Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 363-369

CARLO CERCIGNANI (*)

Esistenza e unicità della funzione di distribuzione per un gas di Knudsen tra due lastre parallele (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. - Introduzione

Quando un gas è sufficientemente rarefatto, il suo comportamento può essere descritto mediante una funzione di distribuzione che soddisfa all'equazione di Boltzmann $[1]_{1,2}$. Se gli urti tra le molecole sono così improbabili che il libero cammino medio tra un urto e l'altro si possa ritenere infinito rispetto a altre lunghezze che intervengono nel problema che si vuole studiare, si può sopprimere il complicato termine d'urto che compare nell'equazione di Boltzmann. Quest'ultima si riduce allora a una semplice equazione a derivate parziali e si dice che si ha a che fare con un gas di Knudsen.

La soppressione degli urti intermolecolari non significa che le molecole non siano sottoposte ad interazioni; permangono infatti le complicate interazioni con le pareti solide. Non è scopo del presente lavoro quello di discutere le difficoltà di una ricerca teorica su queste interazioni, difficoltà dovute principalmente alla scarsa conoscenza della struttura superficiale dei corpi solidi e quindi del potenziale di interazione tra le molecole del gas e quelle del solido. Basti ricordare che quando una molecola colpisce una superficie solida, essa viene assorbita e può formare legami chimici, dissociarsi, ionizzarsi, spostare molecole della superficie.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica del Politecnico, Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 30-XI-1978.

Si supporrà quindi di conoscere, in un modo o nell'altro, la densità di probabilità $R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi})$ che una molecola che colpisce la superficie con velocità tra $\boldsymbol{\xi}'$ e $\boldsymbol{\xi}' + \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}'$ riemerga con velocità tra $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\xi} + \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$ e che questa densità di probabilità non dipenda dalla funzione di distribuzione del gas ma solo dalla natura di quest'ultimo e dalla natura e dallo stato della parete $[\mathbf{1}]_2$. Supponiamo qui e nel seguito di avere a che fare con un gas monoatomico per ragioni di semplicità; non ci sarebbero difficoltà ad allargare la trattazione a molecole con gradi di libertà di tipo rotatorio $[\mathbf{1}]_3$.

Se $R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi})$ è nota, è facile scrivere la condizione al contorno per la funzione di distribuzione $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ (qui t è il tempo, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{\xi}$ la posizione e la velocità di una molecola)

$$(1) \qquad |\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n}| f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = \int_{\boldsymbol{\xi}'\cdot\boldsymbol{n}<0} R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}', t) |\boldsymbol{\xi}'\cdot\boldsymbol{n}| \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}' \qquad (\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n} > 0),$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il versore normale alla parete e si è supposto che la parete non si muova normalmente a se stessa (altrimenti si dovrebbe scrivere $(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{u}_0)\cdot\boldsymbol{n}$ e $(\boldsymbol{\xi}' - \boldsymbol{u}_0)\cdot\boldsymbol{n}$ al posto di $\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{\xi}'\cdot\boldsymbol{n}$ dove $\boldsymbol{u}_0$ è la velocità della parete). In generale, R sarà diversa in punti diversi della parete e a tempi diversi; non si è indicata la dipendenza di R da $\boldsymbol{x}$ e t per rendere le equazioni più brevi.

Se la parete restituisce tutte le molecole del gas (in altre parole se non è porosa o assorbente), la probabilità totale di riemissione per una molecola che colpisce la parete sarà uno:

$$(2) \qquad \int_{\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n}>0} R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi}) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = 1 .$$

Non è detto che R debba essere una funzione di L^1; potrebbe essere una distribuzione.

Una proprietà evidente del nucleo $R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi})$ è che non può avere valori negativi

$$(3) \qquad R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi}) \geqslant 0 .$$

Un'altra proprietà del nucleo $R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi})$ è la cosiddetta «legge di reciprocità» o «bilancio dettagliato» $[\mathbf{1}]_{1,2}$; non se ne farà uso qui.

Una questione matematica fondamentale per lo studio del gas di Knudsen è il seguente: data l'equazione alle derivate parziali

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\xi}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{X}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\xi}} = 0 ,$$

(dove $\boldsymbol{X}$ è la forza di volume per unità di massa agente sulle molecole) da soddisfare in una regione Ω con la condizione (1) sul contorno $\partial\Omega$ di Ω e la condizione iniziale $f = f_0$ per $t = 0$ esiste ed è unica e positiva la soluzione f del problema?

Scopo di questo lavoro è di dimostrare che la risposta alla precedente domanda è affermativa nel caso stazionario unidimensionale in assenza di forze di volume. Si tratta del caso più semplice (l'equazione (4) risulta banale) ma mette in luce come le proprietà (2) e (3) del nucleo intervengono nella dimostrazione del teorema. Sarà naturalmente necessario fare delle ipotesi matematiche sulla natura del nucleo $R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi})$ ma si mostrerà, con opportuni controesempi, che esse sono sensate.

2. - Il teorema di esistenza e unicità

Consideriamo un gas monoatomico non soggetto a forze di volume e situato tra due pareti piane parallele indefinite ciascuna di natura e stato uniformi. Gli urti tra le molecole del gas sono completamente trascurabili rispetto a quelli con le pareti solide. Quindi, se lo stato del gas è stazionario, l'equazione (4) si riduce a

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} = 0\,, \tag{5}$$

dove x è la coordinata perpendicolare alle pareti e ξ la corrispondente componente della velocità molecolare. La (5) implica che la funzione di distribuzione moltiplicata per ξ non dipende da x; poichè si era già supposta indipendente da y e z, ξf dipenderà solo dalle tre componenti ξ, η, ζ del vettore velocità molecolare $\boldsymbol{\xi}$.

Su ciascuna parete vale una condizione al contorno del tipo (1); cioè, se f^+ e f^- indicano le funzioni di distribuzione ristrette a $\xi > 0$ e $\xi < 0$

$$|\xi|\,f^+(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\xi<0} R_+(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi})\,|\xi'|\,f^-(\boldsymbol{\xi}')\,d\boldsymbol{\xi}'\,, \tag{6}$$

$$|\xi|\,f^-(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\xi>0} R_-(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi})\,|\xi'|\,f^+(\boldsymbol{\xi}')\,d\boldsymbol{\xi}'\,, \tag{7}$$

dove R_+ e R_- indicano le densità di probabilità di riemissione alla parete inferiore e superiore rispettivamente. R_+ e R_- differiscono tra loro per diversi aspetti; uno puramente formale è che R_+ è una probabilità di transizione da una velocità con componente ξ' negativa a una con componente ξ positiva, mentre questi segni si devono scambiare nel caso di R_-; la seconda differenza, che può anche essere assente, è associata con l'eventuale diversa natura fisica delle pareti; la terza differenza, la più importante, è la differenza di stato fisico tra le pareti (differenza di temperatura, differenza di velocità in una direzione parallela alla giacitura comune ad esse).

Possiamo conglobare la (6) e (7) in un'unica relazione

$$|\xi|f(\xi) = \int R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi})|\xi'|f(\boldsymbol{\xi}')\,d\boldsymbol{\xi}', \tag{8}$$

dove ora $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\xi}'$ non subiscono restrizioni e

$$R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi}) = H(\xi)H(-\xi')R_+(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi}) + H(-\xi)H(\xi')R_-(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi}), \tag{9}$$

avendo indicato con $H(\xi)$ la funzione a scalino di Heaviside.

Notiamo che la (2) applicata a R_+ e R_- dà

$$\int R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} = H(-\xi') + H(\xi') = 1.$$

Il problema che ci proponiamo di risolvere è se la (8) ammetta una e una sola soluzione positiva nell'incognita $g = |\xi|f$; perciò qui riscriviamo la (8) così

$$g(\boldsymbol{\xi}) = \int R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{\xi}')\,d\boldsymbol{\xi}'. \tag{10}$$

Si tratta quindi di una tipica equazione stocastica; se l'operatore integrale che compare a secondo membro è un operatore completamente continuo in L^1, poichè esso trasforma funzioni positive in funzioni positive (eq. (3)), si possono applicare teoremi ben noti [**3**], [**4**] per concludere che esiste una soluzione positiva della (10), determinata però a meno di un fattore moltiplicativo costante. Questa indeterminazione deve essere naturalmente rimossa se si vuole l'unicità della soluzione; torneremo su questo punto tra poco.

Cosa avviene se l'operatore R definito dalla relazione

$$Rg = \int R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{\xi}')\,d\boldsymbol{\xi}', \tag{11}$$

non è completamente continuo? Il teorema di esistenza potrebbe continuare a valere (soprattutto se si passa da f all'incognita $d\mu = f\,d\xi$ e si ambienta il problema nello spazio delle misure anzichè in L^1) ma il teorema di unicità viene a cadere, a meno che R venga opportunamente ristretto. Per vedere che questa restrizione è necessaria, si consideri il caso di R_+ e R_- dati da

$$R_+ = R_- = \delta(\xi + \xi')\,\delta(\eta - \eta')\,\delta(\zeta - \zeta'). \tag{12}$$

Allora ogni funzione pari di ξ sarebbe soluzione della (10). È facile però vedere che la (10) scritta in forma operatoriale,

$$g = Rg\,, \tag{13}$$

ammette soluzione se R anzichè essere completamente continuo sia somma di due parti, ciascuna delle quali lascia invariato il cono delle funzioni positive in L^1 e una delle quali sia completamente continua

$$R = R_0 + R_1\,. \tag{14}$$

Poichè per ogni $h \in L_1^+$ (il cono delle funzioni positive di L^1)

$$\|R_0 h\| + \|R_1 h\| = \|(R_0 + R_1)h\| = \|Rh\| = \|h\|\,, \tag{15}$$

dove si è fatto uso della (2), se si fa l'ipotesi

$$\alpha = \inf_{h \in L^1{}_+} \frac{\|R_0\, h\|}{\|h\|} > 0\,, \tag{16}$$

sia non nullo, si avrà

$$\|R_1 h\| = \|h\| - \|R_0 h\| < \|h\| - \alpha\|h\| = (1-\alpha)\|h\|\,. \tag{17}$$

Quindi la (13) può riscriversi nella forma

$$g = (I - R_1)^{-1} R_0 g\,, \tag{18}$$

dove $(I - R_1)^{-1}$ esiste e trasforma elementi di L_1^+ in elementi dello stesso cono grazie alla (17) (si noti lo sviluppo in serie geometrica). Alla (18) si può applicare il teorema a cui si alludeva prima, perchè $(I - R_1)^{-1} R_0$ è completamente continuo. Ne segue che esiste un $\lambda > 0$ e un g in L_1^+ (determinata a meno di un fattore moltiplicativo costante) tale che

$$g = \lambda (I - R_1)^{-1} R_0 g\,, \qquad \text{cioè} \qquad g = R_1 g + \lambda R_0 g\,. \tag{19}$$

Allora, usando la (19) e la (2)

$$\|g\| = \|R_1 g\| + \lambda\|R_0 g\| = \|Rg\| + \|R_0 g\|(\lambda - 1) = \|g\| + \|R_0 g\|(\lambda - 1)\,, \tag{20}$$

cioè $\lambda = 1$, grazie alla (16) che assicura $\|R_0 g\| \neq 0$.

Allora la (19) equivale alla (13) e il teorema di esistenza di una soluzione positiva, determinata a meno di un fattore positivo costante, è ancora dimostrato.

Osserviamo che il risultato ottenuto si può dedurre anche dai teoremi dimostrati da Karlin [**2**], i quali anzi permettono una generalizzazione su cui non ci soffermeremo. Osserviamo invece che le ipotesi (14) e (16) sono fisicamente significative, in quanto traducono la circostanza fisica che esistano processi di due tipi ciascuno con probabilità finita.

Veniamo ora alla questione della rimozione della costante moltiplicativa in modo da ottenere l'unicità. Osserviamo che il problema matematico formulato nelle (5), (6), (7) contiene certo un fattore indeterminato, perchè tutte queste equazioni sono omogenee. Non si può quindi ottenere un teorema di unicità se non si aggiunge altra condizione; matematicamente la condizione più semplice è quella di assegnare $\|g\|$, cioè sostanzialmente, il numero di molecole urtanti una parete per unità di tempo e di area. Fisicamente, però, è più naturale assegnare il numero n di molecole per unità di volume.

$$n = \int f \, d\boldsymbol{\xi} \, . \tag{21}$$

Occorre allora far l'ipotesi che $1/|\xi| R(\boldsymbol{\xi}' \to \boldsymbol{\xi})|\xi|$ trasformi funzioni di L_1^+ in funzioni dello stesso cono; in tal caso si può ancora garantire l'esistenza di una f che viene a coincidere con $g/|\xi|$ grazie all'unicità a meno di un fattore costante. La (21), naturalmente, con n assegnato, rimuove questo fattore.

3. - Conclusioni

Si è dimostrato un teorema di esistenza, unicità e positività per la funzione di distribuzione per un gas monoatomico in regime di urti intermolecolari trascurabili, ma sotto ampie ipotesi sulla riemissione alla parete.

Bibliografia

[**1**] C. Cercignani: [•]$_1$ *Mathematical methods in kinetic theory,* Plenum Press, New York 1969; [•]$_2$ *Theory and application of the Boltzmann equation,* Scottish Academic Press, Edimburgh 1975; [•]$_3$ *Heat transfer in a Knudsen gas between parallel plates* (accettato per la pubblicazione su Physica).

[**2**] S. Karlin, *Positive operators,* J. Math. Mech. **8** (1959), 907-937.

[**3**] M. A. Krasnoselskii, *Positive solutions of operator equations,* Noordhoff, Groningen 1964.

[**4**] M. G. Krein and M. A. Rutman, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space,* Uspehi Mat. Nauk **3** (1948), n. 1 (23), 3-95) Translation Am. Mat. Soc. (1) **10** (1952), 199-335.

Riassunto

Si considera un gas rarefatto tra due pareti parallele di natura e stato diversi. Supponendo che gli urti intermolecolari siano trascurabili rispetto a quelli con le pareti e sotto ampie ipotesi sulla riemissione alla parete, si dimostra un teorema di esistenza, unicità e positività per la funzione di distribuzione del gas.

* * *