Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 265-286

AUGUSTO MURACCHINI (*)

Alcune proprietà di moti stazionari nei campi gravitazionale e magnetico di uno sferoide ruotante (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

Introduzione

Il moto di una particella soggetta all'azione di forze gravitazionali o, nel caso di particelle cariche, di campi magnetici, è stato per lungo tempo oggetto di studio in numerosi lavori (si veda in [1] e [5] per un'ampia rassegna) e trova tuttora applicazione in alcune questioni di carattere geofisico ed astrofisico [2], [7], [8], [10] - [13], [15].

Ha destato interesse il caso in cui il campo gravitazionale è prodotto da una distribuzione di massa ruotante; tale modello, ad esempio, è posto in relazione con il problema della formazione e delle principali caratteristiche morfologiche delle galassie [3], [4], [6], [14]. In questo caso la distribuzione di materia ha configurazioni che tentano di schematizzare la struttura del nucleo galattico e la forza gravitazionale deriva da potenziali più complessi di quelli di tipo centrale prodotti da una sfera.

Non è stato esaminato finora il caso in cui su una particella carica agiscano contemporaneamente tutti i tipi di forze di cui si è detto sopra.

In questo lavoro ci proponiamo di studiare il moto di una particella carica sotto l'azione di un campo gravitazionale prodotto da uno sferoide ruotante e

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Applicata, Facoltà di Ingegneria, Università, via Vallescura 2, 40136 Bologna, Italy.

(**) Ricevuto: 31-X-1978.

in presenza di un campo magnetico. Si suppone che tale sferoide sia oblato, omogeneo e che la rotazione, di velocità angolare costante, avvenga intorno all'asse minore. Nella prima parte del lavoro il campo magnetico è supposto uniforme, con le linee di forza parallele all'asse di rotazione. Nella seconda parte è un dipolo con lo stesso centro dello sferoide e asse coincidente con quello di rotazione. Il caso limite in cui lo sferoide si riduce ad una sfera viene trattato in particolare.

Studieremo l'esistenza di orbite circolari stazionarie e le determineremo, esaminandone anche la configurazione. Ci occuperemo di eventuali punti di equilibrio e studieremo successivamente la stabilità delle orbite mediante il metodo di Liapunov.

I risultati ottenuti vengono in massima parte presentati sotto forma di condizioni analitiche che assicurano il verificarsi di certe situazioni fisiche, prescindendo da qualsiasi ipotesi restrittiva sui dati del problema; ciò consente l'applicazione a problemi di vario tipo. Tali condizioni contengono come casi limite quelli in cui non è presente l'uno o l'altro dei due campi di forze o anche la rotazione, permettendo così di riottenere risultati sostanzialmente già noti. Richiamiamo infine l'attenzione sul fatto che alcune interessanti questioni, anche di carattere numerico, non trattate qui per brevità, possono essere esaminate, in base ai risultati ottenuti, senza eccessive difficoltà.

Generalità

Sia dato uno sferoide oblato omogeneo di densità σ.

In un sistema di riferimento cilindrico (ϱ, θ, z), solidale con lo sferoide e ruotante con velocità angolare $\Omega\hat{z}$, la superficie dello sferoide ha l'equazione

$$\frac{\varrho^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b)\,. \tag{1}$$

Il potenziale gravitazionale in un punto esterno è dato da [**9**]

$$\mathcal{U}(\varrho, z) = \gamma \int_\lambda^\infty \left[1 - \frac{\varrho^2}{a^2+\zeta} - \frac{z^2}{b^2+\zeta}\right] \frac{d\zeta}{(a^2+\zeta)\sqrt{b^2+\zeta}}\,, \tag{2}$$

ove $\gamma = \pi G \sigma a^2 b$ e λ (> 0) è la maggiore delle due radici della equazione

$$\frac{\varrho^2}{a^2+\lambda} + \frac{z^2}{b^2+\lambda} = 1\,. \tag{3}$$

Introduciamo la variabile ξ così definita

$$\operatorname{sen}\xi = \frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+\lambda}}, \tag{4}$$

con $a\varepsilon = (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}$. Poichè $\lambda > 0$ si ha $\xi > 0$.

Tenendo conto della (4), la (3) diventa

$$\varrho^2 \operatorname{sen}^2\xi + z^2 \operatorname{tg}^2\xi = a^2\varepsilon^2 . \tag{5}$$

Le componenti della forza sono

$$\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \varrho} = -\frac{2\gamma}{a^3\varepsilon^3}\varrho(\xi - \operatorname{sen}\xi\cos\xi), \qquad \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial z} = -\frac{4\gamma}{a^3\varepsilon^3} z(\operatorname{tg}\xi - \xi). \tag{6}$$

1. - Campo magnetico uniforme

1.1. - Equazioni del moto

Il moto di una particella di massa m e carica q in un campo magnetico uniforme le cui linee di forza sono parallele all'asse di rotazione dello sferoide ($B_\varrho = 0$, $B_\theta = 0$, $B_z = B =$ costante) è convenientemente espresso in termini delle variabili canoniche ϱ, θ, z e dei momenti coniugati p_ϱ, p_θ, p_z. Si ha

$$p_\varrho = m\dot\varrho, \qquad p_\theta = m\varrho^2\dot\theta + m(\Omega_L + \Omega)\varrho^2, \qquad p_z = m\dot z, \tag{1.1}$$

ove $\Omega_L = qB/2mc$. L'Hamiltoniana del sistema è allora

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m}\left(p_\varrho^2 + \frac{p_\theta^2}{\varrho^2} + p_z^2\right) - (\Omega + \Omega_L)p_\theta + \frac{1}{2}m\Omega_L^2\varrho^2 - m\mathscr{U}, \tag{2.1}$$

e le equazioni del moto risultano

$$\begin{aligned} &\dot\varrho = \frac{p_\varrho}{m}, \qquad \dot\theta = \frac{p_\theta}{m\varrho^2} - \Omega - \Omega_L, \qquad \dot z = \frac{p_z}{m} \\ &\dot p_\varrho = \frac{p_\theta^2}{m\varrho^3} - m\Omega_L^2\varrho + m\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \varrho}, \qquad \dot p_\theta = 0, \qquad \dot p_z = m\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

La variabile θ è ignorabile e ponendo $p_\theta = K =$ costante avremo

$$\dot{\theta} = \frac{K}{m\varrho^2} - \Omega - \Omega_L . \tag{4.1}$$

Consideriamo ora la seguente funzione

$$\mathscr{L}^* = \frac{1}{2} m \left(\dot{\varrho}^2 + \dot{z}^2 - \frac{K^2}{m^2\varrho^2} + \frac{2K}{m}(\Omega + \Omega_L) - \Omega_L^2\varrho^2 + 2\mathscr{U}\right) \tag{5.1}$$

ed inoltre

$$\mathscr{H}^* = \dot{\varrho}p_\varrho + \dot{z}p_z - \mathscr{L}^* . \tag{6.1}$$

Esprimendo $\mathscr{H}^*$ mediante $\dot{\varrho}$, $\dot{z}$, si ha

$$2\mathscr{H}^* = m\left(\dot{\varrho}^2 + \dot{z}^2 + \frac{K^2}{m^2\varrho^2} - \frac{2K}{m}(\Omega + \Omega_L) + \Omega_L^2\varrho^2 - 2\mathscr{U}\right) . \tag{7.1}$$

Poichè $\partial\mathscr{H}^*/\partial t = 0$, risulta che $\mathscr{H}^*$ è una costante del moto.

1.2. - Orbite circolari stazionarie

Per le eventuali orbite stazionarie deve aversi $\varrho = R$, (e $\dot{\theta} = \alpha =$ costante), $z = h$ e pertanto si tratta di circonferenze (per $\alpha = 0$ si otterranno gli eventuali punti di equilibrio relativo).

Le equazioni (5) e (3.1) conducono alle seguenti

$$\begin{aligned} &R^2 \operatorname{sen}^2\xi + h^2 \operatorname{tg}^2\xi = a^2\varepsilon^2 , \qquad (\operatorname{tg}\xi - \xi)h = 0 , \\ &(\alpha + \Omega + \Omega_L)^2 - \Omega_L^2 = \frac{2\gamma}{a^3\varepsilon^3}(\xi - \operatorname{sen}\xi\cos\xi) , \end{aligned} \tag{8.1}$$

da cui si ottengono le eventuali orbite circolari. Ricordiamo che, poichè $0 < \lambda < \infty$, deve essere $0 < \xi < \operatorname{arcsen}\varepsilon$. Per $\xi > 0$, risulta $\operatorname{tg}\xi - \xi > 0$ e la seconda delle (8.1) fornisce $h = 0$. Perciò *eventuali orbite circolari stazionarie sono necessariamente situate nel piano* $z = 0$.

Le altre due equazioni (8.1) diventano

$$R = \frac{a\varepsilon}{\operatorname{sen}\xi}, \qquad (\alpha + \Omega + \Omega_L)^2 = \Omega_L^2 + \frac{2\gamma}{a^3\varepsilon^3}(\xi - \operatorname{sen}\xi\cos\xi) . \tag{9.1}$$

Esse mostrano che *esistono infinite orbite stazionarie*. Infatti assegnando un valore qualsiasi alla variabile ξ in $]0, \operatorname{arcsen} \varepsilon[$ la prima delle (9.1) fornisce il valore del raggio R dell'orbita, compreso tra a e ∞, e la seconda dà i corrispondenti valori della velocità angolare α che sono sempre reali poichè $\xi - \operatorname{sen} \xi \cos \xi > 0$ per ogni $\xi > 0$.

Si vede anche dalla seconda delle (9.1) che *ogni orbita può essere percorsa con due velocità angolari diverse*

$$\alpha = -\,\Omega - \Omega_L \pm \sqrt{\Omega_L^2 + \frac{2\gamma}{a^3 \varepsilon^3}\,(\xi - \operatorname{sen}\xi \cos\xi)}\,, \tag{10.1}$$

e che *tali velocità appartengono a due intervalli disgiunti. Affinchè esistano punti di equilibrio relativo* (1) *è necessario e sufficiente che il valore $\alpha = 0$ appartenga ad uno di detti intervalli.* Ciò si verifica se, e solo se, risulta

$$0 < \Omega(\Omega + 2\Omega_L)\frac{a^3}{2\gamma} < (\operatorname{arc\,sen} \varepsilon - \varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2})\,\frac{1}{\varepsilon^3}\,. \tag{11.1}$$

Se quest'ultima è soddisfatta il raggio della circonferenza di punti di equilibrio è

$$R_0 = \frac{a\varepsilon}{\operatorname{sen}\xi_0}\,, \tag{12.1}$$

ove ξ_0 è l'unica soluzione della seguente equazione

$$\xi - \operatorname{sen}\xi\cos\xi = \frac{a^3\varepsilon^3}{2\gamma}\,(\Omega + 2\Omega_L)\,\Omega\,. \tag{13.1}$$

1.3. - Stabilità delle orbite circolari stazionarie

Ponendo

$$p_\varrho = mu\,, \qquad p_z = mv\,, \qquad p_\theta = K\,, \tag{14.1}$$

le equazioni del moto (3.1) si scrivono

$$\dot\varrho = u\,, \quad \dot z = v\,, \quad \dot u = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varrho} + \frac{K^2}{m^2\varrho^3} - \Omega_L^2\varrho\,, \quad \dot v = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}\,. \tag{15.1}$$

---

(1) D'ora in poi sottintenderemo il termine « relativo » e parleremo più brevemente di equilibrio.

Lo studio della stabilità delle orbite circolari si compie mediante una funzione di Liapunov ottenuta dalla (7.1). Consideriamo infatti la funzione

$$\mathscr{V}(u, v, \varrho, z) = 2\mathscr{H}^* = m\big(u^2 + v^2 + \mathscr{S}(\varrho, z)\big)\,, \tag{16.1}$$

ove

$$\mathscr{S} = -\frac{2K}{m}(\Omega + \Omega_L) + \frac{K^2}{m^2\varrho^2} + \Omega_L^2\varrho^2 - 2\mathscr{U}\,. \tag{17.1}$$

Segue subito che $\dot{\mathscr{V}} = 0$, perchè $\mathscr{V}$ è costante lungo una qualsiasi traiettoria del moto. Per dimostrare che $\mathscr{V}$ è una funzione di Liapunov per le orbite circolari stazionarie basta mostrare che in corrispondenza ad una qualsiasi di tali orbite la $\mathscr{V}$ ha un minimo isolato. Le orbite circolari stazionarie $\mathscr{C}$ si hanno per

$$\begin{gathered} u = 0\,, \quad v = 0\,, \quad \varrho = R\,, \quad z = 0\,, \\ \dot{\theta} = \alpha = \frac{K}{mR^2} - \Omega - \Omega_L\,. \end{gathered} \tag{18.1}$$

È chiaro che $\mathscr{V}$ presenta un minimo isolato nel punto $(0, 0, R, 0)$ quando la funzione $\mathscr{S}(\varrho, z)$ ha un minimo isolato nel punto $(R, 0)$. Dalla (17.1) si ha

$$\frac{\partial\mathscr{S}}{\partial\varrho} = -\frac{2K^2}{m^2\varrho^3} + 2\Omega_L^2\varrho - 2\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\varrho}\,, \qquad \frac{\partial\mathscr{S}}{\partial z} = -2\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial z}\,, \tag{19.1}$$

e tenendo conto delle (4.1) e (9.1)

$$\Big(\frac{\partial\mathscr{S}}{\partial\varrho}\Big)_{\mathscr{C}} = 0\,, \qquad \Big(\frac{\partial\mathscr{S}}{\partial z}\Big)_{\mathscr{C}} = 0\,. \tag{20.1}$$

Inoltre

$$\begin{gathered} \Big(\frac{\partial^2\mathscr{S}}{\partial\varrho^2}\Big)_{\mathscr{C}} = 2\Omega_L^2 + \frac{6K^2}{m^2R^4} - \frac{8\gamma}{a^3\varepsilon^3}\frac{\operatorname{sen}^3\xi_0}{\cos\xi_0} + \frac{4\gamma}{a^3\varepsilon^3}(\xi_0 - \operatorname{sen}\xi_0\cos\xi_0)\,, \\ \Big(\frac{\partial^2 S}{\partial\varrho\,\partial z}\Big)_{\mathscr{C}} = 0\,, \qquad \Big(\frac{\partial^2\mathscr{S}}{\partial z^2}\Big)_{\mathscr{C}} = \frac{8\gamma}{a^3\varepsilon^3}(\operatorname{tg}\xi_0 - \xi_0)\,. \end{gathered} \tag{21.1}$$

Ma in base a quanto ottenuto in precedenza

$$\frac{K^2}{m^2R^4} = \frac{2\gamma}{a^3\varepsilon^3}(\xi_0 - \operatorname{sen}\xi_0\cos\xi_0) + \Omega_L^2\,, \tag{22.1}$$

e si ricava il determinante Hessiano

$$H = \frac{64\gamma}{a^3\varepsilon^3}(\mathrm{tg}\,\xi_0 - \xi_0)\left(\frac{2\gamma}{a^3\varepsilon^3}\left(\xi_0 - \mathrm{sen}\,\xi_0\cos\xi_0 - \frac{\mathrm{sen}^3\,\xi_0}{2\cos\xi_0}\right) + \Omega_L^2\right). \tag{23.1}$$

Si ha che $(\partial^2 S/\partial z^2)_{\mathscr{C}} > 0$ essendo $\xi_0 > 0$. Perchè la funzione $\mathscr{S}$ presenti un minimo isolato e quindi l'orbita $\mathscr{C}$ sia stabile deve dunque risultare

$$\xi_0 - \mathrm{sen}\,\xi_0\cos\xi_0 - \frac{\mathrm{sen}^3\,\xi_0}{2\cos\xi_0} > -\frac{\Omega_L^2 a^3\varepsilon^3}{2\gamma}. \tag{24.1}$$

Ricordando che $0 < \xi_0 < \mathrm{arcsen}\,\varepsilon$ l'esame della funzione $\xi - \mathrm{sen}\,\xi\cos\xi - (\mathrm{sen}^3\,\xi)/(2\cos\xi)$ mostra che per $0 < \varepsilon \leqslant 0.83$, ossia $b/a \geqslant 0.56$, la (24.1) è soddisfatta per ogni valore di ξ appartenente a $]0, \mathrm{arcsen}\,\varepsilon[$.

In tale caso tutte le orbite circolari sono stabili. Per $\varepsilon > 0.83$ la variabile ξ assume anche valori nell'intervallo $]\mathrm{arcsen}\,0.83, \mathrm{arcsen}\,\varepsilon[$ nel quale la quantità $\xi - \mathrm{sen}\,\xi\cos\xi - (\mathrm{sen}^3\,\xi)/(2\cos\xi)$ ha valori negativi che decrescono al crescere di ξ.

Il minimo valore assunto da tale espressione è chiaramente $\mathrm{arcsen}\,\varepsilon - \varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2} - \varepsilon^3/(2\sqrt{1-\varepsilon^2})$. Si può concludere che se risulta

$$\mathrm{arcsen}\,\varepsilon - \varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon^3}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} > -\frac{\Omega_L^2 a^3\varepsilon^3}{2\gamma}, \tag{25.1}$$

le orbite circolari sono ancora tutte stabili. Se la (25.1) non è soddisfatta, le orbite che si hanno per $\xi > \xi_1$ ove ξ_1 è dato da

$$\xi_1 - \mathrm{sen}\,\xi_1\cos\xi_1 - \frac{\mathrm{sen}^3\,\xi_1}{2\cos\xi_1} = -\frac{\Omega_L^2 a^3\varepsilon^3}{2\gamma}, \tag{26.1}$$

non sono stabili (²). Da quanto precede si conclude che *se lo sferoide ha* $\varepsilon \leqslant 0.83$ *tutte le orbite circolari stazionarie sono stabili*; *se* $\varepsilon > 0.83$ *sono stabili soltanto le orbite di raggio* $R > a\varepsilon/\mathrm{sen}\,\xi_1$, *con* ξ_1 *dato dalla* (26.1).

1.4. - Sfera

Nella trattazione ora svolta, il caso della sfera (corrispondente al valore $\varepsilon = 0$ della eccentricità delle ellissi meridiane) non rientra perchè, data l'im-

(²) Si noti che la (25.1) implica che $\mathrm{arcsen}\,\varepsilon > \xi_1 > \mathrm{arcsen}\,0{,}83$.

postazione dei calcoli, le formule ottenute perdono significato per $\varepsilon = 0$. Tuttavia la trattazione del caso della sfera può essere ottenuta come caso limite per $\varepsilon \to 0$.

Poniamo nella (4) $\tau = \lambda/a^2 (> 0)$; si avrà

$$\operatorname{sen} \xi = \frac{\varepsilon}{(1+\tau)^{1/2}} . \tag{27.1}$$

Ovviamente $0 < \varepsilon/(1+\tau)^{\frac{1}{2}} < 1$ e dalla (27.1) si ricavano i seguenti sviluppi in serie di potenze di $\varepsilon/(1+\tau)^{\frac{1}{2}}$ tutti uniformemente convergenti in ogni intervallo chiuso contenuto in [0, 1[

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\varepsilon}{(1+\tau)^{1/2}} + \frac{1}{6}\frac{\varepsilon^3}{(1+\tau)^{3/2}} + \frac{3}{40}\frac{\varepsilon^5}{(1+\tau)^{5/2}} + \ldots, \\ \cos\xi &= 1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{1+\tau} - \frac{1}{8}\frac{\varepsilon^4}{(1+\tau)^2} + \ldots, \\ \operatorname{tg}\xi &= \frac{\varepsilon}{(1+\tau)^{1/2}} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^3}{(1+\tau)^{3/2}} + \frac{3}{8}\frac{\varepsilon^5}{(1+\tau)^{5/2}} + \ldots . \end{aligned} \tag{28.1}$$

Se ne deduce

$$\begin{aligned} \xi - \operatorname{sen}\xi\cos\xi &= \frac{2}{3}\frac{\varepsilon^3}{(1+\tau)^{3/2}} + \frac{1}{5}\frac{\varepsilon^5}{(1+\tau)^{5/2}} + \ldots, \\ \operatorname{tg}\xi - \xi &= \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^3}{(1+\tau)^{3/2}} + \frac{3}{10}\frac{\varepsilon^5}{(1+\tau)^{5/2}} + \ldots . \end{aligned} \tag{29.1}$$

Il potenziale nel caso della sfera $(a = b)$ è

$$\mathcal{U} = \frac{4\gamma}{3r}, \tag{30.1}$$

con $r^2 = \varrho^2 + z^2$. La (5) diventa, per $\varepsilon \to 0$

$$r = a(1+\tau)^{\frac{1}{2}} . \tag{31.1}$$

Le equazioni (8.1) che permettono di ottenere le orbite circolari stazionarie diventano per $\varepsilon \to 0$

$$\frac{R^2}{1+\tau} + \frac{h^2}{1+\tau} = a^2 \,,$$

(32.1)

$$h \frac{1}{3(1+\tau)^{3/2}} = 0 \,, \qquad (\alpha + \Omega + \Omega_L)^2 - \Omega_L^2 = \frac{2\gamma}{a^3} \; \frac{2}{3(1+\tau)^{3/2}} \,.$$

Poichè $1 + \tau = (R^2 + h^2)/a^2 \neq 0$ queste ultime forniscono

$$h = 0 \,, \qquad R = a(1+\tau)^{1/2} \,,$$

(33.1)

$$(\alpha + \Omega + \Omega_L)^2 - \Omega_L^2 = \frac{4\gamma}{3R^3} \,.$$

Queste mostrano che *vi sono orbite circolari stazionarie soltanto nel piano* $z = h = 0$. *Il loro raggio è*

(34.1) $$R = \left[\frac{4\gamma}{3\left((\alpha + \Omega + \Omega_L)^2 - \Omega_L^2\right)}\right]^{1/3} .$$

Ad ogni suo valore corrispondono due valori della velocità angolare

(35.1) $$\alpha = -\Omega - \Omega_L \pm \left(\frac{4\gamma}{3R^3} + \Omega_L^2\right)^{1/2} .$$

Si può vedere che, essendo necessariamente $R > a$, *tali valori appartengono ancora a due intervalli disgiunti.*

Esistono circonferenze luogo di punti di equilibrio se, e solo se, risulta

(36.1) $$0 < \Omega(\Omega + 2\Omega_L) \frac{a^3}{2\gamma} < \frac{2}{3} \,,$$

e questa non è altro che la (11.1) nella quale si faccia $\varepsilon \to 0$. Per quanto riguarda la stabilità delle orbite circolari stazionarie la condizione (24.1) diventa ora

(37.1) $$\Omega_L^2 + \frac{2\gamma}{a^3}\left(\frac{1}{6} \frac{1}{(1+\tau)^{3/2}} - \frac{1}{20} \frac{\varepsilon^2}{(1+\tau)^{5/2}} + \ldots\right) > 0 \,,$$

da cui si ottiene per $\varepsilon \to 0$

(38.1) $$\frac{\gamma}{3R^3} + \Omega_L^2 > 0 \,.$$

Quest'ultima è sempre soddisfatta e si conclude dunque che *nel caso attuale tutte le orbite circolari stazionarie sono stabili.* Ciò del resto è in accordo con quanto stabilito nel paragrafo **1.3**.

2. - Campo magnetico dipolare

2.1. - Equazioni del moto

Restano tuttora valide le formule (1)-(6). Il campo magnetico dipolare ha, come è noto, il potenziale vettore

$$A = \frac{\boldsymbol{\mu} \wedge \boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{1.2}$$

con $r^2 = \varrho^2 + z^2$ e $\boldsymbol{\mu}$ $(0, 0, -\mu)$. Le sue componenti in coordinate cilindriche sono

$$A_\varrho = 0\,, \qquad A_\theta = \frac{-\mu\varrho}{r^3}\,, \qquad A_z = 0\,. \tag{2.2}$$

L'Hamiltoniana è ora

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m}\left(p_\varrho^2 + \frac{p_\theta^2}{\varrho^2} + p_z^2\right) - (\Omega + \Omega_L)p_\theta + \frac{1}{2}\,m\Omega_L^2\varrho^2 - m\mathscr{U}\,, \tag{3.2}$$

ove i momenti coniugati sono formalmente analoghi a quelli dati dalle (1.1) ma ora si ha $\Omega_L = -\,q\mu/mcr^3$.

Le equazioni del moto risultano pertanto

$$\begin{aligned} &\dot\varrho = \frac{p_\varrho}{m}\,, \qquad \dot\theta = \frac{p_\theta}{m\varrho^2} - \Omega - \Omega_L\,, \qquad \dot z = \frac{p_z}{m}\,, \\ &\dot p_\varrho = \frac{p_\theta^2}{m\varrho^3} - m\Omega_L^2\varrho + p_\theta\frac{\partial\Omega_L}{\partial\varrho} - m\varrho^2\Omega_L\frac{\partial\Omega_L}{\partial\varrho} + m\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\varrho}\,, \\ &\dot p_\theta = 0\,, \qquad \dot p_z = p_\theta\frac{\partial\Omega_L}{\partial z} - m\varrho^2\Omega_L\frac{\partial\Omega_L}{\partial z} + m\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial z}\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Come nel caso del campo magnetico uniforme si ha, ponendo $p_\theta = K =$ costante

$$\dot\theta = \frac{K}{m\varrho^2} - \Omega - \Omega_L, \tag{5.2}$$

e procedendo in modo analogo si giunge a

$$2\mathscr{H}^* = m\,(\dot{\varrho}^2 + \dot{z}^2 + \frac{K^2}{m^2\varrho^2} - \frac{2K}{m}(\Omega + \Omega_L) + \Omega_L^2\varrho^2 - 2\mathscr{U})\,. \tag{6.2}$$

Risulta ancora che $\mathscr{H}^*$ è una costante del moto.

2.2. - Orbite circolari stazionarie

Per le orbite stazionarie deve essere $\varrho = R$, $(\dot{\theta} = \alpha)$, $z = h$. Anche nel caso attuale esse sono circonferenze. Le equazioni (4.2) conducono alle seguenti relazioni

$$R^2 \operatorname{sen}^2\xi + h^2 \operatorname{tg}^2\xi = a^2\varepsilon^2\,,$$

$$\left(\frac{3q\mu}{mc}\,\frac{R^2}{(R^2+h^2)^{5/2}}(\alpha + \Omega) - \frac{4\gamma}{a^3\varepsilon^3}(\operatorname{tg}\xi - \xi)\right)h = 0, \tag{7.2}$$

$$(\alpha + \Omega)^2 + \frac{q\mu}{mc}\,\frac{R^2 - 2h^2}{(R^2+h^2)^{5/2}}(\alpha + \Omega) = \frac{2\gamma}{a^3\varepsilon^3}(\xi - \operatorname{sen}\xi\cos\xi)\,.$$

Questo sistema di equazioni permette di ottenere le eventuali orbite circolari stazionarie. *Si possono avere ora due tipi di tali orbite*:

(i) *orbite nel piano* $z = 0$;

(ii) *orbite in piani* $z = h \neq 0$.

Esaminiamo separatamente i casi (i) e (ii).
Nel caso (i) si ha $\varrho = R$, $(\dot{\theta} = \alpha)$, $z = h = 0$.
Le equazioni (7.2) si riducono allora alle seguenti

$$R = \frac{a\varepsilon}{\operatorname{sen}\xi}\,,\quad h = 0,\quad (\alpha + \Omega)^2 + \frac{q\mu}{mcR^3}(\alpha + \Omega) = \frac{2\gamma}{a^3\varepsilon^3}(\xi - \operatorname{sen}\xi\cos\xi)\,. \tag{8.2}$$

Si vede che *nel piano* $z = 0$ *esistono infinite orbite circolari stazionarie i cui raggi* $R \in]a, \infty[$ *si ottengono dalla prima equazione* (8.2). *Per ogni valore del raggio la terza equazione fornisce due valori per la velocità angolare* α. Si noti che, poichè $\xi - \operatorname{sen}\xi\cos\xi > 0$, deve sempre aversi $\alpha \neq -\Omega$.

Nel caso (ii) si ha $\varrho = R$, $(\dot{\theta} = \alpha)$, $z = h \neq 0$. Le equazioni (7.2) diventano

$$
\begin{aligned}
& R^2 \operatorname{sen}^2 \xi + h^2 \operatorname{tg}^2 \xi = a^2 \varepsilon^2 , \\
(9.2) \qquad & \frac{3q\mu}{mc} \frac{R^2}{r^5} (\alpha + \Omega) = \frac{4\gamma}{a^3 \varepsilon^3} (\operatorname{tg} \xi - \xi) , \\
& (\alpha + \Omega)^2 + \frac{q\mu}{mc} \frac{R^2 - 2h^2}{r^5} (\alpha + \Omega) = \frac{2\gamma}{a^3 \varepsilon^3} (\xi - \operatorname{sen} \xi \cos \xi) .
\end{aligned}
$$

La seconda equazione implica $q\mu(\alpha + \Omega) > 0$. Poniamo ora

$$
w = \frac{q\mu(\alpha + \Omega)}{\gamma mc} , \tag{10.2}
$$

e dalle (9.2), eliminando R ed h, si ottiene

$$
\begin{aligned}
(11.2) \qquad & w^{2/3}(3Aw^2 + 2 \operatorname{tg} \xi + 7 \operatorname{sen} \xi \cos \xi - (5 + 4 \cos^2 \xi)\xi) \operatorname{tg}^2 \xi \\
& \qquad = 3(Aw^2 + 2 \operatorname{tg} \xi + \operatorname{sen} \xi \cos \xi - 3\xi)^{5/3} ,
\end{aligned}
$$

ove $A = (\gamma m^2 c^2 a^3 \varepsilon^3)/2q^2\mu^2$. Le stesse (9.2) risolte invece rispetto ad R ed h danno

$$
R^2 = \frac{4(\operatorname{tg} \xi - \xi)}{3\varepsilon^3 w} \frac{r^5}{a^3} , \tag{12.2}
$$

$$
h^2 = \frac{3\varepsilon^3 w r^2 - 4(\operatorname{tg} \xi - \xi) r^5 a^{-3}}{3\varepsilon^3 w} . \tag{13.2}
$$

Fissando un valore di $q\mu(\alpha + \Omega)$ positivo e quindi, in base alla (10.2) un valore di w anch'esso positivo, la (11.2) potrà fornire valori di ξ. Sono accettabili soltanto quelli che appartengono all'intervallo $]0, \operatorname{arcsen} \varepsilon[$ e che rendono, nella (13.2), $h^2 > 0$. Essi danno allora le orbite circolari stazionarie corrispondenti al valore fissato di $\alpha + \Omega$. Ovviamente si può invece fissare ξ in $]0, \operatorname{arcsen} \varepsilon[$ ed ottenere dalla (11.2) il valore di w (che deve essere positivo e rendere $h^2 > 0$) e quindi poi di $\alpha + \Omega$. È da rilevare inoltre che le equazioni (9.2) permettono di dimostrare che *le orbite circolari stazionarie di tipo* (ii), *quando esistono, formano una superficie al finito. In altre parole, i valori di R, h ed α relativi a tali orbite sono superiormente limitati.* Le eventuali circonferenze luogo di punti di equilibrio si ottengono ponendo $\alpha = 0$ nelle (7.2); si presentano ancora i due tipi di circonferenze già introdotti.

Per le circonferenze di tipo (i), *luogo di punti di equilibrio, si ha* un risultato del tutto analogo a quello ottenuto nel caso del campo magnetico uniforme: *condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di punti di equilibrio nel piano* $z=0$ *è che risulti*

$$\Omega\left(\Omega+\frac{q\mu}{mca^3}\right)\frac{a^3}{2\gamma}<\left(\operatorname{arcsen}\varepsilon-\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)\frac{1}{\varepsilon^3}\,. \tag{14.2}$$

Tale condizione è perfettamente simile alla (11.1).

Nel caso delle circonferenze di tipo (ii), una discussione fondata su una analisi numerica della equazione (11.2) e che non riportiamo per brevità, permette di concludere che *possono esservi fino a tre valori di* h^2 *che ne forniscono. Si presentano effettivamente i casi di tre, due, uno o nessun valore di* h^2.

2.3. - Stabilità delle orbite circolari stazionarie

Come nel caso del campo magnetico uniforme l'esame della stabilità delle orbite circolari stazionarie si esegue considerando una opportuna funzione di Liapunov. Nel caso attuale tale funzione si riconduce, procedendo come in (**1.3**), alla seguente

$$\mathscr{S}(\varrho,z)=-\frac{2K\Omega}{m}+\frac{2Kq\mu}{m^2c(\varrho^2+z^2)^{3/2}}+\frac{K^2}{m^2\varrho^2}+\frac{q^2\mu^2\varrho^2}{m^2c^2(\varrho^2+z^2)^3}-2\mathscr{U}\,. \tag{15.2}$$

Esamineremo separatamente le orbite circolari di tipo (i) e (ii) precedentemente introdotte.

Le orbite di tipo (i) si hanno per

$$\begin{aligned}&\varrho=R=\frac{a\varepsilon}{\operatorname{sen}\xi}\,,\\ &z=0,\quad (\alpha+\Omega)^2+\frac{q\mu}{mca^3\varepsilon^3}\operatorname{sen}^3\xi(\alpha+\Omega)=\frac{2\gamma}{a^3\varepsilon^3}(\xi-\operatorname{sen}\xi\cos\xi),\end{aligned} \tag{16.2}$$

ed inoltre, dalle (5.2) e da $\dot\theta=\alpha$, si ha

$$\alpha+\Omega-\frac{q\mu}{mca^3\varepsilon^3}\operatorname{sen}^3\xi=\frac{\operatorname{sen}^2\xi}{ma^2\varepsilon^2}K\,. \tag{17.2}$$

Si verifica che per ogni orbita stazionaria di tipo (i) risulta

$$(18.2)\qquad (\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial \varrho})_{\mathscr{C}} = 0\,, \qquad (\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial z})_{\mathscr{C}} = 0$$

e, ricordando (16.2) e (17.2),

$$(\frac{\partial^2 \mathscr{S}}{\partial \varrho\, \partial z})_{\mathscr{C}} = 0\,, \qquad (\frac{\partial^2 \mathscr{S}}{\partial z^2})_{\mathscr{C}} = \frac{8\gamma}{a^3 \varepsilon^3}\,(\operatorname{tg}\xi - \xi) - \frac{6q\mu(\alpha + \Omega)}{mca^3\varepsilon^3}\operatorname{sen}^3\xi,$$

$$(19.2)\qquad (\frac{\partial^2 \mathscr{S}}{\partial \varrho^2})_{\mathscr{C}} = 6(\alpha + \Omega)^2 + \frac{12q\mu(\alpha + \Omega)}{mca^3\varepsilon^3}\operatorname{sen}^3\xi + \frac{2q^2\mu^2}{m^2c^2a^6\varepsilon^6}\operatorname{sen}^6\xi$$

$$+ \frac{4\gamma}{a^3\varepsilon^3}\,(\xi - \operatorname{sen}\xi\cos\xi - \frac{2\operatorname{sen}^3\xi}{\cos\xi})\,.$$

Tenuto conto della prima di queste, per aversi la stabilità, devono esistere valori di ξ e di $\alpha + \Omega$ (legato a ξ dalla terza di (16.2)) tali che

$$(20.2)\qquad (\frac{\partial^2 \mathscr{S}}{\partial z^2})_{\mathscr{C}} > 0\,, \qquad (\frac{\partial^2 \mathscr{S}}{\partial \varrho^2})_{\mathscr{C}} > 0\,.$$

Se si pone

$$(21.2)\qquad w = \frac{q\mu(\alpha + \Omega)}{\gamma mc}\,,$$

la terza di (16.2) diventa

$$(22.2)\qquad w^2 + \frac{q^2\mu^2\operatorname{sen}^3\xi}{\gamma m^2c^2\,a^3\varepsilon^3}\,w - \frac{2q^2\mu^2}{\gamma m^2c^2\,a^3\varepsilon^3}\,(\xi - \operatorname{sen}\xi\cos\xi) = 0\,,$$

e le (20.2) danno luogo alle seguenti disuguaglianze

$$(23.2)\qquad \frac{4}{3\,\cos\xi} - \frac{8}{3}\,\frac{\xi - \operatorname{sen}\xi\,\cos\xi}{\operatorname{sen}^3\xi} - \frac{q^2\,\mu^2\,\operatorname{sen}^3\xi}{2\gamma m^2c^2a^3\varepsilon^3} < w < \frac{4}{3}\,\frac{\operatorname{tg}\xi - \xi}{\operatorname{sen}^3\xi}\,.$$

Si tratta di esaminare se esistono, e in tal caso determinarli, valori di $\xi \in]0, \operatorname{arcsen} \varepsilon[$ che sostituiti nella (22.2) forniscano due valori di w (o uno solo dei due) che soddisfacciano le (23.2). L'esame di tale questione può essere svolto in base allo studio dell'andamento dei membri delle disuguaglianze (23.2) e delle soluzioni della (22.2). Si conclude così che *per qualsiasi valore dei parametri ε, a, q, μ, γ, m esistono nel piano $z = 0$ infinite orbite circolari stazionarie, relative a valori della variabile ξ compresi in un opportuno intorno destro dell'origine, che sono stabili con entrambe le velocità angolari che loro competono. Per gli altri valori di $\xi <$ arcsen ε vi possono essere orbite circolari che sono stabili con una sola delle relative velocità angolari e vi possono anche essere orbite non stabili* (3). La discussione mette anche in luce il fatto che *per tutti i valori della eccentricità minori di un certo ε_0 le orbite circolari sono tutte stabili con entrambe le velocità angolari se il raggio dello sferoide è maggiore di una quantità dipendente da γ, q, μ*. A conferma ed illustrazione di ciò sta il caso della sfera ($\varepsilon = 0$) che tratteremo in fondo.

Passiamo ora alle orbite di tipo (ii). Per esse si ha

$$\varrho = R\,, \quad z = h\,, \quad r^2 = R^2 + h^2\,, \quad R^2 \operatorname{sen}^2\xi + h^2 \operatorname{tg}^2 \xi = a^2\varepsilon^2\,,$$

$$\alpha + \Omega = \frac{K}{mR^2} + \frac{q\mu}{mcr^3}\,,$$

(24.2)
$$(\alpha + \Omega)^2 + \frac{q\mu}{mc}\frac{R^2 - 2h^2}{r^5}(\alpha + \Omega) = \frac{2\gamma}{a^3\varepsilon^3}(\xi - \operatorname{sen}\xi\cos\xi)\,,$$

$$\frac{3q\mu}{mc}\frac{R^2}{r^5}(\alpha + \Omega) = \frac{4\gamma}{a^3\varepsilon^3}(\operatorname{tg}\xi - \xi)\,.$$

Si verifica ancora che per ogni orbita circolare stazionaria di tipo (ii) risulta

$$(25.2) \qquad \left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial \varrho}\right)_{\mathscr{C}} = 0\,, \quad \left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial z}\right)_{\mathscr{C}} = 0$$

e, tenendo conto delle prime due relazioni (24.2),

$$(26.2)_1 \qquad \left(\frac{\partial^2 \mathscr{S}}{\partial \varrho^2}\right)_{\mathscr{C}} = \frac{8\gamma R^2}{a^3\varepsilon^3}\left(\frac{5(\operatorname{tg}\xi - \xi)}{r^2} - \frac{\operatorname{sen}^5\xi\cos\xi}{D} - \frac{4\operatorname{tg}\xi + 2\operatorname{sen}\xi\cos\xi - 6\xi}{R^2}\right) + \frac{9q^2\mu^2}{m^2c^2}\frac{R^2(3R^2 - 2r^2)}{r^{10}}\,,$$

(3) Tali casi si verificano effettivamente su esempi numerici che non si riportano per brevità.

$$(26.2)_2 \qquad \left(\frac{\partial^2 \mathscr{S}}{\partial z^2}\right)_{\mathscr{C}} = \frac{8\gamma h^2}{a^3 \varepsilon^3}\left(\frac{5(\operatorname{tg}\xi - \xi)}{r^2} - \frac{\operatorname{sen}^5 \xi}{D \cos^2 \xi}\right) + \frac{18 q^2 \mu^2}{m^2 c^2}\,\frac{R^2 h^2}{r^{10}},$$

$$(26.2)_3 \qquad \left(\frac{\partial^2 \mathscr{S}}{\partial \varrho\, \partial z}\right)_{\mathscr{C}} = \frac{8\gamma R h}{a^3 \varepsilon^3}\left(\frac{5(\operatorname{tg}\xi - \xi)}{r^2} - \frac{\operatorname{sen}^5 \xi}{D \cos \xi}\right) + \frac{6 q^2 \mu^2}{m^2 c^2}\,\frac{Rh(3R^2 - 2r^2)}{r^{10}},$$

con $D = a^2\varepsilon^2 + a^2\varepsilon^2 \cos^2\xi - r^2 \operatorname{sen}^2 \xi$.

Le condizioni per la stabilità sono ora

$$(27.2) \qquad \left(\frac{\partial^2 \mathscr{S}}{\partial z^2}\right)_{\mathscr{C}} > 0\,, \qquad \left(\frac{\partial^2 \mathscr{S}}{\partial \varrho^2}\right)_{\mathscr{C}} \left(\frac{\partial^2 \mathscr{S}}{\partial z^2}\right)_{\mathscr{C}} - \left(\frac{\partial^2 \mathscr{S}}{\partial \varrho\, \partial z}\right)^2_{\mathscr{C}} > 0\,.$$

La seconda delle condizioni (27.2) si può scrivere

$$(28.2) \qquad \frac{64\gamma^2}{a^6 \varepsilon^6}\left(\Phi_1\, \Phi_2 - \Phi_3\right) +$$

$$+ \frac{8\gamma q^2 \mu^2}{m^2 c^2 a^3 \varepsilon^3 r^{10}}\left(18 R^2 h^2 \Phi_1 + 9(3R^2 - 2r^2)^2 \Phi_2 - 12 Rh(3R^2 - 2r^2)\,\Phi_3\right)$$

$$+ \frac{126 q^4 \mu^4}{m^2 c^2}\,\frac{R^2 h^2 (3R^2 - 2r^2)^2}{r^{20}} > 0\,,$$

ove

$$\Phi_1 = \frac{R^2}{r^2}\left(5(\operatorname{tg}\xi - \xi) - \frac{r^2}{D}\operatorname{sen}^5 \cos\xi - \frac{r^2}{R^2}\left(4 \operatorname{tg}\xi + 2 \operatorname{sen}\xi \cos\xi - 6\xi\right)\right),$$

$$(29.2) \qquad \Phi_2 = \frac{h^2}{r^2}\left(5(\operatorname{tg}\xi - \xi) - \frac{r^2}{D}\,\frac{\operatorname{sen}^5 \xi}{\cos \xi}\right),$$

$$\Phi_3 = \frac{Rh}{r^2}\left(5(\operatorname{tg}\xi - \xi) - \frac{r^2}{D}\,\frac{\operatorname{sen}^5 \xi}{\cos \xi}\right).$$

Le condizioni ricavate permettono di verificare, per ogni orbita circolare stazionaria di tipo (ii), *per cui siano noti dalla* (11.2) *i valori di ξ ed $\alpha + \Omega$, se si ha stabilità.* Purtroppo la discussione generale non è in questo caso praticabile data la complessità delle condizioni, ma possiamo ottenere qualche risultato di carattere generale facendo opportune ipotesi sulle orbite da esaminare.

Supponiamo che un'orbita circolare stazionaria del tipo (ii) corrisponda ad un valore della variabile ξ tale che si possa trascurare ξ^3 rispetto all'unità e per cui i valori di R, r, h risultino tali da soddisfare le disuguaglianze $r > R > 0.5r$ e $0.86r > h > 0$. La quantità r^2/D si può, in tal caso, approssimare con $1/\xi^2$. Segue poi, dato che $\operatorname{tg}\xi - \xi$ può attualmente approssimarsi con $\xi^3/3$ che la prima delle (27.2) è certamente soddisfatta. Anche la (28.2) è soddisfatta purchè ξ^5 sia dello stesso ordine di grandezza, o di ordine inferiore, della quantità $(q^2\mu^2a^3\varepsilon^3)/\gamma m^2c^2r^6$.

La stabilità delle orbite considerate è dunque verificata. Le ipotesi che abbiamo ora introdotto non sono, come potrebbe apparire, fortemente restrittive. È in realtà possibile trovare facilmente numerosi casi di orbite del tipo (ii) per cui si ha stabilità.

2.4. - Sfera

Restano tuttora valide le relazioni da (27.1) a (31.1). Le equazioni (7.2) che danno le orbite circolari stazionarie diventano per $\varepsilon \to 0$

$$\frac{R^2}{1+\tau} + \frac{h^2}{1+\tau} = a^2$$

$$(30.2) \qquad h\left(\frac{3q\mu R^2}{mcr^5}(\alpha+\Omega) - \frac{4\gamma}{3a^3}\frac{1}{(1+\tau)^{3/2}}\right) = 0\,,$$

$$(\alpha+\Omega)^2 + \frac{q\mu(R^2-2h^2)}{mcr^5}(\alpha+\Omega) = \frac{4\gamma}{3a^3}\frac{1}{(1+\tau)^{3/2}}\,.$$

La seconda di tali equazioni conduce a distinguere: (i) orbite nel piano $z = h = 0$ e (ii) orbite in piani $z = h \neq 0$.

Per le orbite di tipo (i) le equazioni (30.2) assumono la forma seguente

$$(31.2) \qquad h = 0 \qquad R = a(1+\tau)^{1/2}$$

$$(\alpha+\Omega)^2 + \frac{q\mu}{mcR^3}(\alpha+\Omega) = \frac{4\gamma}{3R^3}\,.$$

Le conclusioni che se ne traggono sono analoghe a quelle già viste in (**1.4**).

Vi sono orbite circolari stazionarie nel piano $z = 0$ di raggio arbitrario dato da

$$(32.2) \qquad R = \left(\frac{4mc\gamma - 3q\mu(\alpha+\Omega)}{3mc(\alpha+\Omega)^2}\right)^{1/3}.$$

Ciascuna di esse può essere percorsa con due diverse velocità angolari

$$(33.2) \qquad \alpha = -\Omega - \frac{q\mu}{2mcR^3} \pm \left(\frac{4\gamma}{3R^3} + \frac{q^2\mu^2}{4m^2c^2R^2}\right)^{1/2}.$$

Poichè $R > a$, *i valori delle velocità angolari appartengono a due intervalli disgiunti.*

Esistono circonferenze luogo di punti di equilibrio se, e solo se, risulta

$$\Omega\left(\frac{q\mu}{mca^3} + \Omega\right)\frac{a^3}{2\gamma} < \frac{2}{3}, \tag{34.2}$$

che è la (14.2) al limite per $\varepsilon \to 0$.

Nel caso delle orbite di tipo (ii) le equazioni (30.2) diventano

$$R^2 = \frac{2\gamma m^2 c^2}{9q^2\mu^2} r^5, \qquad \alpha + \Omega = \frac{2q\mu}{mcr^3}. \tag{35.2}$$

La prima mostra che *le orbite circolari stazionarie sono ora possibili se, e solo se*

$$a^3 < \frac{9q^2\mu^2}{2\gamma m^2 c^2}, \tag{36.2}$$

poichè esse debbono essere situate al di fuori della sfera di raggio a. *Se tali orbite esistono, sono infinite e situate sulla superficie, al finito, di equazione*

$$(x^2 + y^2 + z^2)^5 = \frac{9q^2\mu^2}{2\gamma m^2 c^2}(x^2 + y^2)^2. \tag{37.2}$$

Ponendo

$$w = \frac{q\mu(\alpha + \Omega)}{\gamma mc}, \tag{38.2}$$

dalle (30.2) si ricava

$$R^2 = \left(\frac{16q^2\mu^2}{27\gamma m^2 c^2}\right)^{2/3} w^{-5/3}, \qquad h^2 = \left(\frac{16q^2\mu^2}{27\gamma m^2 c^2}\right)^{2/3} \frac{9w - 4}{4w^{5/3}}. \tag{39.2}$$

Tenuto conto di (35.2) e (36.2) si conclude che esistono, se la (36.2) è soddisfatta, infinite orbite circolari stazionarie situate in piani $z = h \neq 0$. Esse si ottengono assegnando al parametro w tutti i valori compresi nell'intervallo

$$\frac{4}{9} < w < \frac{2q^2\mu^2}{\gamma m^2 c^2 a^3}. \tag{40.2}$$

Si noti infine che *ciascuna orbita di tipo* (ii) *può essere percorsa con una sola velocità angolare* (vedi (35.2)) *e* che *tutte le velocità angolari hanno lo stesso segno.*

Per quanto riguarda *le circonferenze di tipo* (ii), *luogo di punti di equilibrio,* il sistema (30.2) con $\alpha = 0$ mostra che *se, e solo se, risulta*

$$\frac{4}{9} < \frac{\Omega q \mu}{\gamma m c} < \frac{2 q^2 \mu^2}{\gamma m^2 c^2 a^3}, \tag{41.2}$$

esiste un valore di h^2 *ed uno solo per cui esse si ottengono.*

Esaminiamo ora la stabilità delle orbite di tipo (i). Procedendo come nel caso relativo allo sferoide le (16.2) e (17.2) diventano ora

$$\begin{gathered} \varrho = R = a(1+\tau)^{1/2}, \qquad z = h = 0\,, \\ (\alpha+\Omega)^2 + \frac{q\mu}{mcR^3}(\alpha+\Omega) = \frac{4\gamma}{3R^3}, \\ \alpha + \Omega - \frac{q\mu}{mcR^3} = \frac{K}{mR^2}, \end{gathered} \tag{42.2}$$

e le (19.2)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial\varrho\,\partial z}\right)_{\mathscr{C}} &= 0\,, \\ \left(\frac{\partial^2 S}{\partial\varrho^2}\right)_{\mathscr{C}} &= 2(\alpha+\Omega)^2 + \frac{8q\mu}{mcR^3}(\alpha+\Omega) + \frac{2q^2\mu^2}{m^2c^2R^6}, \\ \left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right)_{\mathscr{C}} &= 2(\alpha+\Omega)^2 - \frac{4q\mu}{mcR^3}(\alpha+\Omega)\,. \end{aligned} \tag{43.2}$$

Le condizioni di stabilità (20.2) diventano, tenendo conto della seconda equazione (42.2) che si scrive ora,

$$w^2 + \frac{q^2\mu^2}{\gamma mc} vw - \frac{4q^2\mu^2}{3\gamma mc} v = 0\,, \tag{44.2}$$

le seguenti

$$-\frac{4}{9} - \frac{q^2\mu^2}{3\gamma mc} v < w < \frac{4}{9}, \tag{45.2}$$

avendo posto

$$w = \frac{q\mu(\alpha + \Omega)}{\gamma mc}, \qquad v = \frac{1}{mcR^3}. \tag{46.2}$$

Inoltre, poichè deve essere $R > a$, si avrà

$$0 < v < \frac{1}{mca^3}. \tag{47.2}$$

Le (44.2) e (45.2) si discutono in modo molto conveniente per via geometrica. Nel piano (w, v) cartesiano ortogonale i punti che soddisfano le (45.2) e (47.2) sono interni ad un trapezio. I punti che soddisfano la (44.2), corrispondenti alle orbite circolari, appartengono ad una iperbole. Risulta allora, da tale rappresentazione geometrica che *se*

$$\text{(I)} \qquad a^3 \geqslant \frac{9q^2\mu^2}{0.392\gamma m^2 c^2}, \tag{48.2}$$

tutte le orbite circolari sono stabili con entrambe le velocità angolari ad esse relative;

$$\text{(II)} \qquad \frac{9q^2\mu^2}{2\gamma m^2 c^2} \leqslant a^3 < \frac{9q^2\mu^2}{0.392\gamma m^2 c^2}, \tag{49.2}$$

tutte le orbite circolari sono ancora stabili con entrambe le velocità angolari se $R^3 > 9q^2\mu^2/0.392\gamma m^2c^2$ *e con una sola delle due se invece* $R^3 \leqslant 9q^2\mu^2/0.392\gamma m^2c^2$;

$$\text{(III)} \qquad a^3 < \frac{9q^2\mu^2}{2\gamma m^2 c^2}, \tag{50.2}$$

sono stabili con almeno una delle due velocità angolari soltanto le orbite circolari con $R^3 \geqslant 9q^2\mu^2/2\gamma m^2c^2$ *mentre quelle con* $R^3 < 9q^2\mu^2/2\gamma m^2c^2$ *non sono stabili.*

Per quanto riguarda la stabilità delle orbite di tipo (ii) le (26.2) danno per $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \varrho^2}\right)_{\mathscr{C}} &= \frac{16\gamma R^2}{3r^5} + \frac{9q^2\mu^2}{m^2c^2}\,\frac{R^2(3R^2 - 2r^2)}{r^{10}}, \\
\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \varrho\,\partial z}\right)_{\mathscr{C}} &= \frac{16\gamma Rh}{3r^5} + \frac{6q^2\mu^2}{m^2c^2}\,\frac{Rh(3R^2 - 2r^2)}{r^{10}}, \\
\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right)_{\mathscr{C}} &= \frac{16\gamma h^2}{3r^5} + \frac{18q^2\mu^2}{m^2c^2}\,\frac{R^2h^2}{r^{10}} > 0.
\end{aligned} \tag{51.2}$$

Tenendo conto della prima equazione (35.2) si trova

$$H = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \varrho^2}\right)_{\mathscr{C}} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right)_{\mathscr{C}} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \varrho \partial z}\right)^2_{\mathscr{C}} = \frac{128\gamma q^2 \mu^2 h^2}{3m^2 c^2 r^{11}} > 0 . \tag{52.2}$$

Si conclude pertanto che *le orbite circolari stazionarie in piani* $z = h \neq 0$, *quando esistono, sono stabili.*

Bibliografia

[1] G. Agostinelli, *Sul problema delle aurore boreali e il moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico*, corsi C.I.M.E. I Ciclo 1967, Cremonese, Roma 1968.

[2] V. Banfi, *Un'ipotesi sull'origine degli anelli di Saturno*, Mem. Soc. Astron. Ital. **43** (1972), 247-262.

[3] J. M. A. Danby, *The formation of arms in barred spirals*, Astronom. J. **70** (1965), 501-512.

[4] G. De Vaucouleurs and K. C. Freeman, *Structure and dynamics of barred spiral galaxies, in particular of the Magellanic type*, Vistas in Astronomy **14** (1972), 163-294.

[5] A. J. Dragt, *Trapped orbits in a magnetic dipole field*, Rev. Geophys. **3** (1965), 255-298.

[6] K. C. Freeman, *Structure and evolution of barred spiral galaxies*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **133** (1966), 47-62; **134** (1966), 1-14, 15-23.

[7] P. C. Kammeyer, *Periodic orbits around a rotating ellipsoid*, Celestial Mech. **17** (1978), 37-48.

[8] R. K. Kaul, H. Razdan and J. A. Lockwood, *Low energy charged particle ring around equator in the altitude range* 400-1100 km, Astrophys. and Space Sci. **46** (1977), 215-223.

[9] W. D. Mac Millan, *Theory of the potential*, Dover, New York 1958.

[10] V. V. Markellos and A. A. Halioulias, *On the totality of periodic motions in the meridian plane of a magnetic dipole*, Astrophys. and Space Sci. **51** (1977), 177-186.

[11] V. V. Markellos, S. Klimopoulos, A. A. Halioulias and C. Goudas, *Periodic motions in the meridian plane of a magnetic dipole* I, II, Celestial Mech. **17** (1978), (I) 215-232; (II) 233-249.

[12] A. Mavraganis: $[\bullet]_1$ *Symmetric periodic orbits in Störmer's problem*, Astrophys. and Space Sci. **38** (1975), 395-401; $[\bullet]_2$ *The magnetic-binaries problem: motion of a charged particle in the region of a magnetic binary system*, Astrophys. and Space Sci. **54** (1978) 305-313.

[13] A. Mavraganis and C. L. Goudas, *New types of motion in Störmer's problem*, Astrophys. and Space Sci. **32** (1975), 115-138.

[14] M. Michalodimitrakis: [•]$_1$ *Properties of motion in the gravitational field of a rotating bar*, Astrophys. and Space Sci. **33** (1975), 421-440; [•]$_2$ *Periodic orbits in barred galaxies*, Astrophys. and Space Sci. **37** (1975), 131-142.

[15] Yu. A. Rylov, *On the electron cap shape of a rotating neutron star with a strong magnetic field*, Astrophys. and Space Sci. **51** (1977), 59-75.

Summary

The properties of motion of a charged particle in the gravitational and magnetic fields of a homogeneous, uniformly rotating, oblate spheroid are studied. In the first part of the paper the magnetic field is uniform and subsequently is a dipole. Stationary circular orbits are found and their stability is investigated by Liapounov's method. The case of a sphere is particularly treated.

* * *