Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 557-565

CARLO SILLI (*)

Alcune osservazioni sulle onde straordinarie di discontinuità in una membrana (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. - Introduzione

In tre miei precedenti lavori [**16**]$_1$, [**16**]$_2$ e [**16**]$_3$ ho studiato la propagazione delle onde straordinarie di discontinuità in una membrana termoelastica non omogenea e non necessariamente perfetta [**18**], nel caso generale del legame non lineare tra sforzi e deformazioni. Se il piano tangente ad essa è continuo in ogni suo punto e in ogni istante ho mostrato che la membrana termoelastica non può esser sede di onde straordinarie di discontinuità meccaniche [**16**]$_1$. Nell'ipotesi, invece, che mentre la membrana si muove vi sia su di essa una linea di discontinuità per il piano tangente (linea questa che si propaga col tempo anche sulla membrana stessa) ho mostrato che questa superficie è sede di onde straordinarie di discontinuità meccaniche ed ho determinato l'espressione della velocità di propagazione U_N [**16**]$_2$. Infine, con riferimento ad una generica membrana S e sempre nell'ipotesi dell'esistenza di una linea di discontinuità per il piano tangente nella configurazione attuale, ho dato l'espressione dell'ampiezza dell'onda attraverso la linea di discontinuità stessa in funzione del tempo t [**16**]$_3$.

Nella presente nota, rimuovendo l'ipotesi fatta in entrambi i lavori [**16**]$_1$ e [**16**]$_2$ che lo sforzo specifico t_n sia sempre ortogonale alla linea attraverso cui

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Via Buonarroti 2, 56100 Pisa, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 29-I-1979.

si esercita, ma tutto situato nel piano tangente e per il resto arbitrario, si mostra la continuità del modulo dello sforzo specifico e l'esistenza di un legame lineare tra le sue componenti da entrambe le parti del fronte d'onda nell'ipotesi che il piano tangente alla membrana S sia sempre continuo in ogni punto e in ogni istante, e l'esistenza di onde straordinarie di discontinuità meccaniche nel caso in cui si sia in presenza di una linea di discontinuità del piano tangente stesso.

Anche in questo lavoro, come in **[16]**$_1$, **[16]**$_2$ e **[16]**$_3$, è opportuno rinviare, per quanto riguarda la propagazione delle onde di discontinuità e per lo studio delle lamine e delle membrane, ad esempio, ai lavori citati qui di seguito. Ad alcuni di questi lavori si è ispirata questa nota come le precedenti **[16]**$_1$, **[16]**$_2$, **[16]**$_3$.

T. Manacorda **[11]**, G. Lampariello **[10]**, P. Chadwick e B. Powdrill **[4]**, M. Pastori **[15]**$_1$ e **[15]**$_2$, C. Truesdell e R. Toupin **[19]**, A. E. Green e W. Zerna **[9]**, P. M. Naghdi **[12]**, H. Cohen e A. B. Berkal **[6]**$_1$ e **[6]**$_2$, P. J. Chen **[5]**, S. S. Atman **[1]**, J. L. Eriksen **[7]**, J. W. Nunziato **[13]**, M. M. Carrol e P. M. Naghdi **[3]**, C.-C. Wang **[20]**, B. Finzi **[8]**, Ray M. Bowen e P. J. Chen **[2]**, M. Shahipoor **[17]**, J. W. Nunziato e E. K. Walsh **[14]**.

Io ho studiato la propagazione delle onde straordinarie in un filo termoelastico **[16]**$_4$, **[16]**$_5$, **[16]**$_6$.

2. - Posizione del problema

Si consideri anche qui, come in **[16]**$_1$, **[16]**$_2$ e **[16]**$_3$, un continuo bidimensionale S, mobile, non necessariamente perfetto **[18]**, in cui la sollecitazione interna, che si esercita attraverso ogni suo elemento lineare, è rappresentata da un unico tensore $\mathbf{T}$ di S stesso e cioè si consideri anche qui una membrana **[8]**.

Come in **[16]**$_1$, **[16]**$_2$ e **[16]**$_3$ per qualunque versore situato sul piano tangente, ove questo piano esiste unico, lo sforzo specifico $\boldsymbol{t}_n = \mathbf{T}\boldsymbol{n}$ è situato tutto nel piano tangente stesso e ora, in particolare, non è necessariamente parallelo al versore $\boldsymbol{n}$.

Precisamente noi qui supponiamo che, detto $\boldsymbol{n}$ il versore ortogonale alla linea attraverso cui si esercita lo sforzo $\boldsymbol{t}_n$ e $\boldsymbol{u}$ il versore ad esso tangente (opportunamente orientato), sia

$$\boldsymbol{t}_n = t_1 \boldsymbol{n} + t_2 \boldsymbol{u} \,, \tag{2.1}$$

con t_1 positivo, t_2 non negativo e a priori arbitrari.

Sulla configurazione attuale σ_t di S al tempo t ci sia una linea γ_t, dotata di versore tangente sempre continuo e variabile in generale col tempo t su σ_t, attraverso la quale può essere discontinua, con discontinuità di prima specie, la velocità $\boldsymbol{v}$ dei punti della membrana stessa oltre ad altre grandezze del fenomeno in esame.

Considerato anche qui, come in [**16**]$_3$ il gradiente di deformazione superficiale $\boldsymbol{F}$ definito da

$$\mathrm{d}P = \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}P_0\,, \tag{2.2}$$

con $\mathrm{d}P \in \sigma_t$ e $\mathrm{d}P_0 \in \Sigma$, con Σ configurazione di riferimento di S, supponiamo che le componenti del tensore degli sforzi $\boldsymbol{T}$ siano funzioni a priori generiche della temperatura θ e della deformazione, misurata da una conveniente configurazione di riferimento Σ, e rappresentata da $\boldsymbol{F}$.

3. - Continuità del modulo di $\boldsymbol{t}_n$

Cominciamo con esaminare il caso in cui la membrana S sia dotata in ogni punto e in ogni istante di piano tangente continuo.

Resta ancora valida la $(4.1)_4$ di [**16**]$_1$ che è

$$-\varrho_0 \frac{U_N}{2}[v^2] = [\boldsymbol{t}_n^* \cdot \boldsymbol{v}]\,, \tag{3.1}$$

e la $(4.1)_2$ sempre di [**16**]$_1$ che è a sua volta

$$\varrho_0[\boldsymbol{v}]U_N + [\boldsymbol{t}_n^*] = 0\,, \tag{3.2}$$

dove è ancora

$$\boldsymbol{t}_n^* = \boldsymbol{t}_n J'\,, \tag{3.3}$$

con U_N velocità di propagazione delle onde e J' coefficiente di dilatazione lineare (cfr. [**16**]$_1$, [**16**]$_2$, [**16**]$_3$) e $\boldsymbol{t}_n$ dato dalla (2.1).

Dalla (3.1) si ha

$$[v^2 + 2\,\frac{\boldsymbol{t}_n^* \cdot \boldsymbol{v}}{\varrho_0\, U_N}] = 0\,, \tag{3.4}$$

da cui

$$[(\boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{t}_n^*}{\varrho_0\, U_N})^2] = \frac{[t_n^{*2}]}{\varrho_0^2\, U_N^2}\,. \tag{3.5}$$

Ma per la (3.2) dalla precedente risulta

$$t_{1+}^{*2} + t_{2+}^{*2} = t_{1-}^{*2} + t_{2-}^{*2} . \tag{3.6}$$

È quindi continuo il modulo di $\boldsymbol{t}_n^* = \boldsymbol{t}_n J'$.

Per la corrispondenza biunivoca e continua che intercorre tra le configurazione di riferimento Σ e la configurazione attuale σ_t della membrana S si ha per il coefficiente di dilatazione lineare

$$J' = J'(P, \boldsymbol{n}) \tag{3.7}$$

(con $P \in \sigma_t$ e con $\boldsymbol{n}$ versore di σ_t ortogonale all'elemento d'arco attraverso cui è calcolato J')

$$J'^{+} = J'^{-} = J' \qquad \text{e cioè} \qquad [J'] = 0 , \tag{3.8}$$

sempre attraverso γ_t, dove, per esempio, J'^{+} è calcolato nel seguente modo.

Si consideri una linea $\gamma_t \in \sigma_t$ di discontinuità e per un suo punto P il piano π ortogonale ad essa. Come nei lavori [**16**]$_1$, [**16**]$_2$ e [**16**]$_3$, già citati, dette ancora σ^+ e σ^- le due porzioni della configurazione attuale σ_t della membrana S rispettivamente nel verso della propagazione dell'onda e nel verso opposto, sia $\bar{\gamma}^+$ la linea secondo cui π taglia σ^+. Considerando ora la totalità dei piani che passano per i punti P' di $\bar{\gamma}^+$ e che sono ad essa ortogonali, indichiamo con $\bar{\bar{\gamma}}^+$ l'intersezione di uno di questi piani con σ^+. Calcolato ora J' attraverso $\bar{\bar{\gamma}}^+$ e passando al limite per P' che tende a P si ha J'^{+} come si voleva.

Ora, poichè è $\boldsymbol{t}_n^* = \boldsymbol{t}_n J'$, dalla (3.6) e per la (3.8) si ha

$$t_{1+}^2 + t_{2+}^2 = t_{1-}^2 + t_{2-}^2 , \tag{3.9}$$

e quindi attraverso γ_t è continuo il modulo dello sforzo specifico $\boldsymbol{t}_n$.

4. - Relazioni tra componenti

Sempre con riferimento alla membrana S con piano tangente continuo in ogni punto e in ogni istante ci proponiamo ora di determinare le relazioni che intercorrono rispettivamente tra le componenti t_{1+} e t_{2+} di $\boldsymbol{t}_n^+$ e le componenti t_{1-} e t_{2-} di $\boldsymbol{t}_n^-$, oltre la (3.9) già ottenuta.

Considerato, in un punto P della linea di discontinuità γ_t di σ_t, la terna cartesiana ortogonale costituita dai versori $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{u}$ già definiti e da un terzo versore $\boldsymbol{N}$ ortogonale ai precedenti e situato rispetto a σ_t, ad esempio, dalla stessa banda della velocità $\boldsymbol{v}$, si ha dalla (3.2) e per la (3.8)

$$(4.1) \qquad t_{1+} - t_{1-} = -\frac{\varrho_0 U_N}{J'}[v_n]\,, \qquad t_{2+} - t_{2-} = -\frac{\varrho_0 U_N}{J'}[v_u]\,, \qquad 0 = [v_N]\,,$$

con v_n, v_u, v_N componenti della velocità $\boldsymbol{v}$ secondo $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{N}$ rispettivamente.

Posto per comodità

$$(4.2) \qquad t_{1+} - t_{1-} = a\,, \qquad t_{2+} - t_{2-} = b\,,$$

dalla (3.9) e dalle precedenti (4.2) si ha il sistema

$$(4.3) \qquad t_{1+}^2 + t_{2+}^2 = t_{1-}^2 + t_{2-}^2\,, \qquad t_{1+} - t_{1-} = a\,, \qquad t_{2+} - t_{2-} = b\,,$$

e da questo ne discendono le relazioni

$$(4.4) \qquad 2at_{1+} + 2bt_{2+} = a^2 + b^2\,, \qquad 2at_{1-} + 2bt_{2-} = -(a^2 + b^2)\,,$$

che ci dicono che, nel caso studiato per il piano tangente, la relazione che lega t_{1+} a t_{2+} (così come quella che lega t_{1-} a t_{2-}), in ogni punto P di $\gamma_t \in \sigma_t$, è lineare.

Si può ora osservare che se, ad esempio, esiste una funzione scalare, continua, strettamente crescente f (o φ), per cui valga in tutta σ_t, e indipendentemente dai suoi punti, la relazione

$$(4.5) \qquad t_1 = f(t_2) \qquad \big(\text{o} \quad t_2 = \varphi(t_1)\big)\,,$$

dalla sola relazione (3.9) e per la continuità di f (o φ) ne discende

$$(4.6) \qquad t_{1+} = t_{1-}\,, \qquad t_{2+} = t_{2-} \quad \text{da cui} \quad \boldsymbol{t}_n^+ = \boldsymbol{t}_n^- \quad \text{o} \quad [\boldsymbol{t}_n] = 0\,.$$

Dalla continuità di J' (cfr. (3.8)) si ha, per U_N diverso da zero, dalla (3.2)

$$(4.7) \qquad [\boldsymbol{v}] = 0\,,$$

attraverso γ_t e quindi, nell'ipotesi citata (4.5) per lo stato di tensione della membrana S, non si hanno onde straordinarie di discontinuità meccaniche per il fenomeno in esame, così è stato visto nel caso già studiato **[16]**$_1$ in cui si era supposto

$$(4.8) \qquad \boldsymbol{t}_n = t\boldsymbol{n}\,.$$

5. - Discontinuità di v

Rimuoviamo ora l'ipotesi assunta nei paragrafi **3** e **4** e cioè supponiamo, come in [**16**]$_2$, che il piano tangente alla membrana non sia necessariamente continuo in ogni punto e in ogni istante e precisamente supponiamo che mentre la membrana si muove vi sia su di essa una linea di discontinuità per il suo piano tangente, linea questa che si propaga su di essa col tempo e che in ogni suo punto è dotata di versore tangente.

Dalla $(4.1)_2$ di [**16**]$_2$ si ha ancora

$$\varrho_0[\boldsymbol{v}]\, U_N = -\,[\boldsymbol{t}_n^*]\,, \tag{5.1}$$

e da questa si ha

$$[\boldsymbol{v}] = -\,\frac{\boldsymbol{t}_n^+ J'^+ - \boldsymbol{t}_n^- J'^-}{\varrho_0\, U_N}\,. \tag{5.2}$$

A questo punto è utile osservare che la considerazione del paragrafo **3** con cui si è osservato che il coefficiente di dilatazione lineare J' è continuo attraverso γ_t, nel caso del piano tangente sempre continuo, continua a valere anche nel caso dell'esistenza di un suo spigolo $\gamma_t \in \sigma_t$, e quindi anche in questo caso si ha attraverso γ_t

$$[J'] = 0\,. \tag{5.3}$$

Si ha allora dalle (5.2) e (5.3)

$$[\boldsymbol{v}] = -\,\frac{J'}{\varrho_0\, U_N}\,(\boldsymbol{t}_n^+ - \boldsymbol{t}_n^-)\,. \tag{5.4}$$

Per l'espressione (2.1) di $\boldsymbol{t}_n$ si ha

$$\boldsymbol{t}_n^+ = t_1^+ \boldsymbol{n}^+ + t_2^+ \boldsymbol{u} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{t}_n^- = t_1^- \boldsymbol{n}^- + t_2^- \boldsymbol{u}\,, \tag{5.5}$$

(con $\boldsymbol{u}$ versore tangente a γ_t) per cui è

$$[\boldsymbol{v}] = -\,\frac{J'}{\varrho_0\, U_N}\,([t_1 \boldsymbol{n}] + [t_2]\boldsymbol{u})\,; \tag{5.6}$$

ma per il segno sempre positivo di t_1 e poichè ora è $\boldsymbol{n}^+ \neq \boldsymbol{n}^-$ il secondo membro della precedente è sempre diverso da zero. Ne risulta dunque che per la velocità $\boldsymbol{v}$ dei punti della configurazione attuale σ_t della membrana S si ha

$$[\boldsymbol{v}] \neq 0 \, , \tag{5.7}$$

attraverso γ_t e quindi si hanno sempre onde straordinarie di discontinuità meccaniche per il fenomeno in esame come nel caso già studiato in [**16**]$_2$ in cui era stato supposto

$$\boldsymbol{t}_n = t\boldsymbol{n} \, . \tag{5.8}$$

Risulta inoltre, dalla (5.1) e dalla (5.3), sempre nel caso di $\boldsymbol{t}_n$ dato dalla (2.1)

$$[\boldsymbol{t}_n] \neq 0 \, , \tag{5.9}$$

sempre attraverso lo spigolo $\gamma_t \in \sigma_t$.

6. - La velocità di propagazione U_N^2.

Con ragionamento analogo a quello fatto in [**16**]$_2$ per calcolare il quadrato della velocità di propagazione U_N^2 nel caso $\boldsymbol{t}_n = t\boldsymbol{n}$, si ha ora nel caso di $\boldsymbol{t}_n$ dato dalla (2.1) per il quadrato della velocità di propagazione delle onde, e nel caso in cui dette onde esistono e cioè quando siamo in presenza di una discontinuità del piano tangente come nel paragrafo precedente

$$U_N^2 = \frac{J'[t_1\boldsymbol{n} + t_2\boldsymbol{u}]^2}{\varrho_0\{\beta\boldsymbol{u} + [\boldsymbol{n}\bar{J}]\}\cdot[t_1\boldsymbol{n} + t_2\boldsymbol{u}]} \, , \tag{6.1}$$

con β e $\bar{J}$ già definiti in [**16**]$_2$.

Bibliografia

[**1**] S. S. Antman, *Existence and nonuniqueness of axisymmetric equilibrium states of nonlinearly elastic shells*, Arch. Rational Mech. Anal. **40** (1971), 329-372.

[**2**] Ray M. Bowen and P. J. Chen, *Shock waves in ideal fluid mixtures with several temperatures*, Arch. Rational Mech. Anal. **53** (1973), 277.

[**3**] M. M. Carrol and P. M. Naghdi, *The influence of the reference geometry on the response of elastic shells*, Arch. Rational Mech. Anal. **48** (1972), 302-318.

[**4**] P. Chadwick and B. Powdrill, *Singular surfaces in linear thermoelasticity*, Internat. J. Engrg. Sci. **3** (1965), 561-595.

[5] P. J. Chen, *Mechanics of solids* (III), vol. VI a/3, Springer-Verlag, Berlin 1973.

[6] H. Cohen and A. B. Berkal: [•]$_1$ *Wave propagation in elastic shell,* J. Elasticity **2** (1972), 35-44; [•]$_2$ *Wave propagation in elastic membranes,* J. Elasticity **2** (1972), 45-57.

[7] J. L. Ericksen, *Wave propagation in thin elastic shells,* Arch. Rational Mech. Anal. **43** (1971), 167-178.

[8] B. Finzi, *Equazioni intrinseche della meccanica dei sistemi continui perfettamente e imperfettamente flessibili,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **11** (1932-1933), 215-245.

[9] A. E. Green and W. Zerna, *Theoretical elasticity,* Clarendon Press, Oxford 1968 (seconda edizione).

[10] G. Lampariello, *Sull'impossibilità di propagazione ondose nei fluidi viscosi,* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (6) **13** (1931), 688-691.

[11] T. Manacorda, *Sulla propagazione di onde ordinarie di discontinuità in un filo dotato di viscosità interna,* Riv. Mat. Univ. Parma (1) **9** (1958), 13-19.

[12] P. M. Naghdi, *The theory of shells and plates,* Mechanics of Solids II, vol. VI a/2 Springer-Verlag, Berlin 1972.

[13] J. W. Nunziato and W. Hermann, *The general theory of shock waves in elastic non conductors,* Arch. Rational Mech. Anal. **47** (1972), 272-287.

[14] J. W. Nunziato and E. K. Walsh, *Acceleration waves and mild discontinuites in a non-simple mixture of chemically reacting elastic materials,* Arch. Rational Mech. Anal. **58** (1975), 115.

[15] M. Pastori: [•]$_1$ *Velocità di propagazione nelle membrane inestendibili,* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (6) **29** (1939), 411-417; [•]$_2$ *Propagazione di un generico movimento in una membrana inestendibile,* Ist. Lombardo Sci. Lettere Rend. **72** (1938-1939), 431-436.

[16] C. Silli: [•]$_1$ *Sulle onde straordinarie di discontinuità in una membrana termoelastica,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **8** (1973), 518-536; [•]$_2$ *Sull'esistenza di onde straordinarie di discontinuità in una membrana termoelastica,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **10** (1974), 467-480; [•]$_3$ *Una relazione generale per le onde straordinarie di discontinuità in una membrana,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **2** (1976), 287-294; [•]$_4$ *Sulla propagazione di onde straordinarie di discontinuità in un filo termoelastico,* Atti Sem. Mat. Univ. Modena **16** (1967), 121-142; [•]$_5$ *Ancora sulla propagazione di onde straordinarie di discontinuità in un filo termoelastico,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **1** (1968), 232-243; [•]$_6$ *Sull'ampiezza delle onde straordinarie di discontinuità in un filo termoelastico,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **1** (1968), 717-725.

[17] M. Shahinpoor, *Plane waves and stability in thin elastic circular cylindrical shells,* Arch. Rational Mech. Anal. **54** (1974), 267.

[18] C. Truesdell and W. Noll, *The non-linear field theories of mechanics,* vol. III/3, Springer-Verlag, Berlin 1965.

[19] C. TRUESDELL and R. TOUPIN, *Principles of classical mechanics and fields theory*, vol. III/1, sect. 212-213, Springer-Verlag, Berlin 1960.

[20] C. C. WANG, *On the response functions of isotropic elastic shells*, Arch. Rational Mech. Anal. **50** (1973), 81.

Summary

In this paper extraordinary discontinuity waves in a membrane are studied in the general case of a non linear stress-strain relation. The membrane is assumed to be non-homogeneous and not necessarily perfect. Assuming a tangent plane to the membrane it is shown that there exists a linear relation between the components of the specific stress from both sides of line of discontinuity. Assuming a dividing edge the membrane exhibits extraordinary discontinuity mechanic waves.

* * *