Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 337-345

SANDRO GRAFFI e SERGIO LEVONI (*)

Vibrazioni quasi stazionarie di una corda non omogena (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. - Introduzione

Scopo di questo lavoro è illustrare, per mezzo di un esempio concreto già ampiamente trattato nella letteratura, come certe tecniche operatoriali sviluppate di recente per risolvere il problema dell'esistenza di stati metastabili (detti comunemente risonanze) in sistemi quantistici permettano di trattare agevolmente questioni fisiche completamente analoghe in sistemi classici.

Facendo riferimento al trattato di M. Reed e B. Simon [7] per una trattazione esauriente, le varie nozioni di carattere sia matematico che fisico di cui faremo uso saranno richiamate nel corso della descrizione dell'esempio concreto che passeremo senz'altro ad esporre, seguendo C. L. Dolph [2].

Si consideri una corda vibrante semiinfinita, che si estende da 0 a $+\infty$, fissa a 0, di densità ϱ_1 per $0 \leqslant x \leqslant 1$ e ϱ_2 per $1 < x < +\infty$. ϱ_1 e ϱ_2 sono costanti positive assegnate, con $\varrho_2 > \varrho_1$.

La trattazione usuale di questo problema mediante la separazione delle variabili dà origine ad un problema di Sturm-Liouville singolare autoaggiunto (richiamato nel n. 2) nella variabile x, avente spettro assolutamente continuo su $[0, \infty)$, cosicchè si trova una soluzione unica in $L^2(0, \infty)$ sotto forma di trasformata di Fourier sinusoidale se tanto lo spostamento che le velocità

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, via Campi 181, 41100 Modena, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.). — Ricevuto: 14-XI-1978

iniziali della corda sono assunte nell'intervallo (0, 1). Dunque la corda non può avere vibrazioni stazionarie.

D'altra parte dal punto di vista fisico è immediato osservare che, dal momento che se fosse $\varrho_2 = + \infty$ si avrebbero onde stazionarie fra 0 e 1, per ϱ_2 sufficientemente grande ci si dovrebbero aspettare soluzioni del tipo di onda stazionaria fra 0 e 1, collegantisi in qualche modo con una soluzione del tipo onda uscente fra 1 e $+ \infty$. Si possono trovare facilmente soluzioni di questo tipo eseguendo prima la trasformazione di Laplace rispetto al tempo nell'equazione delle onde iniziale, e costruendo la funzione di Green per l'equazione in x che ne risulta, per invertire poi la trasformazione di Laplace.

L'integrale di inversione si può scrivere come integrale di Cauchy su un contorno interamente contenuto nel semipiano di sinistra, che contiene a sua volta tutte le singolarità della funzione di Green (cioè gli zeri, tutti semplici, del suo wronskiano) considerata come funzione analitica del parametro di Laplace, perchè si fa vedere che tali zeri hanno tutti identica parte reale negativa. Ad ogni zero del wronskiano le due soluzioni che definiscono la funzione di Green diventano com'è ovvio linearmente dipendenti, e pertanto apparentemente si trova un autovalore complesso, il che contraddice la natura autoaggiunta del problema. Ora, però, se è vero che i poli complessi entrano nell'equazione differenziale come se ne fossero autovalori, le « autofunzioni » associate crescono esponenzialmente con x per $x \to + \infty$ cosicchè non sono in L^2. Pertanto tali poli complessi non sono autovalori. Questo tipo di soluzione è detto spesso non modale, in contrasto con le autosoluzioni che sono modali. Facendo ulteriore riferimento all'esposizione di Dolph per vedere come questa soluzione sia proprio quella che corrisponde all'intuizione fisica, per la soluzione della difficoltà che essa incontra con la teoria L^2, e per molti altri esempi fisici di questo tipo, stacchiamocene definitamente per osservare che gli stati metastabili (detti comunemente risonanze) che si osservano in tutti gli atomi e le molecole sono riconducibili a soluzioni del tipo non modale della corrispondente equazione di Schrödinger.

È sorto così in modo naturale il problema matematico di associare in modo univoco ad operatori di Schrödinger autoaggiunti, il cui spettro puntuale deve come è noto descrivere gli stati stazionari del sistema e il cui spettro continuo quelli non stazionari, degli autovalori complessi che debbono descrivere gli stati metastabili sperimentalmente osservati ed euristicamente calcolati.

Questo problema è stato risolto in maniera soddisfacente solo negli ultimi anni (per una rassegna particolarmente efficace, oltre al già citato trattato di Reed e Simon si veda anche Simon [**8**]) tramite il metodo delle dilatazioni analitiche di Balslev-Combes [**1**] che permette, sotto condizioni sempre verificate nei casi concreti, di identificare gli stati metastabili sia come autovalori complessi di un operatore non autoaggiunto univocamente determinato dall'operatore autoaggiunto di partenza tramite il prolungamento analitico dell'operazione di dilatazione unitaria, che come poli sul secondo foglio (della superficie di Riemann) della continuazione analitica dei prodotti scalari del risolvente dell'operatore autoaggiunto presi su un opportuno insieme denso di vettori dello spazio di Hilbert. In questo ambito, ancora più stringente è la nozione isolata da Howland. Egli osserva che, nei problemi concreti, si ha in realtà a che fare con famiglie di operatori che dipendono in maniera olomorfa da un parametro, autoaggiunte per valori reali del parametro stesso: sotto queste condizioni, le risonanze altro non sono che la continuazione analitica, che porta a poli nel secondo foglio del risolvente, a valori reali del parametro di funzioni che, per opportuni valori complessi del parametro, sono veri e propri autovalori della famiglia di operatori. Il grande vantaggio di questi metodi è quello di far rientrare il problema, come vedremo in concreto anche in questo esempio, nell'ambito della teoria spettrale degli operatori lineari, così da poter trattare gli stati metastabili esattamente come quelli stabili.

Limitandoci a ricordare che le dimostrazioni dell'esistenza di risonanze secondo questi metodi nei vari casi concreti di sistemi atomici e molecolari ove esse si osservano è un problema solo parzialmente risolto a tutt'oggi (per risultati in questa direzione si veda Simon [**8**], Graffi e Grecchi [**3**], Herbst [**5**] faremo qui vedere che, data l'estrema semplicità del problema, l'esistenza di stati metastabili del problema può essere facilmente dimostrata a partire dalle definizioni ricordate sopra.

2. - Posizione del problema. Funzione di Green

Si consideri una corda vibrante semiinfinita, disposta a $t = 0$ sull'asse x positivo, fissa a $x = 0$. La densità di tale corda sia data da $\varrho = \varrho_1 > 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $\varrho = \varrho_2 > \varrho_1$, $1 < x < +\infty$.

Seguendo il solito metodo di separazione delle variabili (omettiamo i dettagli perchè sono banali) l'equazione di D'Alembert conduce al seguente problema di Sturn-Liouville autoaggiunto singolare per lo spostamento $u(x)$ ad ogni istante t

$$u''(x) = -\lambda\varrho u(x)\,, \qquad u(0) = 0\,, \qquad u(x) \in L^2(0, +\infty)\,, \tag{2.1}$$

λ essendo il parametro spettrale.

È arcinoto (si veda ad esempio la monografia di Hellwig [**4**]) che il problema (2.1) ha spettro assolutamente continuo su $[0, +\infty)$, da cui risulta la non esistenza di vibrazioni stazionarie della corda.

Vediamo ora di costruire la funzione di Green del problema (2.1). Posto

$$a = \sqrt{-\lambda\varrho_1}\,, \qquad b = \sqrt{-\lambda\varrho_2}\,, \tag{2.2}$$

definiamo

$$f_1(x) = 4b\mathrm{e}^{-b}\sinh(ax)/\{e^a(b-a) - \mathrm{e}^{-a}(a+b)\}\,, \tag{2.3}$$

$$f_2(x) = \mathrm{e}^{-bx} + \{\mathrm{e}^a(a+b) - \mathrm{e}^{-a}(b-a)\}\,\mathrm{e}^{-2b}\mathrm{e}^{bx}/\{\mathrm{e}^a(b-a) - \mathrm{e}^{-a}(a+b)\}\,, \tag{2.4}$$

$$u_1(x) = \begin{matrix} f_1(x) & \text{per } 0 \leqslant x \leqslant 1\,, \\ f_2(x) & \text{per } 1 \leqslant x < +\infty\,, \end{matrix} \tag{2.5}$$

$$g_1(x) = (a-b)\,\mathrm{e}^{-2a}\mathrm{e}^{ax}/(a+b) + \mathrm{e}^{-ax}\,, \tag{2.6}$$

$$g_2(x) = 2a\,\mathrm{e}^{b-a}\,\mathrm{e}^{-bx}/(a+b)\,, \tag{2.7}$$

$$u_2(x) = \begin{matrix} g_1(x) & \text{per } 0 \leqslant x \leqslant 1\,, \\ g_2(x) & \text{per } 1 \leqslant x < +\infty\,, \end{matrix} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= u_1(x)\,u_2'(x) - u_1'(x)\,u_2(x) \\ &= 4ab\,\mathrm{e}^{-b}\big(a(\mathrm{e}^{-2a}+1) + b(1-\mathrm{e}^{-2b})\big)/(a+b)\big(\mathrm{e}^a(b-a) - \mathrm{e}^{-a}(a+b)\big)\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Si vede allora facilmente che la funzione di Green di (2.1) è data da $[u_1(x) \equiv u_1(x,\lambda);\ u_2(x) \equiv u_2(x,\lambda)]$

$$G(x, y; \lambda) = \begin{matrix} -\,u_2(x,\lambda)\,u_1(y,\lambda)/W(\lambda) & \text{per } 0 \leqslant y \leqslant x < +\infty\,, \\ -\,u_1(x,\lambda)\,u_2(y,\lambda)/W(\lambda) & \text{per } 0 \leqslant x \leqslant y < +\infty\,. \end{matrix} \tag{2.10}$$

Osservazioni

(1) Essendo λ complesso, dobbiamo specificare cosa si intende per $\sqrt{-\lambda}$. Si seguirà la solita convenzione di scegliere per branca principale di $\sqrt{\lambda}$ quella per cui $-\pi < \arg\lambda < \pi$, il che corrisponde a porre il taglio lungo l'asse reale negativo. In accordo con tale convenzione, $\sqrt{-\lambda}$ sarà definita sulla superficie di Riemann a due fogli, il taglio correndo da 0 a $+\infty$, e la branca principale essendo quella per cui $0 < \arg\lambda < 2\pi$.

(2) Sia A l'usuale realizzazione autoaggiunta in $L^2(0, +\infty)$ dell'operatore differenziale formale $-\,\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ con condizione di Dirichlet a zero, cioè A sia l'operatore autoaggiunto specificato da

$$Au = -\,u''\,; \qquad D(A) = \{u\,|\,u \in H^2(0, +\infty)\,|\,u(0) = 0\} \tag{2.11}$$

È allora ben noto che $G(x, y; \lambda)$ è il nucleo integrale che definisce l'operatore $(A - \lambda\varrho I)^{-1}$ ($I \equiv$ identità). Lo spettro del problema (2.1) dunque coincide con lo spettro generalizzato di A relativo a ϱ secondo la nozione di T. Kato [**6**], cioè con il complemento rispetto a C di tutti i λ per cui $(A - \lambda\varrho I)^{-1}$ esiste come operatore limitato definito in tutto $L^2(0, +\infty)$. Pertanto lo spettro generalizzato di A (così come il suo spettro secondo la definizione solita) è assolutamente continuo su $[0, +\infty)$.

Faremo vedere nel prossimo paragrafo che permettendo a ϱ di assumere valori complessi le proprietà spettrali del problema (intese in senso generalizzato, come faremo sempre d'ora in poi) cambieranno, perchè esso ammetterà, oltre al continuo, uno spettro discreto.

3. - Analiticità per dilatazione e vibrazioni quasi stazionarie

Come già accennato, applicheremo al problema in esame il metodo delle dilatazioni analitiche di Balslev e Combes.

Sia $U(\theta)$, $\theta \in R$, il gruppo delle dilatazioni unitarie in $L^2(0, \infty)$ definito da

$$(3.1) \qquad \big(U(\theta)f\big)(x) = e^{\frac{1}{2}\theta} f(e^\theta x) , \qquad f \in L^2(0, \infty) ,$$

e sia $T(\theta)$ l'immagine unitariamente equivalente di $A - \lambda\varrho I$ tramite $U(\theta)$

$$(3.2) \qquad T(\theta) = U(\theta)(A - \lambda\varrho I)\, U(\theta)^{-1} .$$

Si vede subito che $T(\theta)$ ha, nel dominio $U(\theta)D(A)$, la rappresentazione differenziale

$$(3.3) \qquad T(\theta) = -\, e^{-2\theta} d^2/dx^2 - \lambda\varrho I = e^{-2\theta}(-\, d^2/dx^2 - e^{-2\theta}\lambda\varrho I) .$$

Da ciò segue immediatamente che (a meno dell'inessenziale fattore moltiplicativo $e^{2\theta}$) $T(\theta)^{-1}$ è dato dall'operatore integrale il cui nucleo $G(x, y; \lambda, \theta)$ si ottiene semplicemente sostituendo ad $a = \sqrt{-\lambda\varrho_1}$ e $b = \sqrt{-\lambda\varrho_2}$, ovunque compaiono, $e^\theta a$ e $e^\theta b$, rispettivamente. Se θ è reale, ciò equivale al fatto banale che per ottenere la funzione di Green di (3.2) basta operare la precedente sostituzione nella funzione di Green del problema originale. Questa operazione diventa significativa permettendo a θ di assumere valori complessi. Più precisamente si ha

T e o r e m a 1. *Sia D la striscia del piano complesso θ, simmetrica rispetto all'asse reale, definita da $-\pi/2 < \operatorname{Im}\theta < \pi/2$. Allora si ha*:

(1) *Per $\theta \in D$, $T(\theta)$ è una famiglia olomorfa di operatori, nel senso di T. Kato* ([**6**], cap. VII).

(2) *Se* $\theta \in D$ *lo spettro di* $T(\theta)$, $\sigma(T(\theta))$, *ammette comunque una parte continua coincidente con la semiretta che esce dall'origine e forma un angolo pari a* $\operatorname{Im}\theta$ *rispetto all'asse reale positivo del piano complesso* λ.

(3) *Se* $\theta \in D$, $\sigma(T(\theta))$ *ammette anche una parte discreta quando, e solo quando,* $\operatorname{Im}\theta \neq 0$. *Tale parte discreta consiste in un'infinità numerabile di autovalori semplici* λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, *specificati da*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{e^\theta\sqrt{-\lambda\varrho_1}\} = -\tfrac{1}{2}\operatorname{arccosh}\{(\varrho_1+\varrho_2)/(\varrho_2-\varrho_1)\}\,, \\ &\operatorname{Im}\{e^\theta\sqrt{-\lambda\varrho_1}\} = k\pi\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che $T(\theta)$ (sempre a meno del fattore $e^{-2\theta}$) può essere considerato come l'operatore di Sturm-Liouville generato da una corda di densità complessa ϱe^θ, per cui questo risultato mostra come nascano vere e proprie vibrazioni stazionarie non appena la densità assuma valori complessi anche con parte immaginaria arbitrariamente piccola.

Procediamo ora alla dimostrazione delle varie affermazioni. L'affermazione (1) è del tutto banale. Infatti si vede subito che la formula (2.10), avendo ivi sostituito $e^\theta a$ e $e^\theta b$ al posto di a e b, rispettivamente, definisce $G(x, y; \lambda, \theta)$ come funzione olomorfa di θ in tutto il piano complesso per ogni coppia (x, y) ed ogni λ per cui $W(\lambda, \theta) \neq 0$. La condizione $-\pi/2 < \operatorname{Im}\theta < \pi/2$ equivale a $\operatorname{Re}(e^\theta) > 0$, e ciò garantisce che il nucleo integrale $G(x, y; \lambda, \theta)$ generi un operatore limitato definito in tutto lo spazio. Quindi i prodotti scalari (u, Gv) sono funzioni analitiche di θ per ogni coppia di vettori $u, v \in L^2(0, \infty)$, il che rappresenta la definizione di famiglia olomorfa di operatori limitati secondo T. Kato.

Anche l'affermazione (2) è assai semplice. Infatti lo spettro continuo è dato da tutti i valori di λ per cui $G(x, y; \lambda, \theta)$ esiste come operatore da $L^2(0, \infty)$ in sè, ma non più limitato. Questo avviene evidentemente quando si annulla la parte reale del coefficiente che moltiplica $-x$ in $u_2(x)$, e ciò si verifica per $\sqrt{-\lambda}\, e^\theta = i$. Ciò individua appunto la semiretta già specificata, come è agevole verificare.

Quanto all'osservazione (3), basterà osservare che, per cose note (si veda ad esempio Hellwig [4]) gli autovalori di $T(\theta)$, tutti semplici, coincidono con i poli $G(x, y; \lambda, \theta)$, cioè con gli zeri del wronskiano $W(\lambda, \theta)$. Dalla (2.9), ricordando che a e b vanno sostituiti con ae^θ e be^θ, si trova dopo alcune semplificazioni che $W(\lambda, \theta)$ si annulla se e solo se

$$\operatorname{tangh}(e^\theta\sqrt{-\lambda\varrho_1}) = -\sqrt{\varrho_1/\varrho_2}\,. \tag{3.5}$$

Alcuni semplici calcoli fanno vedere che la (3.5) equivale alle seguenti condizioni

$$
\text{(3.6)} \qquad \begin{aligned} &\operatorname{Re}\,(e^{\theta}\sqrt{-\lambda\varrho_1}) = -\tfrac{1}{2}\operatorname{arccosh}\{(\varrho_1+\varrho_2)/(\varrho_2-\varrho_1)\}\,, \\ &\operatorname{Im}\,(e^{\theta}\sqrt{-\lambda\varrho_1}) = k\pi\,, \qquad\qquad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)\,. \end{aligned}
$$

Ora però si vede subito che il valore $k = 0$ non è accettabile. Inoltre se θ è reale la prima delle (3.6) fornisce $\operatorname{Re}(\sqrt{-\lambda\varrho_1}) < 0$, il che è incompatibile con l'appartenenza a L^2 della corrispondente autofunzione, il cui andamento a $+\infty$ è ovviamente del tipo $e^{-x\sqrt{-\lambda\varrho_2}}$. Il teorema è così provato.

O s s e r v a z i o n e. Si noti che gli autovalori qui trovati differiscono, come devono, di un'affinità $ie^{2\theta}$ dai poli della trasformata di Laplace secondo la trattazione di Dolph. Il fattore i viene dall'opposta convenzione di scrittura dell'equazione delle onde ($u_{xx} = -(1/\varrho)u_{tt}$ nel nostro caso, $u_{xx} = (1/\varrho)u_{tt}$ nel caso di Dolph) e il fattore $e^{2\theta}$ è appunto quello dovuto alla dilatazione. Esso altro non è che un'affinità (moltiplicazione per $e^{2\operatorname{Re}\theta}$ e rotazione di un angolo pari a $e^{2i\operatorname{Im}\theta}$) che porta i poli della trasformata in veri e propri autovalori dell'operatore non autoaggiunto $T(\theta)$, legato al problema originale dell'analiticità in θ.

La relazione fra gli autovalori $\lambda_k \equiv \lambda_k(\theta)$ e le vibrazioni quasi stazionarie della corda è specificata dal risultato seguente

T e o r e m a 2. *Gli autovalori $\lambda_k(\theta)$ sono funzioni intere della variabile complessa θ, la cui fase dipende solo da* $\operatorname{Im}\theta$. *Per* $\operatorname{Im}\theta = 0$ *essi sono poli nel secondo foglio della superficie di Riemann del risolvente $G(x, y; \lambda, \theta) \equiv (A - \lambda\varrho I)^{-1}$ (l'identità significa che $(A - \lambda\varrho I)^{-1}$ è l'operatore integrale di nucleo G).*

Quando $\varrho_2 \to +\infty$, $\theta \in R$, i λ_k (che non dipendono da θ per l'equivalenza unitaria) tendono alle frequenze di vibrazione stazionaria della corda di densità ϱ_1 ed estremi fissi in 0 *e* 1.

D i m o s t r a z i o n e. L'analiticità degli autovalori $\lambda_k(\theta)$ è un'immediata conseguenza delle formule (3.6) che, definendo $\alpha_k = e^{\theta}\sqrt{\lambda_k\varrho_1}$, $c = \frac{1}{2}\operatorname{arccosh}\{(\varrho_1 + \varrho_2)/(\varrho_2 - \varrho_1)\}$, e tenendo conto del fatto che $\operatorname{Re}\alpha_k = \operatorname{Im}(e^{\theta}\sqrt{-\lambda_k\varrho_1})$, $\operatorname{Im}\alpha_k = -\operatorname{Re}(e^{\theta}\sqrt{-\lambda_k\varrho_1})$ possono essere riscritte nella forma seguente

$$
\text{(3.7)} \qquad \operatorname{Re}\alpha_k = k\pi\,, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots\,, \qquad \operatorname{Im}\alpha_k = c\,,
$$

cioè $\operatorname{Re}(e^{\theta}\sqrt{\lambda_k\varrho_1}) = k\pi$, $\operatorname{Im}(e^{\theta}\sqrt{\lambda_k\varrho_1}) = c > 0$. Pertanto $\arg(e^{\theta}\sqrt{\lambda\varrho_1}) = \operatorname{arctg}(c/k\pi) \to \arg(e^{2\theta}\lambda\varrho_1) = 2\operatorname{arctg}(c/k\pi) = \arg\lambda + \arg e^{2\theta}$ da cui $\arg\lambda = 2\operatorname{arctg}(c/k\pi) - \arg(e^{2\theta}) = 2\operatorname{arctg}(c/k\pi) - 2\operatorname{Im}\theta$ e quindi $\arg\lambda_k$ dipende solo da $\operatorname{Im}\theta$, come deve essere perchè la dilatazione e^{θ} è unitaria per θ reale.

Per θ reale otteniamo, sempre dalle (3.5)

$$\operatorname{tg} \varphi_k = -(2k\pi)/\operatorname{arccosh}\{(\varrho_2 + \varrho_1)/(\varrho_2 - \varrho_1)\} < 0 ,$$

dove $\varphi_k = \arg\sqrt{-\lambda_k \varrho_1}$. Dunque $\arg\sqrt{-\lambda_k} > \pi/2$, cioè $\arg \lambda_k > 2\pi$, il che dimostra che gli zeri λ_k di $W(\lambda)$ giacciono nel secondo foglio della superficie di Riemann di $\sqrt{\lambda}$, cosicchè essi rappresentano poli nel secondo foglio di $G(x, y; \lambda)$, cioè di $(A - \lambda\varrho I)^{-1}$.

Infine per $\varrho_2 \to +\infty$, $\operatorname{Im}\theta = 0$ dalle (3.7) si ha

$$e^{\theta}\operatorname{Re}\sqrt{\lambda_k \varrho_1} = k\pi , \quad e^{\theta}\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_k \varrho_1} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arccosh}\{(\varrho_2 + \varrho_1)/(\varrho_2 - \varrho_1)\} \to 0 ,$$

e quindi $\lambda_k \to e^{2\theta}k^2\pi^2/\varrho_1$, $k = 1, 2, \ldots$. Ricordando il fattore $e^{-2\theta}$ che moltiplicava $T(\theta)$, otteniamo: $\lambda_k \to k^2\pi^2/\varrho_1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ cioè si ritrovano le frequenze naturali di vibrazione della corda omogenea di densità ϱ_1 ed estremi fissi a 0 e 1.

Osservazioni

(1) Per $\operatorname{Im}\theta = 0$ si riottengono (a meno del fattore i che deriva dalla differente convenzione di scrittura) esattamente gli stessi poli della trasformata di Laplace discussi da Dolph, che generano le vibrazioni quasi stazionarie della corda. Il presente risultato ne fornisce quindi l'interpretazione in termini di teoria spettrale degli operatori lineari.

(2) L'analiticità in θ permette di interpretare questi stati metastabili secondo la nozione di Howland già accennata al n. **1**: essi infatti sono la continuazione analitica a poli nel secondo foglio del risolvente del problema autoaggiunto $T(\theta)$, $\theta \in R$, di quantità che, per valori complessi di θ, sono veri e propri autovalori della famiglia olomorfa di operatori $T(\theta)$.

(3) L'esistenza del limite $\varrho_2 \to +\infty$ per gli autovalori, al quale essi coincidono con le armoniche naturali, assicura la consistenza dell'intera costruzione matematica con la nozione fisica intuitiva.

Bibliografia

[1] E. Balslev and J. M. Combes, *Absence of singular continuous spectrum in n-body Schrödinger operators*, Comm. Math. Phys. **22** (1971), 173.

[2] C. L. Dolph, *Non self-adjoint problems in Mathematical Physics*, Bull. Amer. Mat. Soc. **67** (1961), 1.

[3] S. Graffi and V. Grecchi, *Resonances in Stark effect and perturbation theory*, Comm. Math. Phys. **62** (1978), 83.

[4] G. Hellwig, *Differential operatoren der Mathematischen Physik*, Springer-Verlag, Berlin 1964.

[5] I. W. Herbst, *Dilatation analyticty in constant eletric field* (I). *The two-body problem*, Comm. Math. Phys. **64** (1979), 179.

[6] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin 1966.

[7] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern Mathematical Physics* (IV), Academic Press, N. Y. 1978.

[8] B. Simon, *Resonances in n-body quantum systems with dilatation analytic potentials*, An. of Math. **97** (1973), 247.

Riassunto

Si inquadra il noto problema dell'esistenza di modi quasi stazionari in una corda vibrante semiinfinita non omogenea nell'ambito dei metodi operatoriali introdotti per trattare l'analogo problema degli stati metastabili in meccanica quantistica.

* * *