0 < t \leqslant T$, continua per $0 \leqslant t \leqslant T$ e soddisfi la (1.6).

(iv) $u(x, t)$, $v(t)$ soddisfino le (1.4)-(1.5).

Definizione 2. Diciamo che la coppia di funzioni reali $(u(x, t), v(t))$ è soluzione del problema (1.1)-(1.6) di quinto tipo se, oltre ad essere verificate le condizioni (ii), (iii), (iv) della Definizione 1, si ha che

(v) $u(x, t)$ soddisfa la condizione (i) della Definizione 1 salvo imporre, invece della (1.9) la seguente

$$\liminf_{x \to X_1(0)^+} f(x) = \liminf_{\substack{x \to X_1(0)^+ \\ t \to 0^+}} u(x, t) \leqslant \limsup_{\substack{x \to X_1(0)^+ \\ t \to 0^+}} u(x, t) = \limsup_{x \to X_1(0)^+} f(x) . \tag{1.10}$$

Nel paragrafo **2** studierò l'esistenza per problemi di quarto tipo, nel paragrafo **3** per problemi di quinto tipo. I risultati ottenuti in entrambi i paragrafi rimangono validi anche in domini illimitati ($X_2 \to +\infty$), purchè si facciano le classiche ipotesi di crescenza su $f(x)$.

Nella appendice si danno stime sulle soluzioni di una particolare disuguaglianza integrale, stime utili nelle dimostrazioni dei Teoremi di esistenza.

2. - Teorema di esistenza per problemi di quarto tipo

Facciamo le seguenti ipotesi sui dati e i coefficienti.

(1) L è un operatore parabolico, quindi esistono due costanti positive a_0, A_0 tali che, in D_T, $0 < a_0 \leqslant a(x, t) \leqslant A_0$.

(2) a, b, c, g sono funzioni definite in $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^+$, Hölderiane di ordine α_1 rispetto a x in D_T; a è Hölderiana di ordine α_2 rispetto a t.

(3) $h(t)$, $\varphi(t)$ sono funzioni continue in $[0, T]$ e tali che

$$|\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leqslant Ct^{-\sigma}(t - \tau)^{1/2+\delta_1}, \quad |h(t) - h(\tau)| \leqslant Ct^{-\sigma}(t - \tau)^{1/2+\delta_1} \quad (0 \leqslant \sigma < \delta_1 \leqslant 1/2).$$

(4) $f(x)$ è continua e Lipschitziana per $X_1(0) \leqslant x \leqslant X_2(0)$.

(5) $X_1(t) < X_2(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, e $X_i(t)$ con $i = 1, 2$ sono continue in $[0, T]$ e tali che

$$|X_i(t) - X_i(\tau)| \leqslant C\tau^{-\gamma}(t - \tau)^{1/2+\delta} \qquad (i = 1, 2;\ 0 \leqslant \gamma < \delta \leqslant 1/2) .$$

Talvolta sarà necessario assumere la seguente ipotesi più restrittiva

($\bar{5}$) vale l'ipotesi (5) ed è inoltre $0 \leqslant \gamma < 1/4$.

(6) $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma_i(t)$ con $i = 1, 2, 3$ sono funzioni limitate e continue in $[0, T]$; β è Hölderiana in $[0, T]$ di ordine $1/2 + \sigma_1$ con $0 < \sigma_1 \leqslant 1/2$.

(7) $Q(t)$ è continua in $(0, T]$ e tale che $|Q| \leqslant Ct^{-1/2}$ per $0 < t \leqslant T$.

($\bar{7}$) $Q(t)$ è continua in $[0, T]$.

Diciamo $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ la soluzione fondamentale per l'equazione $Lu = 0$, dove L è l'operatore definito in (1.1). Come è noto, vedi [**4**], [**6**], tale soluzione è data da

$$\Gamma(x, t; \xi, \tau) = \omega(x, t; \xi, \tau) + w(x, t; \xi, \tau)\,, \tag{2.1}$$

con

$$\begin{aligned} \omega(x, t; \xi, \tau) &= (t-\tau)^{-1/2} \exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4a(\xi, \tau)(t-\tau)}\Big]\,, \\ w(x, t; \xi, \tau) &= \int_\tau^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x, t; y, \eta)\, \Phi(y, \eta; \xi, \tau)\, dy\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove Φ è soluzione di una equazione integrale di Volterra di secondo tipo, vedi [**4**], pag. 14.

Diamo ora alcuni lemmi che ci saranno utili nel seguito e le cui dimostrazioni si ottengono tramite stime su Γ e Γ_x, adattando al caso in esame le tecniche di [**4**]-[**6**] (vedi in particolare i Lemmi 3, 4 di $[\mathbf{5}]_1$, e Lemma 9 di $[\mathbf{5}]_2$).

Lemma 1. *Nell'ipotesi* (5) *su* $X_i(t)$ *con* $i = 1, 2$, *se* μ *è* $C(0, T]$ *e inoltre* $|\mu(t)| < Ct^{-1/2}$ $(0 < t \leqslant T)$, *allora è definita in* D_T *la funzione*

$$W_i(x, t) = \int_0^t \Gamma_x(x, t; X_i(\tau), \tau)\, \mu(\tau)\, d\tau \qquad (i = 1, 2)$$

ed è

$$\lim_{x \to X_i} W_i(x, t) = -\tfrac{1}{2}\, \mathrm{sign}\big(x - X_i(t)\big)\big(a(X_i(t), t)\big)^{-1} \mu(t) + W_i(X_i(t), t) \qquad (0 < t \leqslant T)\,. \tag{2.3}$$

Lemma 2. *Nelle ipotesi* (6) *e* (5) *fatte su* β *e su* X_i, *si ha, per* $0 < \tau \leqslant t \leqslant T$

$$\lim_{\tau \to t} \int_\tau^t \beta_i(z)(t-z)^{-1/2} \Gamma\big(X_i(z), z; X_j(\tau), \tau\big)\, dz = \begin{cases} \big(4a(X_i(t), t)\big)^{-1/2} \pi^{1/2} \beta_i(t) & \text{se } i = j\,, \\ 0 & \text{se } i \neq j\,, \end{cases} \tag{2.4}$$

con $i,\ j = 1, 2$ e

$$\beta_i(t) = \begin{matrix} \beta(t) & \text{se } i = 1\,, \\ 1 & \text{se } i = 2\,. \end{matrix} \tag{2.5}$$

Lemma 3. *Nelle ipotesi del Lemma 2 si ha che per* $0 < \tau \leqslant t \leqslant T$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \Big(\int_\tau^t \beta_i(z)\, \Gamma(X_i(z), z;\, X_j(\tau), \tau)(t-z)^{-1/2}\, dz \right| \leqslant C\tau^{-\bar\gamma}(t-\tau)^{-\bar\delta} \tag{2.6}$$

con $i,\ j = 1, 2$, β_i *definito in* (2.5) *e dove* $\bar\gamma$ *e* $\bar\delta$ *sono tali che* $0 \leqslant \bar\delta < 1$, $0 \leqslant \bar\gamma + \bar\delta < 1$. *Se vale l'ipotesi* $\bar 5$ *si ha inoltre che* $\bar\gamma < 1/2$.

Lemma 4. *Nelle ipotesi fatte su* X_i, (5) *si ha che per* $0 < \tau \leqslant t \leqslant T$

$$|\Gamma_x(X_i(t), t;\, X_j(\tau), \tau)| \leqslant C\tau^{-\gamma}(t-\tau)^{\delta-1} \qquad (i, j = 1, 2)\,. \tag{2.7}$$

Notiamo che, ovviamente, se X_i sono uniformemente continue secondo Hölder la (2.6) va scritta con $\bar\gamma = 0$.

Osservazione 1. *Consideriamo il seguente problema*

$$\begin{aligned} &L\bar u = g(x, t)\,, && \textit{in } D_T\,, \\ &\bar u(x, 0) = f(x)\,, && X_1(0) < x < X_2(0)\,, \\ &\bar u(X_2(t), t) = h(t)\,, && 0 < t < T\,, \\ &\beta(t)\bar u(X_1(t), t) = \varphi(t) + v_0\,, && 0 < t < T\,, \end{aligned} \tag{2.8}$$

dove L *e* D_T *sono definiti in* (1.1).

Nelle ipotesi fatte esiste unica la soluzione, in senso classico, del problema (2.8), vedi [**4**], [**6**], [**7**]. Con metodi classici, vedi [**5**], [**7**], e dal risultato 4 dell'appendice si ha inoltre che $\bar u_x(X_1(t), t)$ esiste continua per $0 < t \leqslant T$ e che

(A) $\bar u_x(X_1(t), t)$ è limitata in $[0, T]$ se valgono le ipotesi (5) su X_i, e (3) su φ e h e se vale l'ipotesi di raccordo seguente

$$\beta(0) f(X_1(0)) = \varphi(0) + v_0\,. \tag{2.9}$$

(B) Se valgono le ipotesi ($\bar 5$) su X_i e (3) su φ e h, e non è verificata la (2.9), allora si ha che

$$|\bar u_x(X_1(t), t)| \leqslant Ct^{-1/2} \qquad (0 < t \leqslant T)\,.$$

Se poi f è derivabile in $X_1(0)$ e siamo nelle ipotesi di cui al punto (A), $\bar{u}_x(X_1(t), t)$ è continua in $[0, T]$.

Tornando alla dimostrazione del teorema di esistenza consideriamo la coppia (U, V), definita come $U = u - \bar{u}$, $V = v - v_0$; essa è soluzione di un problema (1.1)-(1.6) con g, f, h, φ, v_0 uguali a 0 e

$$\tilde{Q} = Q - \gamma_1 \bar{u}_x(X_1(t), t) + \gamma_3 v_0 \tag{2.10}$$

al posto di Q. È evidente che basta studiare l'esistenza per questo ultimo problema.

Cerchiamo la soluzione (U, V) nella forma

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \sum_{i=1}^{2} \int_0^t \Gamma(x, t; X_i(\tau), \tau)\mu_{i+1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad (i = 1, 2)\,, \\ V(t) &= \int_0^t \mu_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \end{aligned} \tag{2.11}$$

con $\mu_i(t)$ $i = 1, 2, 3$ funzioni incognite.

Sostituendo in (1.3), (1.4), (1.5) e tenendo conto del Lemma 1 si ha, rispettivamente

$$\sum_{i=1}^{2} \int_0^t \Gamma(X_2(t), t; X_i(\tau), \tau)\mu_{i+1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0\,, \tag{2.12}$$

$$\beta(t) \sum_{i=1}^{2} \int_0^t \Gamma(X_1(t), t; \quad X_i(\tau), \tau)\mu_{i+1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t \mu_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0\,, \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma_1}{2}\big(a(X_1(t), t)\big)^{-1}\mu_2(t) + \gamma_1(t) \sum_{i=1}^{2} \int_0^t \Gamma_x(X_1(t), t; X_i(\tau), \tau)\mu_{i+1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ - \gamma_3(t) \int_0^t \mu_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \gamma_2(t)\mu_1(t) = \tilde{Q}(t)\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Le (1.1), (1.2), (1.6) sono identicamente soddisfatte.

Le equazioni scritte sopra sono equazioni integrali di Volterra e precisamente le (2.12), (2.13) di primo tipo, la (2.14) di secondo tipo. Come è usuale, ridurremo le prime due equazioni a equazioni di secondo tipo nel modo seguente: scritte le (2.12), (2.13) per $t = z$, moltiplichiamo entrambi i membri per $(t - z)^{-1/2}$, integriamo tra 0 e t e poi deriviamo rispetto a t; i Lemmi 2 e 3 assicurano la liceità di tali operazioni. Si ottiene dalla (2.12) e dalla (2.13) rispettivamente

$$(2.15)\qquad \pi^{1/2}\big(4a(X_2(t),t)\big)^{-1/2}\mu_3(t)$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^t \mu_{i+1}(\tau)\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_\tau^t (t-z)^{-1/2}\Gamma(X_2(z),z;\;X_i(\tau),\tau)\,dz\Big)\,d\tau = 0\,,$$

$$(2.16)\qquad \pi^{1/2}\beta(t)\big(4a(X_1(t),t)\big)^{-1/2}\mu_2(t)-\int_0^t \mu_1(\tau)(t-\tau)^{-1/2}\,d\tau$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^t \mu_{i+1}(\tau)\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_\tau^t \beta(z)(t-z)^{-1/2}\Gamma(X_1(z),z;\;X_i(\tau),\tau)\,dz\Big)\,d\tau = 0\,.$$

Il sistema (2.14), (2.15), (2.16) è ora un sistema di equazioni integrali di Volterra di secondo tipo, che si può riscrivere nel modo seguente

$$(2.17)\qquad \mu_i(t)=\psi_i(t)+\sum_{j=1}^{3}\int_0^t K_{ij}(t,\tau)\mu_j(\tau)\,d\tau\qquad (i=1,2,3)\,,$$

dove

$$\psi_1=\frac{\tilde{Q}(t)}{\gamma_2(t)},\qquad \psi_2=\psi_3=0\,,$$

$$K_{11}=-\frac{\gamma_1(t)}{\beta(t)\gamma_2(t)}\big(\pi a(X_1(t),t)\big)^{-1/2}(t-\tau)^{-1/2}-\frac{\gamma_3(t)}{\gamma_2(t)}\,,$$

$$K_{1j}=\frac{\gamma_1(t)}{\gamma_2(t)}\Gamma_x(X_1(t),t;\;X_{j-1}(\tau),\tau)+\frac{\gamma_1(t)}{\beta(t)\gamma_2(t)}\big(\pi a(X_1(t),t)\big)^{-1/2}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_\tau^t \beta(z)(t-z)^{-1/2}\Gamma(X_1(z),z;\;X_{j-1}(\tau),\tau)\,dz\Big)\qquad (j=2,3)\,,$$

$$(2.18)\qquad K_{21}=\Big(\frac{4}{\pi}a(X_1(t),t)\Big)^{1/2}\frac{1}{\beta(t)}(t-\tau)^{-1/2},$$

$$K_{2j}=-\frac{1}{\beta(t)}\Big(\frac{4}{\pi}a(X_1(t),\;t)\Big)^{1/2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_\tau^t \beta(z)(t-z)^{-1/2}$$
$$\Gamma(X_1(z),z;\;X_{j-1}(\tau),\tau)\,dz\Big)\,,\qquad (j=2,3)\,,$$

$$K_{31}=0\,,$$

$$K_{3j}=-\Big(\frac{4}{\pi}a(X_2(t),\;t)\Big)^{1/2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_\tau^t (t-z)^{-1/2}\Gamma(X_2(z),z;\;X_{j-1}(\tau),\tau)\,dz\Big)\qquad (j=2,3)\,\cdot$$

Dalla Osservazione 1 si ha che se valgono le ipotesi (3), (5), $(\bar{7})$ su φ, h, X_i, Q e la (2.9), le $\psi_i(t)$ sono funzioni continue in $(0, T]$ e limitate in $[0, T]$; se invece valgono le ipotesi (3), $(\bar{5})$ su φ, h, X_i e non vale la (2.9) allora, nella ipotesi (7) su Q, si ha che le $\psi_i(t)$ sono funzioni continue in $(0, T]$ e tali che $|\psi_i(t)| \leqslant Ct^{-1/2}$ per $0 < t \leqslant T$.

Dai Lemmi 3 e 4 e da quanto scritto sopra segue che vale il risultato 4 dell'appendice e quindi che esistono uniche le $\mu_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, soluzioni del sistema (2.17), sono continue in $(0, T]$ ed hanno lo stesso andamento delle ψ_i vicino all'origine.

Resta da verificare che $u(x, t)$ così ottenuta verifica la (1.9) e che, ove non sia $f(X_2(0)) = h(0)$, si abbia che $\liminf_{P \to (X_2(0),0)} u(P)$ e $\limsup_{P \to (X_2(0),0)} u(P)$ coincidano rispettivamente con lim inf e lim sup dei dati per $P \to (X_2(0), 0)$. Questo segue immediatamente dal fatto che $U(x, t)$ è continua in $(X_1(0), 0)$ e $(X_2(0), 0)$ ed è ivi uguale a zero, e $\bar{u}(x, t)$ è soluzione del problema (2.8), e quindi per definizione di soluzione verifica quanto scritto sopra.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema.

Teorema 1. (i) *Nelle ipotesi fatte, in particolare* $(\bar{5})$ *su* X_i *e* (7) *su* Q, *esiste almeno una soluzione del problema* (1.1)-(1.6) *nel senso della Definizione* 1 *e si ha che* $|\dot{v}(t)| \leqslant Ct^{-1/2}$ *per* $0 < t \leqslant T$.

(ii) *Se poi vale l'ipotesi* $(\bar{7})$ *su* Q *ed è verificata la condizione di raccordo* (2.9) *si ha anche che* $v(t)$ *è* $C^1[0, T]$ *e* $u(x, t)$ *è continua in* $\bar{D}_T \setminus (X_2(0), 0)$; *in questo caso è sufficiente l'ipotesi* (5) *su* X_i. *Se si ha anche che* $f(X_2(0)) = h(0)$, *allora* u *è continua in* $\bar{D}_T$.

(iii) *Se inoltre* $f(x)$ *è derivabile in* $X_1(0)$ *e* $X_2(0)$, *allora* $u_x(x, t)$ *è continua fin sul contorno per* $0 \leqslant t \leqslant T$.

Osservazione 2. *Stime di* $u_x(X_i(t), t)$.

Dalla (2.11) e dal Lemma 1 segue che

$$(2.19)\qquad u_x(X_i(t), t) = \mp (1/2)\big(a(X_i(t), t)\big)^{-1}\mu_{i+1}(t) + \sum_{j=1}^{2} \int_0^t \Gamma_x(X_i(t), t; X_j(\tau), \tau)\mu_{j+1}(\tau)\,d\tau + \bar{u}_x(X_i(t), t),$$

con $i = 1, 2$ e dove il segno $-$ vale se $i = 1$, il segno $+$ se $i = 2$.

Avendosi che le μ_i hanno lo stesso andamento della $\tilde{Q}$, e quindi di $\bar{u}_x(X_i(t), t)$, vicino all'origine si ha, per l'Osservazione 1 e il Lemma 4, che nelle ipotesi del Teorema 1 (i), $|u_x(X_i(t), t)| \leqslant Ct^{-1/2}$ e, nelle ipotesi del Teorema 1 (ii), si ha che $u_x(X_i(t), t)$ è limitata in $[0, T]$.

È ovvio che se f è derivabile, dal Teorema 1 (iii) segue che u_x essendo continua in $\overline{D}_T$ è ivi limitata.

3. - Teorema di esistenza per problemi di quinto tipo

Assumiamo come ipotesi le stesse del paragrafo **2** salvo per quanto riguarda $\varphi(t)$ su cui facciamo le seguenti:

(8) $\varphi(t)$ è continua in $(0, T]$ e tale che $|\varphi| \leqslant Ct^{-1/2}$ per $0 < t \leqslant T$.

($\overline{8}$) $\varphi(t)$ è continua in $(0, T]$ e limitata in $[0, T]$.

Premettiamo la seguente osservazione.

Osservazione 3. Consideriamo il seguente problema

$$
(3.1)\qquad
\begin{cases}
L\overline{u} = g(x, t)\,, & \text{in } D_T\,,\\
\overline{u}(x, 0) = f(x)\,, & X_1(0) < x < X_2(0)\,,\\
\overline{u}(X_2(t), t) = h(t)\,, & 0 < t < T\,,\\
-\alpha\overline{u}_x(X_1(t), t) + \beta\overline{u}(X_1(t), t) = \varphi(t) + v_0\,, & 0 < t < T\,.
\end{cases}
$$

Nelle ipotesi fatte esiste unica la soluzione in senso classico del problema (3.1), vedi [**4**], [**6**], [**7**]. Con metodi classici, vedi [**5**]$_2$, [**7**], e dal risultato 4 dell'appendice si ha inoltre che $\overline{u}_x(X_1(t), t)$ esiste continua per $0 < t \leqslant T$ e che

(A)$'$ $\overline{u}_x(X_1(t), t)$ è limitata in $[0, T]$ se valgono le ipotesi (5), (3), ($\overline{8}$).

(B)$'$ Se valgono le ipotesi ($\overline{5}$), (3) e (8) allora è $|\overline{u}_x(X_1(t), t)| \leqslant Ct^{-1/2}$ per $0 < t \leqslant T$.

Se poi, nelle ipotesi di cui al punto (A)$'$, f è derivabile in $X_1(0)$ e vale la seguente condizione di raccordo

$$
(3.2)\qquad \alpha(0)f'(X_1(0)) + \beta(0)f(X_1(0)) = \varphi(0) + v_0\,,
$$

allora $\overline{u}_x(X_1(t), t)$ è continua in $[0, T]$.

Definita ora la coppia (U, V) come nel paragrafo **2**, si ha che (U, V) è soluzione di un problema di quinto tipo con g, f, h, φ, v_0 uguali a 0 e $\tilde{Q}$, data dalla (2.10), al posto di Q. Al solito basta studiare l'esistenza per quest'ultimo problema.

Dalle (1.4), (1.5), (1.6) si può dedurre la dipendenza funzionale di $V(t)$ da $U(x, t)$; infatti ricavando $U_x(X_1(t), t)$ dalla (1.4) e sostituendo nella (1.5) si ottiene la seguente equazione differenziale del primo ordine lineare in $V(t)$

$$\dot{V}(t) + p(t)V(t) = q_1(t) + q_2(t)\,U(X_1(t), t)\,, \tag{3.3}$$

dove

$$p(t) = (\gamma_3 + \gamma_1\alpha^{-1})\gamma_2^{-1}\,, \qquad q_1(t) = -\tilde{Q}\gamma_2^{-1}\,, \qquad q_2(t) = \beta\gamma_1\alpha^{-1}\gamma_2^{-1}\,. \tag{3.4}$$

Dalla (3.3) e dalla (1.6) si ha che

$$V(t) = W(t) + \exp\big(-P(t)\big)\int_0^t q_2(\tau)\,U(X_1(\tau), \tau)\exp P(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{3.5}$$

dove

$$W(t) = \exp\big(-P(t)\big)\int_0^t q_1(\tau)\exp P(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad P(t) = \int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{3.6}$$

Sostituendo la (3.5) in (1.4) si ottiene una nuova condizione al contorno che equivale alle (1.4), (1.5), (1.6).

Procedendo ora come al paragrafo **2** cerchiamo $U(x, t)$ nella forma

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^{2}\int_0^t \Gamma(x, t; X_i(\tau), \tau)\,\mu_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad (i = 1, 2)\,. \tag{3.7}$$

Sostituendo in (1.3) e (1.4), tenendo conto della (3.5) e del Lemma 1, si ha rispettivamente

$$\sum_{i=1}^{2}\int_0^t \Gamma(X_2(t), t; X_i(\tau), \tau)\,\mu_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0\,, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}(1/2)\alpha\big(a(X_1(t), t)\big)^{-1}\mu_1(t) - \alpha\sum_{i=1}^{2}\int_0^t \Gamma_x(X_1(t), t; X_i(\tau), \tau)\,\mu_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ + \beta\sum_{i=1}^{2}\int_0^t \Gamma(X_1(t), t; X_i(\tau), \tau)\,\mu_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ - \exp\big(-P(t)\big)\sum_{i=1}^{2}\int_0^t \mu_i(\tau)\int_\tau^t q_2(s)\,\Gamma(X_1(s), s; X_i(\tau), \tau)\exp P(s)\,\mathrm{d}s = W(t)\,.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Le condizioni (1.1), (1.2) sono identicamente soddisfatte.

La (3.9) è una equazione integrale di Volterra di secondo tipo, mentre la (3.8) è del primo tipo. Procedendo come in **2** si arriva ad un sistema di equazioni integrali di Volterra di secondo tipo, costituito dalla (3.9) e da una equazione identica alla (2.15) salvo porre μ_i al posto di μ_{i+1} e μ_2 al posto di μ_3, che si può scrivere in forma più compatta come

$$\mu_i(t) = \psi_i(t) + \sum_{j=1}^{2} \int_0^t K_{ij}(t, \tau)\mu_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad (i = 1, 2), \tag{3.10}$$

dove

$$\psi_1(t) = \frac{2}{\alpha(t)}\, a\big(X_1(t), t\big)\, W(t) \qquad \psi_2(t) = 0\,,$$

$$K_{1j}(t, \tau) = 2a\big(X_1(t), t\big)\Big(\Gamma_x\big(X_1(t), t;\, X_j(\tau), \tau\big) + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\,\Gamma\big(X_1(t), t);\, X_j(\tau), \tau\big) \tag{3.11}$$

$$-\frac{1}{\alpha(t)}\exp\big(-P(t)\big)\int_\tau^t q_2(s)\,\Gamma\big(X_1(s), s;\, X_j(\tau), \tau\big)\exp\big(P(s)\,\mathrm{d}s\big)\,,$$

$$K_{2j}(t, \tau) = \pi^{-1/2}\big(4a\big(X_2(t), t\big)\big)^{1/2}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau^t (t - z)^{-1/2}\,\Gamma\big(X_2(z), z;\, X_j(\tau), \tau\big)\,\mathrm{d}z\Big)\,,$$

con $j = 1, 2$, W, P e q_2 definiti in (3.4), (3.6).

Tenendo conto dell'Osservazione 3, dei Lemmi 3, 4 e del risultato 4 dell'Appendice si ha che esiste unica la soluzione del sistema (3.10) e le $\mu_i(t)$ $(i = 1, 2)$ sono funzioni continue in $(0, T]$ e limitate in $[0, T]$.

Considerando le (3.5), (3.3) e l'Osservazione 3 si giunge a costruire la coppia (u, v).

Resta da verificare che la $u(x, t)$ così ottenuta verifica la (1.10) e che, ove non sia $f\big(X_2(0)\big) = h(0)$, si abbia che $\liminf\limits_{P\to(X_2(0),0)} u(P)$ e $\limsup\limits_{P\to(X_2(0),0)} u(P)$ coincidano rispettivamente con lim inf e lim sup dei dati per $P \to \big(X_2(0), 0\big)$.

Questo segue immediatamente dal fatto che $U(x, t)$ è continua in $\big(X_1(0), 0\big)$ e $\big(X_2(0), 0\big)$ ed è ivi uguale a zero, e $\overline{u}(x, t)$ è soluzione del problema (3.1).

Per la precisione, avendo fatto l'ipotesi che $f(x)$ sia continua anche in $\big(X_1(0), 0\big)$, ipotesi (4), si ha che u è anch'essa continua in quel punto.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema.

Teorema 2. (i) *Nelle ipotesi fatte, in particolare* $(\overline{5})$, (8) *e* (7) *esiste almeno una soluzione del problema* (1.1)-(1.6) *di quinto tipo nel senso della Definizione* 2 *e si ha che* $|\dot{v}(t)| \leqslant Ct^{-1/2}$ *per* $0 < t \leqslant T$ *e* u *è continua in* $\overline{D}_T \setminus \big(X_2(0), 0\big)$.

(ii) *Se valgono le ipotesi più restrittive* $(\overline{8})$ *e* $(\overline{7})$ *si ha in più che* $v(t)$ *è* $C^1[0, T]$; *in questo caso è sufficiente l'ipotesi* (5).

(iii) *Se si ha anche che* $f(X_2(0)) = h(0)$, *allora* u *è continua in* $\bar{D}_T$. *Se inoltre* $f(x)$ *è derivabile in* $X_1(0)$ *e* $X_2(0)$ *e vale la condizione di raccordo* (3.2) $u_x(x,t)$ *è continua fin sul contorno per* $0 \leqslant t \leqslant T$.

Osservazione 4. *Stime su* $u_x(X_i(t), t)$ $(i = 1, 2)$.

Dalla (3.7), dal Lemma 4, dal Teorema 2 si ha che

$$|u_x(X_i(t), t)| \leqslant C + \bar{u}_x(X_i(t), t) \qquad (i = 1, 2)\,, \tag{3.12}$$

dove $\bar{u}$ è definita in (3.1).

Vale quindi per $u_x(X_i(t), t)$ quanto scritto per $\bar{u}_x$.

È ovvio che se f è derivabile in $[X_1(0), X_2(0)]$, dal Teorema 2 (iii), viene che u_x essendo continua in $\bar{D}_T$ è ivi limitata.

Appendice

Consideriamo la disuguaglianza integrale seguente

$$0 \leqslant y(t) \leqslant p(t) + c\int_0^t \tau^{-\gamma}(t-\tau)^{-\delta} y(\tau)\,d\tau \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)\,, \tag{A.1}$$

dove c è una costante positiva, γ e δ sono costanti $\geqslant 0$, tali che $0 \leqslant \gamma + \delta < 1$.

Studiamo il seguente integrale

$$I(t,s) = \int_s^t \tau^{-\gamma}(t-\tau)^{-\delta}(\tau - s)^{-\delta}\,d\tau\,. \tag{A.2}$$

Si ha che

Risultato 1. Se $2\delta \leqslant 1$, e $0 \leqslant \gamma + \delta < 1$, allora

$$I(t,s) \leqslant B(-\gamma - \delta + 1, -\delta + 1)\,t^{-\gamma-2\delta+1}\,, \tag{A.3}$$

dove B é la funzione Beta Euleriana.

Dimostrazione. Facciamo vedere che se $2\delta \leqslant 1$, $I(t,s)$ é una funzione monotona non crescente di s.

Consideriamo ε costante tale che $0 < \varepsilon < s$.

$$I(t, s-\varepsilon) - I(t,s) = \int_{s-\varepsilon}^{s} \tau^{-\gamma}(t-\tau)^{-\delta}(\tau - s + \varepsilon)^{-\delta}\,d\tau + \int_s^t \tau^{-\gamma}(t-\tau)^{-\delta}\big((\tau - s + \varepsilon)^{-\delta} - (\tau - s)^{-\delta}\big)\,d\tau.$$

Se $\bar{\tau}$ e $\hat{\tau}$ sono scelti in modo opportuno in $(s-\varepsilon, s)$ e (s,t) rispettivamente, si ha

$$I(t, s-\varepsilon) - I(t,s) = \bar{\tau}^{-\gamma}\int_{s-\varepsilon}^{s} (t-\tau)^{-\delta}(\tau - s + \varepsilon)^{-\delta}\,d\tau + \hat{\tau}^{-\gamma}\int_s^t (t-\tau)^{-\delta}\big((\tau - s+\varepsilon)^{-\delta} - (\tau - s)^{-\delta}\big)\,d\tau \geqslant \bar{\tau}^{-\gamma} J(t, s-\varepsilon) - \hat{\tau}^{-\gamma} J(t,s)\,,$$

dove

$$J(t, s) = \int_s^t (t-\tau)^{-\delta}(\tau-s)^{-\delta}\mathrm{d}\tau = B(-\delta+1, -\delta+1)(t-s)^{-2\delta+1}.$$

Essendo $J(t, s)$ una funzione monotona non crescente di s, si ha che $J(t, s-\varepsilon) \geqslant J(t, s)$, da cui segue subito l'asserto.

In particolare allora si ha che $I(t, s) \leqslant I(t, 0)$ e cioè la (A.3).

Tornando alla disuguaglianza (A.1), consideriamo per primo il caso in cui $p(t)$ è limitata e studiamo la (A.1) con $y(t)$ nella classe delle funzioni limitate in $[0, T]$.

Moltiplicando entrambi i membri della (A.1) per $\tau^{-\gamma}(t-\tau)^{-\delta}$ e integrando, si ottiene facilmente

$$(\text{A.4}) \qquad 0 \leqslant \int_0^t \tau^{-\gamma}(t-\tau)^{-\delta}y(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \|p\|_t B(-\gamma+1, -\delta+1)t^{-\gamma-\delta+1} + c\int_0^t s^{-\gamma}y(s)I(t, s)\mathrm{d}s,$$

dove $I(t, s)$ é definito in (A.2) e, per ogni funzione $f(t)$, definiamo $\|f\|_t = \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} |f(\tau)|$.

A questo punto distinguiamo due casi

$$(\text{a}) \qquad 2\delta \leqslant 1, \qquad\qquad (\text{b}) \qquad 2\delta > 1.$$

Caso (a): vale il Risultato 1; dalla (A.3), sostituendo (A.4) in (A.1) e ricordando che p é limitata si ottiene

$$(\text{A.5}) \qquad 0 \leqslant y(t) \leqslant \|p\|_t(1 + cB(-\gamma+1, -\delta+1)t^{-\gamma-\delta+1})$$
$$+ c^2B(-\gamma-\delta+1, -\delta+1)t^{-\gamma-2\delta+1}\int_0^t s^{-\gamma}y(s)\,\mathrm{d}s = \|p\|_t I_1 + I_2.$$

Se $\gamma + 2\delta \leqslant 1$ si può usare il Lemma di Gronwall generalizzato e, tenendo conto che la stima che si ottiene vale per ogni T e T é arbitrario, si ha

$$(\text{A.6}) \qquad 0 \leqslant y(t) \leqslant \|p\|_t I_1 \exp\left(c^2B(-\gamma-\delta+1, -\delta+1)t^{-2\gamma-2\delta+2}(1-\gamma)^{-1}\right) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

dove I_1 é definito in (A.5).

Se $\gamma + 2\delta > 1$, avendosi $s^{-\gamma-2\delta+1} > t^{-\gamma-2\delta+1}$, dalla (A.5) si ha

$$(\text{A.7}) \qquad 0 \leqslant y(t) \leqslant \|p\|_t I_1 + c^2B(-\gamma-\delta+1, -\delta+1)\int_0^t s^{-2\gamma-2\delta+1}y(s)\mathrm{d}s.$$

Essendo per le ipotesi su γ e δ $0 < 2\gamma + 2\delta - 1 < 1$, si può applicare il Lemma di Gronwall generalizzato e procedendo come per la stima precedente si ha

$$(\text{A.8}) \qquad 0 \leqslant y \leqslant \|p\|_t I_1 \exp\left(c^2B(-\gamma-\delta+1, -\delta+1)t^{-2\gamma-2\delta+2}(2-2\gamma-2\delta)^{-1}\right. \qquad (0 \leqslant t \leqslant T).$$

Caso (b): poiché si ha

$$(\text{A.9}) \qquad I(t, s) \leqslant s^{-\gamma}(t-s)^{-2\delta+1}B(-\delta+1, -\delta+1),$$

dalle (A.4), (A.1) si ha

$$(\text{A.10}) \qquad 0 \leqslant y(t) \leqslant \|p\|_t I_1 + c^2B(-\delta+1, -\delta+1)\int_0^t s^{-2\gamma}(t-s)^{-2\delta+1}y(s)\mathrm{d}s.$$

La precedente diseguaglianza é dello stesso tipo della (A.1) perché $\|p\|_t I_1$ é una funzione limitata di t, e, viste le ipotesi su γ e δ,

$$0 < (2\gamma) + (2\delta - 1) = \gamma_1 + \delta_1 < 1\,, \qquad 0 < \delta_1 = (2\delta - 1) < 1\,, \qquad 0 < 2\gamma = \gamma_1 < 1\,.$$

Si può quindi ripetere il procedimento seguito per passare da (A.1) ad (A.4), poi se $2\delta_1 < 1$ siamo nel caso (a) e si hanno quindi stime del tipo (A.6) o (A.8), altrimenti si usa la (A.9) e si procede come per (A.10), con γ_1, δ_1 al posto di γ, δ.

Definiamo

$$\begin{aligned} &\delta_n = 2\delta_{n-1} - 1\,, \qquad \delta_0 = \delta\,, \qquad \gamma_n = 2\gamma_{n-1}\,, \qquad \gamma_0 = \gamma\,,\\ \text{(A.11)}\qquad &p_n = \|p_{n-1}\|_t\big(1 + c_{n-1}B(-\gamma_{n-1} + 1, -\delta_{n-1} + 1)\,t^{-\gamma_n - \delta_n + 1}\big)\,,\\ &c_n = c_{n-1}^2 B(-\delta_{n-1} + 1, -\delta_{n-1} + 1)\,. \end{aligned}$$

Supponendo che $2\delta_{n-1} > 1$ e $0 < \gamma_{n-1} + \delta_{n-1} < 1$ si ha che

$$\text{(A.12)}\qquad 0 < \gamma_n + \delta_n < 1\,, \qquad 0 < \delta_n < 1\,, \qquad 0 \leqslant \gamma_n < 1\,.$$

Procedendo come prima si arriva alla diseguaglianza

$$\text{(A.13)}\qquad 0 \leqslant y \leqslant p_n + c_n \int_0^t s^{-\gamma_n}(t - s)^{-\delta_n}\, y(s)\, ds\,,$$

che per le (A.12) é dello stesso tipo della (A.1).

D'altra parte si ha che $2\delta_n \leqslant 1$ se $\delta \leqslant (1 + 2 + \ldots + 2^n)/2^{n+1} = (2^{n+1} - 1)/2^{n+1} < 1$.

Poiché la successione $(2^n - 1)/2^n \to 1$ per $n \to \infty$, fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario esiste $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$ tale che per $n \geqslant \bar{n}$ $1 > (2^{n+1} - 1)/2^{n+1} \geqslant 1 - \varepsilon$.

Quindi, se $\delta \leqslant 1 - \varepsilon < 1$ con $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste un $\bar{n}(\varepsilon)$ tale che $2\delta_{\bar{n}} \leqslant 1$. Cioé per $n = \bar{n}$ siamo nel caso (a) e si hanno quindi per $y(t)$ stime del tipo (A.6), (A.8) con le, ovvie, sostituzioni: $\gamma_{\bar{n}}$, $\delta_{\bar{n}}$, $p_{\bar{n}}$, $c_{\bar{n}}$ al posto di γ, δ, p, c.

Riassumendo si ha quindi il seguente risultato.

Risultato 2. Se $p(t)$ é limitato e $0 \leqslant \gamma + \delta < 1$, (A.1) implica che

$$\text{(A.14)}\qquad 0 \leqslant y(t) \leqslant \|p\|_t C(c, \gamma, \delta; T) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)\,,$$

dove C si determina in base alla (A.6) o (A.8).

Useremo ora i due risultati precedenti per dedurre una stima su $y(t)$ nel caso in cui

$$\text{(A.15)}\qquad |p| \leqslant k_1 + k_2 t^{-\alpha} \quad (0 < t \leqslant T)\,; \quad 0 \leqslant \alpha < 1\,; \quad 0 < \gamma + \alpha < 1\,; \quad k_1, k_2 > 0\,.$$

Ora si suppone che $y(t)$ sia tale che $\int_0^T \tau^{-\gamma} y(\tau)\, d\tau < \infty$. Poniamo

$$\text{(A.16)}\qquad z(t) = y(t)\, t^{\alpha}\,,$$

moltiplichiamo (A.1) per t^{α}, usando le (A.15) e (A.16) si ha

$$\text{(A.17)}\qquad 0 \leqslant z(t) \leqslant (k_1 t^{\alpha} + k_2) + c t^{\alpha} \int_0^t \tau^{-\gamma-\alpha}(t - \tau)^{-\delta} z(\tau)\, d\tau\,.$$

Osservazione. Se $\gamma + \alpha + \delta < 1$ vale per $z(t)$ il Risultato 2 e si ha quindi $0 \leqslant y(t) \leqslant C_1\,(c, \alpha, \gamma, \delta; T, k_1, k_2)\, t^{-\alpha}$.

Con lo stesso metodo che ci ha portato alla (A.4), salvo moltiplicare la (A.17) per $\tau^{-\gamma-\alpha}(t-\tau)^{-\delta}$ si ottiene, con semplici conti

$$0 \leqslant z(t) \leqslant \bar{k}_1 t^\alpha + \bar{k}_2 + c^2 t^\alpha \int_0^t s^{-\gamma-\alpha} z(s) I(t,s)\,ds\,, \tag{A.18}$$

dove $I(t, s)$ é definito in (A.2) e

$$\begin{aligned} \bar{k}_1(t) &= k_1(1 + cB(-\gamma+1, -\delta+1)t^{-\gamma-\delta+1}) \leqslant \bar{k}_1(T)\,, \\ \bar{k}_2(t) &= k_2(1 + cB(-\gamma-\alpha+1, -\delta+1)t^{-\gamma-\delta+1})\bar{k}_2(T)\,. \end{aligned} \tag{A.19}$$

Distinguiamo ora nei due casi (a) e (b), (a) $2\delta \leqslant 1$, (b) $2\delta > 1$.

Caso (a): vale il Risultato 1, dalla (A.18) si ha allora che

$$0 \leqslant z(t) \leqslant \bar{k}_1 t^\alpha + \bar{k}_2 + c^2 B(-\gamma-\delta+1, -\delta+1) t^{\alpha-\gamma-2\delta+1} \int_0^t s^{-\gamma-\alpha} z(s)\,ds\,. \tag{A.20}$$

Se $\alpha-\gamma-2\delta+1 \geqslant 0$ si può applicare il Lemma di Gronwall generalizzato; procedendo come per (A.6) e tenendo conto della definizione (A.16) si ha

$$0 \leqslant y(t) \leqslant (\bar{k}_1 + \bar{k}_2 t^{-\alpha}) \exp\left(c^2 B(-\gamma-\delta+1, -\delta+1) t^{2-2\gamma-2\delta}(1-\gamma-\alpha)^{-1}\right). \tag{A.21}$$

Se invece $\alpha-\gamma-2\delta+1 < 0$, procedendo come per (A.8) si ha

$$0 \leqslant y(t) \leqslant (\bar{k}_1 + \bar{k}_2 t^{-\alpha}) \exp\left(c^2 B(-\gamma-\delta+1, -\delta+1) t^{2-2\gamma-2\delta}(2-2\gamma-2\delta)\right). \tag{A.22}$$

Caso (b): si procede come nel caso analogo della dimostrazione del Risultato 2. Si definiscono c_n, γ_n e δ_n come in (A.11) e

$$\begin{aligned} k_1^{(n)} &= k_1^{(n-1)}(1 + c_{n-1}B(-\gamma_{n-1}+1, -\delta_{n-1}+1)\,T^{-\gamma_{n-1}-\delta_{n-1}+1})\,, & k_1^{(0)} &= k_1\,, \\ k_2^{(n)} &= k_2^{(n-1)}(1 + c_{n-1}B(-\gamma_{n-1}-\alpha+1, -\delta_{n-1}+1)\,T^{-\gamma_{n-1}-\delta_{n-1}+1})\,, & k_2^{(0)} &= k_2\,. \end{aligned} \tag{A.23}$$

Si ottengono facilmente stime del tipo (A.21), (A.22) con ovviamente $\gamma_{\bar{n}}$, $\delta_{\bar{n}}$, $c_{\bar{n}}$, $k_1^{(\bar{n})}$, $k_2^{(\bar{n})}$ al posto di γ, δ, c, k_1, k_2 rispettivamente.

Riassumendo si ha il seguente

Risultato 3. Nelle ipotesi (A.15) e se $\int_0^T y(\tau)\tau^{-\gamma}d\tau < \infty$, la (A.1) implica che

$$0 \leqslant y(t) \leqslant C_2(\gamma, \delta, c; T, k_1, k_2) + C_3(\gamma, \delta, \alpha, c; T, k_1, k_2)t^{-\alpha} \qquad (0 < t \leqslant T)\,, \tag{A.24}$$

dove C_2 e C_3 sono costanti note in base alle (A.21) e (A.22).

Con metodi ben noti, applicando ad esempio il Teorema della contrazione si ha che

Risultato 4. Nelle ipotesi (A.15) esiste unica la soluzione di una equazione integrale di Volterra di secondo tipo con funzione nota $p(t)$ e nucleo del tipo della (A.1); per la soluzione vale la stima (A.24).

Bibliografia

[1] G. Adler, *Un type nouveau des problémes aux limites de la conduction de la chaleur*, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. (2) **4** (1969), 109-127.

[2] E. A. Baderko, *The solution by the method of parabolic potential of a certain heat conduction problem with concentrated thermal capacities*, Differencial'nye Uravnenija (Russian) **8** (1972), 1225-1234.

[3] H. S. Carslow, J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford 1959.

[4] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice Hall Inc. 1964.

[5] L. I. Kamynin: $[\cdot]_1$ *Solution of the fourth and fifth boundary value problem for a one-dimensional second order parabolic equation in a curvilinear region*, Z. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. **9** (1969), 558-572. Traslated in U.S.S.R. Computational Math. and Phys. **9** (1969); $[\cdot]_2$ *A boundary value problem in the theory of heat conduction with non classical boundary conditions*, Z. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. **4** (1964). Traslated in U.S.S.R. Computational Math. and Math. Phys. **4** (1964), 33-59.

[6] A. M. Il'in, A. S. Kalashnikov and O. A. Oleinik, *Second order linear parabolic equations*, Uspehi Mat. Nauk (3) **17** (1962), 3-147.

[7] M. Primicerio, *Equazioni alle derivate parziali in problemi di diffusione*, Dispense della Scuola Estiva di Fisica Matematica, Bari 6-24 settembre 1976.

[8] A. A. Samarskii: $[\cdot]_1$ *On a heat propagation problem* (I), Vestnik Moskov Univ. Ser. I, Mat. Meh. **3** (1947), 85-100; $[\cdot]_2$ *On a heat propagation problem* (II), Vestnik Moskov Univ. Ser. I Mat. Meh **6** (1947), 119-129.

[9] A. N. Tikhonov, *On boundary conditions containing higher derivatives than the equation*, Mat. Sb. **1** (1950), 35-56.

[10] M. Ughi, *Stime a priori per le soluzioni di problemi al contorno di quarto e quinto tipo per una equazione parabolica lineare*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena (in corso di pubblicazione).

* * *