Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 447-452

GIUSEPPE GRIOLI (*)

Questioni analitiche riguardanti i continui di Cosserat (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

Col fine di stabilire proprietà di media e — nel caso di iperelasticità — un procedimento di integrazione, analoghi a quelli dei continui classici $[\mathbf{3}]_{1,2}$ si mostra come il sistema differenziale dei continui di Cosserat possa porsi nella forma div $T = 0$.

Se ne indica una trasformazione in un sistema di equazioni integrali, base di numerose proprietà di media, mostrando come nel caso lineare esso possa utilizzarsi per la individuazione di espressioni approssimanti dello stesso e, al limite, dello stesso stress (con convergenza in media).

1. - Equazioni di campo

Siano C e C^0 la configurazione attuale e quella di riferimento di un continuo tridimensionale di Cosserat, σ e σ^0 le loro frontiere, dotate di normale (interna) n_r, n_r^0 $(r = 1, 2, 3)$; P e P^0 punti corrispondenti in C e C^0, di coordinate rispetto a un medesimo riferimento trirettangolo levogiro di origine O espresse rispettivamente da x_s, y_s e $u_r = x_r - y_r$ le componenti dello spostamento P^0P.

Siano inoltre X_{rs} le componenti euleriane degli sforzi (stress di Cauchy), ψ_{rs} quelle delle coppie e F_r, M_r, f_r, m_r i vettori che caratterizzano rispettivamente le densità delle forze e coppie di massa e di quelle superficiali.

(*) Indirizzo: Seminario Matematico, Università, Via Belzoni 7, 35100 Padova.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 19-XII-1978.

Denotando con e_{rls} il tensore di Ricci nello spazio euclideo tridimensionale, le equazioni di campo si scrivono [**2**], [**3**]$_3$

$$X_{rs/s} = F_r\,, \qquad \psi_{rs/s} + e_{rls}X_{sl} = M_r \qquad \text{(in } C)\,, \tag{1}$$

$$X_{rs}n_s = f_r\,, \qquad \psi_{rs}n_s = m_r \qquad \text{(su } \sigma)\,, \tag{2}$$

ove la sbarretta indica derivazione rispetto alle x_s.

Naturalmente, nel caso dinamico i vettori F_r, M_r includono le forze d'inerzia.

Indicherò un'utile trasformazione delle equazioni di campo. Si ponga

$$P_{rs} = \begin{matrix} X_{rs} & \text{per } r = 1, 2, 3\,, \\ \psi_{r-3s} + e_{r-3lm}x_l X_{ms} & \text{per } r = 4, 5, 6\,; \end{matrix} \tag{3}$$

$$M'_r = M_r + e_{rlm}x_l F_m\,, \qquad m'_r = m_r + e_{rlm}x_l f_m\,, \tag{4}$$

$$S_r = \begin{matrix} F_r & \text{per } r = 1, 2, 3\,, \\ M'_{r-3} & \text{per } r = 4, 5, 6\,; \end{matrix} \qquad L_r = \begin{matrix} f_r & \text{per } r = 1, 2, 3\,, \\ m'_{r-3} & \text{per } r = 4, 5, 6\,. \end{matrix} \tag{5}$$

È facile riconoscere che le equazioni (1), (2), divengono

$$P_{rs/s} = S_r \quad \text{(in } C)\,; \qquad P_{rs}n_s = L_r \quad \text{(su } \sigma) \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6)\,. \tag{6}$$

Se poi si pone

$$P_{rs} = T_{ri}x_{s,i}1/D \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6;\ s = 1, 2, 3)\,, \tag{7}$$

ove D denota lo jacobiano della trasformazione $x_r(y_1, y_2, y_3; t)$, dalle equazioni (euleriane) (6) si ottiene la corrispondente forma lagrangiana

$$T_{rs,s} = S^0_r \qquad \text{(in } C^0)\,; \qquad T_{rs}n^0_s = L^0_r \quad \text{(su } \sigma^0) \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6)\,. \tag{8}$$

Nelle (8) le S^0_r, L^0_r denotano le corrispondenti lagrangiane delle S_r, L_r e la virgola indica derivazione rispetto alle y_s.

Il significato delle posizioni (3), (4) è evidente: M'_r, m'_r, P_{r+3s}, $(r = 1, 2, 3)$, esprimono i momenti rispetto al punto O (anzichè a P), rispettivamente delle forze di massa, di quelle superficiali esterne e di quelle interne.

2. - Proprietà di media. Sistema integrale delle equazioni di campo

Detta $Q(y)$ una funzione derivabile delle y_s, si ponga

$$A_r(Q) = -\frac{1}{C^0}\left[\int_{C^0} S_r^0 Q \, \mathrm{d}C_0 + \int_{\sigma^0} L_r^0 Q \, \mathrm{d}\sigma^0\right] \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6) . \tag{9}$$

Da (8), (9) segue

$$\int_{C^0} T_{rs} Q_{,s} \mathrm{d}C^0 = C^0 A_r(Q) \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6) . \tag{10}$$

Se Q è un monomio in y_1, y_2, y_3, le $A_r(Q)$ per naturale generalizzazione di concetti abituali possono interpretarsi quali coordinate m-astatiche della sollecitazione esterna.

In base a (8), chiaramente risulta

$$A_r(1) = 0 . \tag{11}$$

Se Q dipende da una sola delle tre coordinate le uguaglianze (10) determinano un certo numero di valori medi in C^0 delle T_{rs} e si ha la possibilità di stabilire delle limitazioni per lo stress. Si può osservare che ogniqualvolta la configurazione attuale è nota è possibile stabilire delle limitazioni per lo stress effettivo senza bisogno di conoscere le equazioni costitutive, sulla base delle (10) e del legame espresso da (7).

Si supponga che Q descriva gli elementi di una successione di funzioni H_i completa per l'approssimazione in media in C^0 delle funzioni di quadrato sommabile. Corrispondentemente, dalle (10) si deduce la successione di equazioni integrali

$$\int_{C^0} T_{rs} H_{i,s} \mathrm{d}C^0 = C^0 A_r(H_i) \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6; i = 0, 1, 2, \ldots) . \tag{12}$$

Noti teoremi di analisi funzionale assicurano che la successione delle equazioni integrali (12) è equivalente alle equazioni differenziali di campo sotto opportune condizioni di regolarità, ma non in generale. In realtà si può interpretare la successione di equazioni (10) come una più generale traduzione matematica delle equazioni della meccanica dei continui (di Cosserat).

Di conseguenza ogni stress di quadrato sommabile può rappresentarsi nella forma

$$T_{rs} = \sum_{i=0}^{\infty} c_{rs}^{(i)} H_i \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6; s = 1, 2, 3) , \tag{13}$$

ove, in base alle equazioni (12), i coefficienti $c_{rs}^{(i)}$ soddisfano al sistema di equazioni algebriche lineari

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_{rs}^{(l)} \int_{C^0} H_l H_{i,s} \mathrm{d}C_0 = C_0 A_r(H_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) . \tag{14}$$

3. - Approssimazioni polinomiali dello stress

Nel caso di deformazioni finite gli sviluppi della teoria sono alquanto complessi e lasciano del tutto aperte le questioni analitiche connesse [**3**]$_4$. Nel caso di piccole deformazioni che consentano la linearizzazione del problema si ha invece una sufficiente analogia con il caso dei continui classici e ciò permette l'adattamento di procedimenti per essi già stabiliti [**3**]$_5$.

Nel caso lineare la derivazione rispetto alle x_l si identifica con quella rispetto alle y_l, le P_{rs} coincidono con le T_{rs} (dopo avere sostituito nelle (3) le y_s al posto delle x_s) e le (6), (8) si identificano. Detto Q_1 il vettore che caratterizza la rotazione locale, si ponga

$$\eta_{rs} = u_{s,r} + e_{rls} Q_1 . \tag{15}$$

La densità di energia potenziale elastica deve ritenersi funzione delle η_{rs} e delle $Q_{r,s}$ e sussistono le equazioni costitutive

$$X_{rs} = -\frac{\partial W}{\partial \eta_{rs}}, \qquad \psi_{rs} = -\frac{\partial W}{\partial Q_{r,s}}, \tag{16}$$

che risultano in generale invertibili e dalle quali si deduce, formalmente,

$$\eta_{rs} = a_{rs}(X_{il}, \psi_{il}) ; \qquad Q_{r,s} = b_{rs}(_{il}, \psi_{il}) . \tag{17}$$

Posto

$$W^*(X, \psi) = - W(a_{rs}, b_{rs}) - a_{rs} X_{rs} - b_{rs} \psi_{rs} , \tag{18}$$

le η_{rs}, $Q_{r,s}$ si identificano con le derivate parziali della W^* rispetto alle X_{rs} e ψ_{rs} rispettivamente.

Si esprimano nella (18) le X_{rs}, ψ_{rs} mediante le P_{rs}, in base alle (3), tenuto conto dell'effetto della linearizzazione e si ponga

$$W^{**}(P_{rs}) = W^*[X_{rs}(P_{lm}), \psi_{rs}(P_{lm})] . \tag{19}$$

Supporrò per semplicità che non esistano vincoli nè interni nè superficiali (ma sussiste la possibilità di estendere quanto sarà detto anche al caso che vi siano vincoli sulla frontiera).

È noto [**3**]$_5$ che in condizioni di equilibrio con forze esterne ovunque assegnate lo stress reale è caratterizzato da quelle X_{rs}, ψ_{rs} che rendono stazionaria l'energia elastica totale, espressa da

$$V^{**} = \int_{C^0} W^{**} \, \mathrm{d}C^0 \,, \tag{20}$$

nella classe degli stress in equilibrio con le forze esterne.

Si ponga

$$T_{rs}^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} c_{rs(m)}^{(i)} H_i \qquad (r=1, 2, \ldots, 6; \; s=1, 2, 3) \tag{21}$$

e si considerino le (12) per $i = 1, 2, \ldots, m$. Le $c_{rs(m)}^{(i)}$ soddisfino al sistema indeterminato di equazioni

$$\sum_{i=0}^{m} c_{rs(m)}^{(1)} \int_{C^0} H_1 H_{i,s} \, \mathrm{d}C^0 = C^0 A_r(H_i) \qquad (i = 2, 2, \ldots, m) \,. \tag{22}$$

Si denoti con $V_{(m)}^{**}$ ciò che diviene V^{**} quando si sostituiscono in essa le $T_{rs}^{(m)}$ al posto delle T_{rs}. Se le costanti $c_{rs(m)}^{(i)}$ rendono stazionaria la $V_{(m)}^{**}$ tenuto conto del vincolo espresso dalle (22), appare leggittimo interpretare le espressioni (21) quali approssimazione di ordine m dello stress reale. Infatti, esse non solo soddisfano alle relazioni (22) che approssimano il sistema integrale dell'equilibrio, ma anche esistono un campo di spostamento e uno di rotazioni da cui lo stress (21) deriva [**1**].

Il metodo indicato si presenta particolarmente conveniente quando le H_l si identificano con i primi m elementi di una successione di polinomi in y_1, y_2, y_3 (completa in C^0) ordinati per gradi non decrescenti e costituenti un sistema ortogonale in C^0.

Per le analogie che si hanno con il caso dei continui classici, appare leggittimo presumere che per m tendente all'infinito l'approssimazione di ordine m converga in media verso lo stress reale (ammessa, naturalmente, l'esistenza della soluzione).

Bibliografia

[**1**] S. Bressan, *Espressioni polinomiali dello stress per un continuo di Cosserat*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **57** (1974), 624-629.

[2] A. C. Eringen, *Theory of micropolar elasticity*, Academic Press Inc., New York.

[3] G. Grioli: [•]$_1$ *Proprietà di media e integrazione del problema dell'elastostatica isoterma*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **33** (1952), 263-271; [•]$_2$ *Mathematical theory of elastic equilibrium (recent results)*, Springer-Verlag, 1962; [•]$_3$ *Microstrutture*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **49** (1970), 261-267, 379-385; [•]$_4$ *Contributo per una formulazione di tipo integrale della Meccanica dei continui di Cosserat*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **111** (1976), 175-183; [•]$_5$ *Una proprietà variazionale nella teoria delle microstrutture*, Rend. Mat. (6) **8** (1975), 225-233.

* * *