Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 221-248

GIUSEPPE TALLINI (*)

Spazi combinatori e sistemi di Steiner (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno.

Introduzione

Le geometrie combinatorie (cioè lo studio — che prende le mosse dal lavoro di Whitney [**21**] — degli spazi di chiusura finiti soddisfacenti all'assioma dello scambio ed in cui il vuoto ed ogni punto è chiuso, [**4**]) hanno avuto un notevole sviluppo negli ultimi anni, anche in vista delle loro svariate applicazioni.

Recentemente si è andata altresì sviluppando la teoria dei sistemi di Steiner e più in generale lo studio dei «block designs». I sistemi di Steiner, nati fin dal secolo scorso ad opera appunto di Steiner e di Kirkman [**16**], [**10**], un pò come curiosità matematiche, si sono sviluppati come capitolo a sè della matematica in epoca recente, come mostra l'ampia produzione scientifica al riguardo (della quale noi citeremo nella bibliografia soltanto alcuni esempi indicativi).

I sistemi di Steiner sono caso particolare degli spazi di rette, così chiamandosi una coppia $(S, \mathscr{R})$, ove S è un insieme e $\mathscr{R}$ è una famiglia di parti di S, da dirsi rette, di cardinalità $\geqslant 2$, tale che per ogni coppia di punti distinti di S passa un sol elemento di $\mathscr{R}$ (se S è finito e gli elementi di $\mathscr{R}$ hanno tutti la stessa cardinalità $(S, \mathscr{R})$ risulta appunto un sistema di Steiner).

Le nozioni di spazio combinatorio e di spazio di rette sono strettamente tra loro collegate per il motivo seguente. Dato uno spazio combinatorio $(S, \mathscr{C})$, esso determina lo spazio di rette $(S, \mathscr{R})$, ove $\mathscr{R}$ è la famiglia dei sottospazi di dimensione uno, cioè delle rette di $(S, \mathscr{C})$. Viceversa, dato uno spazio di rette $(S, \mathscr{R})$, esso determina lo spazio di chiusura $(S, \mathscr{C})$, ove gli elementi di $\mathscr{C}$ sono

(*) Indirizzo: Istituto Matematico «G. Castelnuovo», Università, 00100 Roma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 13-XI-1978.

quei sottoinsiemi di S, ciascuno dei quali contiene ogni retta che abbia due punti in comune con esso. Può accadere che $(S, \mathscr{C})$ sia uno spazio combinatorio, oppure no; in ogni caso i sistemi di chiusura combinatori massimali contenuti in $\mathscr{C}$ definiscono altrettanti spazi combinatori su S, il cui studio dà informazioni sullo spazio di rette $(S, \mathscr{R})$ di partenza.

Scopo del presente lavoro è appunto quello di investigare i legami, testè menzionati, tra spazi combinatori e spazi di rette, dando origine ad uno studio sistematico dei sistemi di Steiner dal punto di vista combinatorio, ed inoltre di fornire una esposizione panoramica sulle questioni in oggetto, anche per suscitare interesse nei non iniziati allo studio di questi argomenti.

1. - Spazi geometrici

Sia S un insieme non vuoto e $\mathscr{G}$ una famiglia propria e non vuota di parti di S. La coppia $(S, \mathscr{G})$ prende il nome di *spazio geometrico*, gli elementi di S si diranno *punti*, $\mathscr{G}$ si dirà *struttura geometrica* ed S *sostegno* dello spazio $(S, \mathscr{G})$ (cfr. [**18**]$_{5,6}$).

La classe degli spazi geometrici può strutturarsi in due modi diversi come categoria a seconda che si definiscano i morfismi tra $(S, \mathscr{G})$ ed $(S', \mathscr{G}')$ come quelle applicazioni di S in S' le cui immagini di elementi di $\mathscr{G}$ siano elementi di $\mathscr{G}'$, ovvero le controimmagini di elementi di $\mathscr{G}'$ siano elementi di $\mathscr{G}$. Si ottiene in tal modo *la categoria covariante* ovvero *la categoria controvariante* degli spazi geometrici.

Gli isomorfismi dell'una categoria coincidono con quelli dell'altra e sono le biezioni tra $(S, \mathscr{G})$ ed $(S', \mathscr{G}')$ che mutano ogni elemento di $\mathscr{G}$ in un elemento di $\mathscr{G}'$ e tali che le inverse mutano ogni elemento di $\mathscr{G}'$ in un elemento di $\mathscr{G}$. Lo studio degli spazi geometrici è fatto a meno di isomorfismi, cioè identificando due spazi geometrici tra loro isomorfi.

Dato uno spazio geometrico $(S, \mathscr{G})$, i suoi *automorfismi* (cioè gli isomorfismi di $(S, \mathscr{G})$ su se stesso) costituiscono un gruppo, che prende il nome di *gruppo strutturale* di $(S, \mathscr{G})$ e si denota con $\mathrm{Aut}\,(S, \mathscr{G})$. Lo studio delle proprietà di $(S, \mathscr{G})$ invarianti rispetto a tale gruppo dicesi *geometria* dello spazio geometrico $(S, \mathscr{G})$. Se $\mathscr{G}$ e $\mathscr{G}'$ sono due strutture geometriche di uno stesso insieme S, può accadere che i gruppi $\mathrm{Aut}\,(S, \mathscr{G})$ e $\mathrm{Aut}\,(S, \mathscr{G}')$ coincidano, cioè che gli spazi geometrici $(S, \mathscr{G})$ ed $(S, \mathscr{G}')$ ammettano la stessa geometria: in tal caso diremo che le due strutture geometriche sono *equivalenti*. Per esempio sia $\mathscr{R}$ la famiglia delle rette del piano reale R^2 e sia $\mathscr{T}$ la famiglia delle terne di punti non allineati di R^2. Un automorfismo dello spazio geometrico $(R^2, \mathscr{R})$ è una biezione di R^2 che muta rette in rette e cioè è una affinità di R^2, quindi il gruppo degli automorfismi di $(R^2, \mathscr{R})$ è il gruppo delle affinità del piano, cioè la geometria di $(R^2, \mathscr{R})$ è quella affine. Analogamente si prova che $\mathrm{Aut}(R^2, \mathscr{T})$ è il gruppo delle affinità di R^2, quindi le strutture geometriche $\mathscr{R}$ e $\mathscr{T}$ di R^2 sono equivalenti. Un altro esempio si ha considerando la famiglia $\mathscr{R}'$ delle rette dello spazio reale R^3 e la famiglia $\mathscr{P}$ dei piani di R^3: gli spazi geometrici $(R^3, \mathscr{R}')$ ed $(R^3, \mathscr{P})$ ammettono lo stesso gruppo strutturale — come subito si prova — dato dal gruppo delle affinità di R^3, quindi la geometria di $(R^3, \mathscr{R}')$ coincide con quella di $(R^3, \mathscr{P})$ e risulta la geometria affine di R^3.

Nel seguito ci occuperemo soprattutto degli spazi geometrici finiti. Se $(S, \mathscr{G})$ è uno spazio geometrico finito, una qualsiasi biezione $f\colon S \to S$ che muta un elemento di $\mathscr{G}$ in un elemento di $\mathscr{G}$ è un automorfismo di $(S, \mathscr{G})$: in quanto, essendo S finito, esisterà un intero n tale che $f^n =$ identità di S, onde $f^{-1} = f^{n-1}$ muta anche esso elementi di $\mathscr{G}$ in elementi di $\mathscr{G}$. Si noti che, se l'insieme S non è finito, possono esistere strutture geometriche $\mathscr{G}$ di S per cui esistono biezioni di S in sè che mutano $\mathscr{G}$ in sè, ma che non sono automorfismi di $(S, \mathscr{G})$, cioè tali che le inverse non mutano $\mathscr{G}$ in sè. Se S è costituito da N elementi, il numero delle strutture geometriche di S risulta la cardinalità dell'insieme $P(P(S)) - \{\emptyset\}$ ed è quindi dato da

$$|P(P(S)) - \{\emptyset\}| = 2^{(2^N)} - 1\,. \tag{1.1}$$

Inoltre, data una struttura geometrica $\mathscr{G}$ di S, il numero di quelle isomorfe a $\mathscr{G}$ è al più $N!$ (tante quante sono le biezioni di S), quindi, *se $g(N)$ è il numero delle strutture geometriche non isomorfe di S*, risulta

$$g(N) \geqslant \frac{2^{(2^N)} - 1}{N!}\,. \tag{1.2}$$

Ne segue che $g(N)$ cresce rapidamente al crescere di N (si ha $g(4) \geqslant 2731$, $g(5) \geqslant 35791393$).

2. - Spazi di rette e sistemi di Steiner

Uno spazio geometrico $(S, \mathscr{R})$ prende il nome di *spazio di rette* se sono verificate le seguenti condizioni:

$$|\mathscr{R}| \geqslant 2\,; \qquad \forall r \in \mathscr{R}\,, \qquad |r| \geqslant 2\,. \tag{2.1}$$

$$\forall P, Q \in S\,, \qquad P \neq Q \Rightarrow \exists!\, r \in \mathscr{R} \,|\, P, Q \in r\,. \tag{2.2}$$

Se è verificata la seguente altra condizione si parlerà di *spazio di rette equipotenti*

$$\forall r, s \in \mathscr{R} \qquad |r| = |s| . \tag{2.3}$$

Ogni spazio proiettivo o affine su un corpo, rispetto alla famiglia delle rette di tali spazi, costituisce un esempio di spazio di rette equipotenti.

Una classe interessante di spazi di rette equipotenti è data dagli *spazi di Sperner* o *S-spazi*, così definendosi uno spazio di rette $(S, \mathscr{R})$ soddisfacente alla (2.3) e tale che in $\mathscr{R}$ risulti definita una relazione di equivalenza, da dirsi parallelismo, $\|$, tale che

$$\forall P \in S , \quad \forall r \in \mathscr{R} \Rightarrow \exists ! r' \in \mathscr{R} | P \in r', \quad r \| r' ; \tag{2.4}$$

ne segue che due rette parallele distinte sono ad intersezione vuota. (Sugli spazi di Sperner cfr. per esempio [**15**], [**1**]$_{1,2}$, [**11**]).

Se S è finito, uno spazio di rette equipotenti $(S, \mathscr{R})$ prende il nome di *2-sistema di Steiner*. Ci occuperemo ora brevemente di essi, rimandando alla bibliografia per un ulteriore approfondimento. Sia dunque $(S, \mathscr{R})$ un sistema di Steiner e sia n il numero di punti di ciascuna retta. Sia poi m il numero delle rette per un punto P di S. Poichè per ogni Q di $S - \{P\}$ passa una sola retta che la congiunge con P e i punti, diversi da P, di tale retta sono in numero di $n-1$, si ha $|S| = m(n-1) + 1$. Quindi m non dipende da P ed inoltre si ha

$$|S| = m(n-1) + 1 . \tag{2.5}$$

Gli interi m, n permettono di determinare tutti i caratteri aritmetici di $(S, \mathscr{R})$.

Sia $r \in \mathscr{R}$ e $P \in S - r$, le rette per P incidenti r sono in numero di n (essendo $|r| = n$), quindi il numero delle rette per P non incidenti r è dato da

$$u = m - n \geqslant 0 . \tag{2.6}$$

Se $u = 0$, cioè $m = n$, $(S, \mathscr{R})$ è un piano proiettivo. Se $u = 1$, cioè $m = n + 1$, $(S, \mathscr{R})$ è un piano affine.

Determiniamo il numero $|\mathscr{R}|$ delle rette di $(S, \mathscr{R})$. Consideriamo l'insieme delle coppie (P, r), con $P \in S$, $r \in \mathscr{R}$ e $P \in r$. Il numero K di tali coppie può determinarsi nei seguenti due modi. Fissata una retta $r \in \mathscr{R}$, le coppie (P, r), con $P \in r$, sono in numero di n (tante quanti sono i punti di r), al variare di r in $\mathscr{R}$ si ottengono allora complessivamente $K = n|\mathscr{R}|$ coppie. D'altra parte, fissato un punto P di S, il numero delle coppie (P, r), con $P \in r$, è m; al variare di P in S si ottengono allora $K = m|S|$ coppie. Ne segue che è $n|\mathscr{R}| = m|S|$ e quindi, tenuto conto della (2.5)

$$|\mathscr{R}| = m^2 - \frac{m(m-1)}{n}, \tag{2.7}$$

onde risulta

$$m(m-1) \equiv 0 \mod n, \qquad u(u-1) \equiv 0 \mod n. \tag{2.8}$$

Un 2-sistema di Steiner con $n = 3$ prende il nome di *sistema di terne di Steiner*. Per esso deve aversi, in forza della (2.8), $m \equiv 0 \mod 3$ ovvero $m \equiv 1 \mod 3$, cioè

$$|S| \equiv 1 \text{ o } 3 \mod 6. \tag{2.9}$$

La (2.9) è dunque necessaria per l'esistenza di sistemi di terne di Steiner con $|S|$ elementi. Ma è stato dimostrato che essa è anche sufficiente (cfr. [**10**], [**13**], [**12**]).

La nozione di 2-sistema di Steiner si generalizza come segue. Definiscesi *h-sistema di Steiner* uno spazio geometrico $(S, \mathscr{B})$ tale che

$$|\mathscr{B}| \geqslant 2; \qquad \forall B \in \mathscr{B}, \ |B| = n \geqslant h, \tag{2.10}$$

(2.11) *per ogni* h-pla *di punti distinti di* S *passa un sol* $B \in \mathscr{B}$.

Un h-sistema di Steiner con $s = |S|$ e $n = |B|$, $B \in \mathscr{B}$, si denota con $S(h, n, s)$. Per $h = 1$ si ottengono le partizioni in classi equipotenti di un insieme S. Per $h = 2$ si hanno gli spazi di rette equipotenti di cui sopra. Un esempio di sistema di Steiner $S(3, q+1, q^2+1)$, con q potenza di un primo, è dato da una quadrica ellittica di uno spazio di Galois $P_{3,q}$, rispetto alla famiglia delle sue coniche. In un sistema di Steiner $(S, \mathscr{B})$ gli elementi di $\mathscr{B}$ prendono sovente il nome di *blocchi*.

Sia $(S, \mathscr{B})$ un sistema di Steiner $S(h, n, s)$. Determiniamo il numero $|\mathscr{B}|$ dei suoi blocchi. All'uopo consideriamo l'insieme delle coppie costituite da un elemento B di $\mathscr{B}$ e da una h-pla di punti scelti in B. Poiche ogni h-pla di punti di S determina un solo elemento B di $\mathscr{B}$ che la contiene, cioè una di tali coppie, il numero delle coppie suddette è $\binom{s}{h}$. D'altra parte ogni elemento di $\mathscr{B}$ determina $\binom{n}{h}$ di tali coppie e quindi il numero di tutte le coppie suddette è anche dato da $|\mathscr{B}|\binom{n}{h}$. Ne segue che è

$$|\mathscr{B}| = \binom{s}{h} \Big/ \binom{n}{h} . \tag{2.12}$$

Sia ora K un sottoinsieme di S, con $k = |K| < h$. Nell'insieme $S - K$ si consideri la famiglia di parti $\mathscr{B}_K = \{B - K \mid K \subset B \in \mathscr{B}\}$. Allora $(S - K, \mathscr{B}_K)$ risulta, come subito si prova, un sistema di Steiner $S(h - k, n - k, s - k)$ che prende il nome di *contrazione* di $(S, \mathscr{B})$ in K. Denotato con m_k *il numero degli elementi di* $\mathscr{B}$ *passanti per* K, cioè posto $m_k = |\mathscr{B}_K|$, dalla (2.12) relativa al sistema di Steiner $(S - K, \mathscr{B}_K)$ otteniamo

$$|\mathscr{B}_K| = \binom{s-k}{h-k} \Big/ \binom{n-k}{h-k} . \tag{2.13}$$

Ne segue che condizione necessaria affinchè esista un sistema di Steiner $S(h, n, s)$ è che le quantità a secondo membro della (2.13) siano degli interi per $k = 0, 1, \ldots, h-1$.

Volendo approfondire le nozioni esposte in questo numero si confronti per es. [**14**]$_5$. Lavori specifici in questo ambito sono [**10**], [**16**], [**13**], [**12**], [**6**], [**7**], [**8**]$_1$, [**9**]$_{1,2,3,4}$, [**17**]$_{1,2,3}$.

3. - Spazi di chiusura

Uno spazio geometrico $(S, \mathscr{C})$ dicesi *spazio di chiusura* se $\mathscr{C}$ risulta un *sistema di chiusura* per S, cioè se $\mathscr{C}$ soddisfa alla

$$\{C_i\}_{i\in\mathscr{I}}, \qquad C_i \in \mathscr{C} \Rightarrow \bigcap_{i\in\mathscr{I}} C_i \in \mathscr{C} . \tag{3.1}$$

Dalla (3.1) per $\mathscr{I} = \emptyset$ si ha poi

$$S \in \mathscr{C} . \tag{3.2}$$

Sono esempi di spazi di chiusura uno spazio topologico rispetto alla famiglia dei suoi chiusi, uno spazio vettoriale rispetto alla famiglia dei suoi sottospazi vettoriali, un gruppo rispetto ai suoi sottogruppi, un anello rispetto ai suoi ideali, uno spazio proiettivo $P_{r,\gamma}$ (γ corpo) rispetto ai suoi sottospazi.

Sia X un sottoinsieme di S. Denotiamo con $\overline{X}$ l'intersezione di tutti gli elementi di $\mathscr{C}$ ciascuno dei quali contenga X. Esso per la (3.1) è un elemento di $\mathscr{C}$ che prende il nome di *chiusura* di X. Rimane così determinata l'applicazione dell'insieme delle parti di S in sè che fa corrispondere ad ogni X ($\subseteq S$) la sua chiusura $\bar{X}$, che dicesi *operatore di chiusura* di $(S, \mathscr{C})$. Esso gode delle seguenti proprietà (come subito si prova)

$$X \subseteq \bar{X}\,, \qquad \forall X \subseteq S\,, \tag{3.3}$$

$$X,\, Y \subseteq S\,, \quad X \subseteq \bar{Y} \Rightarrow \bar{X} \subseteq \bar{Y}\,. \tag{3.4}$$

Sia ora S un insieme non vuoto, chiamasi *operatore di chiusura* di S una applicazione dell'insieme delle parti, $P(S)$, di S in sè

$$- \; X \in P(S) \rightarrow \bar{X} \in P(S)\,, \tag{3.5}$$

soddisfacente alle (3.3), (3.4). Dalle (3.3) e (3.4) segue facilmente che

$$X \subseteq Y \Rightarrow \bar{X} \subseteq \bar{Y}\,, \qquad X,\, Y \subseteq S\,, \tag{3.6}$$

$$\bar{X} = \bar{\bar{X}}\,, \qquad \forall X \subseteq S\,, \tag{3.7}$$

$$S = \bar{S}\,, \tag{3.8}$$

$$\{X_i\}_{i \in \mathscr{I}}\,, \qquad X_i \subseteq S \;\Rightarrow \overline{\bigcap_{i \in \mathscr{I}} X_i} \subseteq \bigcap_{i \in \mathscr{I}} \bar{X}_i\,, \tag{3.9}$$

$$\{X_i\}_{i \in \mathscr{I}}\,, \qquad X_i \subseteq S \;\Rightarrow \overline{\bigcup_{i \in \mathscr{I}} X_i} \supseteq \bigcup_{i \in \mathscr{I}} \bar{X}_i\,. \tag{3.10}$$

L'operatore (3.5) determina in S la famiglia di parti $\mathscr{C} = \{C \subseteq S \mid C = \bar{C}\}$. Si prova subito, in forza delle (3.3) e (3.9), che la famiglia $\mathscr{C}$ è un sistema di chiusura di S, il cui operatore di chiusura coincide con l'operatore dato. Viceversa si prova facilmente che dato un sistema di chiusura $\mathscr{C}$ in S e considerato l'operatore di chiusura ad esso associato (cfr. capoverso precedente), il sistema di chiusura relativo a tale operatore di chiusura coincide con $\mathscr{C}$. Ne segue che le due nozioni di operatore di chiusura e di sistema di chiusura in S sono equivalenti.

Sia K un sottoinsieme ($\neq \emptyset$) di uno spazio di chiusura $(S, \mathscr{C})$. La famiglia di parti di K ottenuta intersecando K con gli elementi di $\mathscr{C}$ costituisce manifestamente un sistema di chiusura $\mathscr{C}_K$ di K, da dirsi indotto in K da $(S, \mathscr{C})$, cosicchè $(K, \mathscr{C}_K)$ è uno spazio di chiusura. Evidentemente se X è un sottoinsieme di K, denotato con $\bar{X}^K$ la chiusura di X in $(K, \mathscr{C}_K)$, risulta

$$\bar{X}^K = \bar{X} \cap K\,. \tag{3.11}$$

Se $K = C \in \mathscr{C}$, il sistema di chiusura indotto in C coincide con la famiglia di elementi di $\mathscr{C}$ contenuti in C e l'operatore di chiusura in $(C, \mathscr{C}_C)$ risulta la restrizione dell'operatore di chiusura di $(S, \mathscr{C})$ a C.

Diremo che in uno spazio di chiusura $(S, \mathscr{C})$ vale l'*assioma di scambio* se è verificata la seguente proprietà (cfr. [**21**], [**4**])

$$(3.12) \qquad \forall x, y \in S\,, \quad \forall X \subseteq S \,|\, x \notin \overline{X}\,, \quad x \in \overline{y \cup X} \Rightarrow y \in \overline{x \cup X}\,.$$

Se in $(S, \mathscr{C})$ vale l'assioma di scambio, per ogni K $(\neq \emptyset)$ sottoinsieme di S si ha evidentemente che in $(K, \mathscr{C}_K)$ vale l'assioma di scambio.

Esempi di spazi di chiusura in cui vale l'assioma di scambio sono i seguenti: ogni spazio vettoriale rispetto ai suoi sottospazi, ogni spazio proiettivo rispetto ai suoi spazi subordinati, ogni sottoinsieme K $(\neq \emptyset)$ di uno spazio vettoriale o di uno spazio proiettivo rispetto alle intersezioni di K con i sottospazi dello spazio vettoriale o con gli spazi subordinati dello spazio proiettivo. Uno spazio topologico $(S, \mathscr{C})$ soddisfa l'assioma di scambio se, e soltanto se, si ha: $x \in \overline{\{y\}} \Leftrightarrow y \in \overline{\{x\}}$, in particolare se $(S, \mathscr{C})$ è T_1-separato. Un esempio di spazio di chiusura che *non* soddisfa all'assioma dello scambio è dato dall'anello K^n, prodotto di un campo K n volte per se stesso, con $n > 2$, rispetto alla famiglia dei suoi ideali.

Osserviamo che, qualsiasi sia lo spazio di chiusura $(S, \mathscr{C})$, si ha

$$(3.13) \qquad \forall y \in S\,, \quad \forall X \subseteq S \Rightarrow \overline{y \cup X} = \overline{y \cup \overline{X}}\,;$$

infatti risulta

$$\forall y \in S\,, \quad \forall X \subseteq S \Rightarrow \overline{y \cup X} \subseteq \overline{y \cup \overline{X}}\,,$$

$$y \cup \overline{X} \subseteq y \cup (\overline{y \cup X}) = \overline{y \cup X} \Rightarrow \overline{y \cup \overline{X}} \subseteq \overline{y \cup X}\,,$$

$$\overline{y \cup \overline{X}} \subseteq \overline{\overline{y \cup X}} = \overline{y \cup X} \Rightarrow \overline{y \cup X} = \overline{y \cup \overline{X}}\,,$$

onde la (3.13).

Dalla (3.13) segue subito che, se in $(S, \mathscr{C})$ vale la seguente proprietà

$$(3.14) \qquad \forall x, y \in S\,, \quad \forall C \in \mathscr{C} \,|\, x \notin C\,, \quad x \in \overline{y \cup C} \Rightarrow y \in \overline{x \cup C}\,;$$

allora $(S, \mathscr{C})$ soddisfa l'assioma dello scambio (3.12). Viceversa, se vale la (3.12), evidentemente vale anche la (3.14). Ne segue che la (3.12) equivale alla (3.14), cioè l'assioma di scambio si può anche enunciare nella forma (3.14).

4. - Spazi combinatori

Uno spazio di chiusura $(S, \mathscr{C})$ prende il nome di *spazio combinatorio* (cfr. G. C. Rota [4]) se S è *finito*, vale *l'assioma di scambio* (3.12), ovvero (3.14), ed inoltre risulta

$$\emptyset \in \mathscr{C}\,; \qquad \forall x \in S,\ \{x\} \in \mathscr{C}\,. \tag{4.1}$$

Se K è un sottoinsieme non vuoto di uno spazio combinatorio $(S, \mathscr{C})$, denotato con $\mathscr{C}_K$ la famiglia di parti di K costituita dalle intersezioni di K con tutti gli elementi di $\mathscr{C}$, si ha che $(K, \mathscr{C}_K)$ è ancora uno spazio combinatorio, da dirsi *immerso* in $(S, \mathscr{C})$. Se $K \in \mathscr{C}$ allora $(K, \mathscr{C}_K)$ prende il nome di *sottospazio* dello spazio combinatorio $(S, \mathscr{C})$ e sarà denotato semplicemente con K. Il $\emptyset$ si dirà sottospazio vuoto di $(S, \mathscr{C})$. Per un qualsiasi sottoinsieme X di S, risulta $\overline{X} \in \mathscr{C}$. Il sottospazio $\overline{X}$ si dirà allora *sottospazio generato* da X in $(S, \mathscr{C})$.

Un qualsiasi sottoinsieme finito e non vuoto S di uno spazio proiettivo P_r, rispetto alla famiglia di parti di S intersezioni di S con gli spazi subordinati di P_r, è uno spazio combinatorio, da dirsi *immerso* in P_r, in particolare un qualsiasi k-insieme di uno spazio di Galois $P_{r,q}$. Diremo poi che uno spazio combinatorio $(S, \mathscr{C})$ è *immergibile* in uno spazio proiettivo P_r se $(S, \mathscr{C})$ è isomorfo ad uno spazio combinatorio immerso in P_r.

Sia $(S, \mathscr{C})$ uno spazio combinatorio. Un sottoinsieme X di $(S, \mathscr{C})$ si dice che è costituito da punti *indipendenti* quando ogni suo punto *non* appartiene alla chiusura dei rimanenti, cioè

$$x \in X \Rightarrow x \notin \overline{(X - \{x\})}\,. \tag{4.2}$$

In caso contrario, cioè se

$$\exists x \in X \,|\, x \in \overline{(X - \{x\})}\,, \tag{4.3}$$

si dice che X è costituito da punti *dipendenti*. Diremo poi che una n-pla di punti di $(S, \mathscr{C})$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, è costituita da punti indipendenti se i punti della n-pla sono tutti distinti e l'insieme $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ è indipendente, in caso contrario diremo che la n-pla è costituita da punti dipendenti.

Si prova subito che ogni sovrainsieme di un insieme di punti dipendenti è dipendente. Ogni sottoinsieme di un insieme di punti indipendenti è indipendente. Un insieme ridotto ad un sol punto è indipendente. Una coppia di punti è indipendente se, e soltanto se, i suoi punti sono distinti. Se una n-pla di punti contiene punti ripetuti essa è dipendente.

In forza all'assioma dello scambio (3.12) si prova che:

I. *Sia* X *un sottoinsieme di* $(S, \mathscr{C})$ *indipendente ed* $x \in S$. *Se* $X \cup \{x\}$ *è dipendente allora* $x \in \bar{X}$.

II. *Siano* $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ *ed* Y *sottoinsiemi disgiunti di* $(S, \mathscr{C})$. *Se* $X \cup Y$ *è indipendente, posto* $C_i = \overline{(X - \{x_i\}) \cup Y}$, *risulta* $\bigcap_{i=1}^{m} C_i = \bar{Y}$.

Dalle proposizioni I e II e dalla (3.12) si desume il seguente *teorema dello scambio.*

III. *Sia* X *un insieme di* n *punti indipendenti di* $(S, \mathscr{C})$. *Scelti comunque in* $\bar{X}$ *un insieme* Y *di* m *punti indipendenti con* $m \leqslant n$, *è sempre possibile determinare un sottoinsieme* X' *di* m *punti di* X *in modo che l'insieme* $(X - X') \cup Y$ *sia costituito da* n *punti indipendenti e generi* $\bar{X}$.

Un sottoinsieme B di S prende il nome di *base* di $(S, \mathscr{C})$ se B *genera* $(S, \mathscr{C})$, cioè $\bar{B} = S$, ed è costituito da punti *indipendenti.* Si prova subito che $(S, \mathscr{C})$ ammette sempre una base, anzi *scelto comunque un sottoinsieme indipendente* X *di* S *esiste sempre una base contenente* X *in* $(S, \mathscr{C})$ (si tenga conto che S è finito).

Come conseguenza del teorema dello scambio III si prova che *due qualsiasi basi di* $(S, \mathscr{C})$ *hanno lo stesso numero di elementi.* Dunque, se B è una base di $(S, \mathscr{C})$, l'intero $|B|-1$ dipende solamente da $(S, \mathscr{C})$. Ebbene tale intero $|B|-1$ definiscesi *dimensione* di $(S, \mathscr{C})$. Se $C \in \mathscr{C} - \{\emptyset\}$, il sottospazio C, essendo uno spazio combinatorio, avrà una certa dimensione (data dal numero degli elementi di una base di C diminuito di 1) che denoteremo con $\dim . C$. Porremo poi $\dim . \emptyset = -1$. Evidentemente i singoli punti hanno dimensione zero. Chiameremo *rette* i sottospazi di $(S, \mathscr{C})$ di dimensione uno, cioè le chiusure delle coppie di punti distinti, onde per due punti distinti passa una sola retta. Chiameremo *piani* i sottospazi di $(S, \mathscr{C})$ di dimensione 2, cioè le chiusure delle terne di punti distinti non su una stessa retta.

Se $(S, \mathscr{C})$ ha dimensione r, si prova subito che, per ogni intero d con $-1 \leqslant d \leqslant r$, esiste qualche sottospazio di dimensione d ed inoltre che

$$\forall C, C' \in \mathscr{C}, \qquad C \subseteq C' \Rightarrow \dim . C \leqslant \dim . C', \tag{4.4}$$

$$\forall C, C' \in \mathscr{C}, \qquad C \subseteq C', \quad \dim . C = \dim . C' \Rightarrow C = C'. \tag{4.5}$$

Siano C, C' due sottospazi di $(S, \mathscr{C})$, allora $C \cap C'$ e $\overline{C \cup C'}$, appartenendo a $\mathscr{C}$, sono sottospazi di $(S, \mathscr{C})$; essi diconsi rispettivamente sottospazio *intersezione* e sottospazio *congiungente* di C e C'. Si prova facilmente la seguente *relazione di Grassmann* tra le dimensioni di C, C', $C \cap C'$ e $\overline{C \cup C'}$

$$\dim. C + \dim. C' \geqslant \dim. C \cap C' + \dim. \overline{C \cup C'}. \tag{4.6}$$

Si noti che se nella (4.6) vale sempre il segno di uguaglianza allora $(S, \mathscr{C})$ risulta uno spazio grafico finito.

Sussiste la seguente caratterizzazione degli spazi combinatori, di facile dimostrazione.

IV. *Sia $(S, \mathscr{C})$ uno spazio di chiusura finito soddisfacente alla* (4.1). *Esso è combinatorio se, e solamente se, per ogni C di $\mathscr{C}$ e per ogni $x \in S - C$, si ha che $\overline{x \cup C}$ copre C (cioè non esiste nessun elemento di $\mathscr{C}$ contenente propriamente C e contenuto propriamente in $\overline{x \cup C}$).*

La proposizione IV permette di dare una diversa definizione di spazio combinatorio. Un'altra è la seguente (come è facile provare). Sia $(S, \mathscr{C})$ uno spazio di chiusura finito soddisfacente alla (4.1). Se esiste una surgezione $\delta: \mathscr{C} \to \{-1, 0, 1, 2, \ldots, r\}$ tale che

$$\delta(C) = -1 \Leftrightarrow C = \emptyset; \quad \delta(C) = 0 \Leftrightarrow C = \{x\},\ x \in S; \quad \delta(C) = r \Leftrightarrow C = S\ ; \tag{4.7}$$

$$C \subseteq C' \Rightarrow \delta(C) \leqslant \delta(C'); \qquad C \subseteq C',\ \ \delta(C) = \delta(C') \Leftrightarrow C = C'; \tag{4.8}$$

$$\delta(C) + \delta(C') \geqslant \delta(C \cap C') + \delta(\overline{C \cup C'}); \tag{4.9}$$

allora $(S, \mathscr{C})$ è uno spazio combinatorio di dimensione r. Viceversa, dato uno spazio combinatorio $(S, \mathscr{C})$ di dimensione r, la surgezione δ di $\mathscr{C}$ in $\{-1, 0, 1, 2, \ldots, r\}$ che fa corrispondere ad ogni $C \in \mathscr{C}$ la sua dimensione $\delta(C)$ soddisfa alle (4.7), (4.8), (4.9).

Sia S un insieme finito non vuoto e sia $\mathscr{G}$ la famiglia delle strutture combinatorie di S. Se $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ sono elementi di $\mathscr{G}$, diremo che $\mathscr{C}'$ è *più fine* di $\mathscr{C}$ se ogni elemento di $\mathscr{C}$ è anche elemento di $\mathscr{C}'$, cioè se $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{C}'$. Rispetto a tale relazione, $\mathscr{G}$ risulta ordinato. La struttura combinatorio più fine in S è quella *discreta*, la meno fine è quella in cui i chiusi sono solamente $\emptyset$, i singleton, S. Proviamo che

$$\mathscr{C}, \mathscr{C}' \in \mathscr{G}\ , \qquad \mathscr{C} \subseteq \mathscr{C}' \Rightarrow \dim. \mathscr{C} \leqslant \dim. \mathscr{C}', \tag{4.10}$$

$$\mathscr{C}, \mathscr{C}' \in \mathscr{G}\ , \qquad \mathscr{C} \subseteq \mathscr{C}',\ \ \dim. \mathscr{C} = \dim. \mathscr{C}' \Leftrightarrow \mathscr{C} = \mathscr{C}'. \tag{4.11}$$

Sia $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{C}'$; per ogni $X \subseteq S$, la chiusura $\overline{X}^{\mathscr{C}}$ di X in $\mathscr{C}$ contiene la chiusura $\overline{X}^{\mathscr{C}'}$ di X in $\mathscr{C}'$, onde se X è indipendente in $\mathscr{C}$ esso è indipendente in $\mathscr{C}'$. Porremo

$r = \dim.\mathscr{C}$ e $r' = \dim.\mathscr{C}'$. Scelti comunque $r'+2$ punti di S, essi sono dipendenti in $\mathscr{C}'$ (perchè $r'+1$ è il massimo numero di punti indipendenti di $(S, \mathscr{C}')$) e quindi sono dipendenti anche in $\mathscr{C}$; ne segue che il massimo numero di punti indipendenti di $(S, \mathscr{C})$ è $r'+1$, onde $r \leqslant r'$, si ha così la (4.10). Per provare la (4.11) basta mostrare che, se è $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{C}'$ e $r = r'$, ogni elemento di $\mathscr{C}'$ è anche elemento di $\mathscr{C}$. Proviamo intanto che ogni $C' \in \mathscr{C}'$ con $\dim._{\mathscr{C}'} C' = r' - 1 = r - 1$ è un elemento di $\mathscr{C}$ di dimensione $r-1$: ne seguirà che $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ hanno gli stessi elementi di dimensione $r-1$ (in quanto evidentemente un elemento di $\mathscr{C}$ di dimensione $r-1$ è un elemento di $\mathscr{C}'$ di dimensione $r-1$). Sia X un insieme di $r' = r$ punti indipendenti di C' in $(S, \mathscr{C}')$, sarà $\overline{X}^{\mathscr{C}'} = C'$. D'altra parte, per quanto detto precedentemente, risulta $\overline{X}^{\mathscr{C}} \supseteq \overline{X}^{\mathscr{C}'} = C'$, inoltre $\overline{X}^{\mathscr{C}} \in \mathscr{C} \subseteq \mathscr{C}'$ e quindi $\overline{X}^{\mathscr{C}} \in \mathscr{C}'$. Poichè $C' = \overline{X}^{\mathscr{C}'}$ è coperto da S in $(S, \mathscr{C}')$ (perchè $\dim._{\mathscr{C}'} C' = r' - 1$) e $\overline{X}^{\mathscr{C}} \supseteq C'$ ed inoltre $\overline{X}^{\mathscr{C}} \in \mathscr{C}'$, sarà $\overline{X}^{\mathscr{C}} = S$ ovvero $\overline{X}^{\mathscr{C}} = C'$, ma $\overline{X}^{\mathscr{C}} \neq S$ (in quanto $|X| = r$ e quindi $\dim._{\mathscr{C}} \overline{X}^{\mathscr{C}} \leqslant r-1$, mentre $\dim._{\mathscr{C}} S = r$), onde $\overline{X}^{\mathscr{C}} = C'$, da cui $C' \in \mathscr{C}$. D'altra parte $\overline{X}^{\mathscr{C}}$ ha dimensione $r-1$ in $(S, \mathscr{C})$, perchè se avesse dimensione minore, sarebbe contenuto propriamente in un elemento di $\mathscr{C}$ (e quindi di $\mathscr{C}'$) diverso da S, cioè C' sarebbe contenuto propriamente in un elemento di $\mathscr{C}'$ diverso da S e ciò è escluso. Da quanto ora provato, per induzione decrescente rispetto alla dimensione di $C' \in \mathscr{C}'$, segue l'asserto.

Sia $f\colon S \to S'$ un isomorfismo tra i due spazi combinatori $(S, \mathscr{C})$ ed $(S', \mathscr{C}')$. La f allora trasforma l'operatore di chiusura di $(S, \mathscr{C})$ nell'operatore di chiusura di $(S', \mathscr{C}')$ e quindi muta punti indipendenti in punti indipendenti e punti dipendenti in punti dipendenti, onde muta sottospazi di $(S, \mathscr{C})$ in sottospazi di $(S', \mathscr{C}')$ della stessa dimensione. Altrettanto accade per $f^{-1}\colon S \to S'$.

Sia $(S, \mathscr{C})_r$ uno spazio combinatorio di dimensione r. I sottospazi di data dimensione d di $(S, \mathscr{C})_r$, con $1 \leqslant d \leqslant r-1$, *non* hanno in generale lo stesso numero di punti. Siano σ_d e γ_d rispettivamente il minimo e il massimo numero di punti che essi possiedono. Gli interi σ_d e γ_d saranno detti *minimo* e *massimo grado* di dimensione d. Risulta

$$\sigma_d \geqslant d + 1 , \tag{4.12}$$

in quanto ogni sottospazio di dimensione d contiene $d+1$ punti indipendenti. Sia τ_s^d, con $\sigma_d \leqslant s \leqslant \gamma_d$, il *numero dei sottospazi distinti* di dimensione d che contengono s punti. Gli interi

$$\{\tau_s^d\}_{s=\sigma_d, \sigma_d+1, \ldots, \gamma_d} \tag{4.13}$$

si chiamano *caratteri* di dimensione d di $(S, \mathscr{C})_r$. Diremo che $(S, \mathscr{C})_r$ è *ad ℓ caratteri nella dimensione d* se esattamente ℓ dei caratteri τ_s^d sono diversi da zero.

Se $(S, \mathscr{C})_r$ ha almeno due caratteri, nella dimensione d, diversi da zero, cioè se è $\sigma_d < \gamma_d$, siano $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$ $(\ell \geqslant 2)$ interi tali che

$$m_1 = \sigma_d < m_2 < \ldots < m \ \ = \gamma_d; \tag{4.14}$$

diremo che $(S, \mathscr{C})_r$ è di *classe* $[m_1, m_2, \ldots, m_\ell]_d$ se è $\tau_s^d = 0$ per ogni s diverso da $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$. Se $(S, \mathscr{C})_r$ è di classe $[m_1, m_2, \ldots, m_\ell]_d$ ed inoltre è $\tau_m^d \neq 0$ per ogni $m = m_1, m_2, \ldots, m_\ell$ diremo che $(S, \mathscr{C})_r$ è di *tipo* $(m_1, m_2, \ldots, m_\ell)_d$.

Qualsiasi sia lo spazio combinatorio $(S, \mathscr{C})_r$ sussiste la seguente relazione

$$\sigma_d \geqslant (\sigma_1 - 1)\,\sigma_{d-1} + 1; \tag{4.15}$$

infatti sia S_d un sottospazio di $(S, \mathscr{C})_r$ di dimensione d, con $|S_d| = \sigma_d$, e sia S_{d-1} un sottospazio di dimensione $d-1$ contenuto in S_d ed A un punto di $S_d - S_{d-1}$; le rette per A ed incidenti l'S_{d-1} (e quindi contenute in S_d) sono in numero di $|S_{d-1}|$; ciascuna di tali rette ha almeno $\sigma_1 - 1$ punti diversi da A; quindi è: $\sigma_d = |S_d| \geqslant (\sigma_1 - 1)\,|S_{d-1}| + 1$, essendo $|S_{d-1}| \geqslant \sigma_{d-1}$, si ha la (4.15). Posto

$$\sigma_1 = q + 1\,, \tag{4.16}$$

dalla (4.15) per induzione si ha

$$\sigma_d \geqslant q^d + q^{d-1} + \ldots + q + 1\,. \tag{4.17}$$

Tra i caratteri di dimensione due di $(S, \mathscr{C})_r$ sussiste la seguente relazione

$$\sum_{s=\sigma_2}^{\gamma_2} s(s-1)\,\tau_s^2 = |S|\,(|S| - 1); \tag{4.18}$$

computando infatti nei due modi possibili il numero delle coppie ciascuna costituita da una coppia di punti di S e dalla retta per essa, si giunge appunto alla (4.18).

Chiameremo *calotta combinatoria* uno spazio combinatorio costituito da punti a tre a tre indipendenti, cioè tale che ogni retta abbia esattamente due punti. Una calotta combinatoria $(S, \mathscr{C})_r$ si dirà di *specie* h $(2 \leqslant h \leqslant r-1)$ se i suoi punti sono ad $h+1$ ad $h+1$ indipendenti ed esistono $h+2$ punti dipendenti, cioè se ogni sottospazio di $(S, \mathscr{C})_r$ di dimensione $h-1$ ha h punti, mentre esiste qualche sottospazio di dimensione h avente almeno $h+2$ punti.

Tra i caratteri di dimensione $h+1$ di una calotta combinatoria di specie h, sussiste la seguente relazione

$$(4.19)\qquad \sum_{s=\sigma_{h+1}}^{\gamma_{h+1}} \binom{s}{h+1} \tau_s^{h+1} = \binom{|S|}{h+1},$$

che si ottiene computando nei due modi possibili il numero delle coppie ciascuna costituita da una $(h+1)$-pla di punti di S e dal sottospazio di rango h per esso.

5. - Spazi di rette e spazi combinatori

Sia $(S, \mathscr{R})$ uno spazio di rette (cfr. n. **2**). Se $x, y \in S$, con $x \neq y$, denoteremo con $r(x, y)$ la retta per x ed y. Si consideri la famiglia (propria) $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ di parti di S definita nel modo seguente

$$(5.1)\qquad C \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}} \Leftrightarrow [\forall x, y \in C \mid x \neq y \Rightarrow r(x, y) \subseteq C] .$$

Essa contiene come elementi $\emptyset$, ogni punto di S e tutti gli elementi di $\mathscr{R}$, inoltre $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ è evidentemente un sistema di chiusura per S. Dunque ogni spazio di rette $(S, \mathscr{R})$ determina, nel modo anzidetto, lo spazio di chiusura $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$. Se S è finito (ciò che supporremo nel seguito) può accadere che $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ sia uno spazio combinatorio, cioè che $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ soddisfi alla (3.12) ovvero alla (3.14), oppure no. Nel primo caso diremo che $(S, \mathscr{R})$ è uno *spazio di rette combinatorio*. Nel seguito daremo esempi di spazi di rette combinatori e non combinatori. Proviamo che

I. *Il gruppo degli automorfismi di* $(S, \mathscr{R})$ *coincide con il gruppo degli automorfismi di* $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ *e quindi la geometria di* $(S, \mathscr{R})$ *coincide con quella di* $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$.

Dimostrazione. Evidentemente ogni automorfismo di $(S, \mathscr{R})$ muta ogni elemento di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ in un elemento di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ e quindi è un automorfismo di $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$, onde $\mathrm{Aut}(S, \mathscr{R}) \subseteq \mathrm{Aut}(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$. Proviamo che se $f: S \to S$ è un automorfismo di $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ esso muta rette in rette e quindi è un automorfismo di $(S, \mathscr{R})$. Ne seguirà l'asserto. Sia $r \in \mathscr{R}$, allora $f(r) \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}}$. Siano $x, y \in r$, con $x \neq y$, onde $f(x)$, $f(y)$ sono punti distinti di $f(r)$ e quindi la retta r' per $f(x)$ ed $f(y)$ appartiene ad $f(r)$ (perchè $f(r) \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}}$), cioè

$$(5.2)\qquad r' \subseteq f(r) .$$

D'altra parte $f^{-1}(r') \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ ed $x, y \in f^{-1}(r')$, onde r (retta congiungente x ed y) appartiene ad $f^{-1}(r')$, cioè

$$r \subseteq f^{-1}(r') . \tag{5.3}$$

Da (5.2) e (5.3) si ha $r' = f(r) \in \mathscr{R}$. Ne segue l'asserto.

Sia X un sottoinsieme dello spazio di rette $(S, \mathscr{R})$, con $|X| \geqslant 2$. Denoteremo con X^1 l'unione di tutte le rette congiungenti due qualsiasi punti di X, cioè porremo

$$X^1 = \bigcup_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} r(x, y) . \tag{5.4}$$

L'insieme X^1 sarà detto *primo reticolato* di X. Porremo poi $X^2 = (X^1)^1$, $X^3 = (X^2)^1, \ldots, X^h = (X^{h-1})^1, \ldots$. L'insieme X^h sarà detto l'*h-esimo reticolato* di X. Denotata con $\overline{X}$ la chiusura di X rispetto al sistema di chiusura $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ ed osservato che, evidentemente, $X^h \subseteq X^{h+1}$ e che ogni elemento C di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ che contiene X, contiene X^1 e quindi X^2, ecc., si ha che

$$X \subseteq X^h \subseteq X^{h+1} \subseteq \overline{X} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots) . \tag{5.5}$$

Dalla (5.5) si ha

$$\overline{X} = \overline{X^h} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots) . \tag{5.6}$$

Posto $X^0 = X$, relativamente alla successione $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \ldots \subseteq X^h \subseteq \ldots$, deve necessariamente esistere un intero n tale che $X^n = X^{n+1}$ (supponendosi $(S, \mathscr{R})$ finito). Se $X^n = X^{n+1}$ le rette congiungenti a due a due i punti di X^n appartengono ad X^n $(= X^{n+1})$, onde è $X^n \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ e quindi $X^n = \overline{X^n}$, dalla (5.6) si ha allora $\overline{X} = X^n$. Dunque, qualsiasi sia $X \subseteq S$, con $|X| \geqslant 2$, la chiusura $\overline{X}$ di X, rispetto a $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ coincide per un opportuno n con X^n (ed allora si ha $\overline{X} = X^n = X^{n+1} = X^{n+2} = \ldots$). Sia m il più piccolo intero per cui si abbia $\overline{X} = X^m$, esso sarà detto *indice* di X in $(S, \mathscr{R})$. Evidentemente i sottoinsiemi X di S di indice zero sono tutti e soli gli elementi di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$.

Diremo che lo spazio di rette $(S, \mathscr{R})$ è di *specie* s se accade che

(5.7) $\qquad \forall x \in S, \quad \forall C \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}} - \{\emptyset\}, \qquad \text{indice}(x \cup C) \leqslant s ,$
il segno d'uguaglianza essendo effettivamente raggiunto.

Lo studio degli spazi di rette può effettuarsi, in ordine di difficoltà crescente, rispetto alla sua specie. Proviamo che

II. *Uno spazio di rette* $(S, \mathscr{R})$ *è di specie zero se, e soltanto se,* $\mathscr{R}$ *è costituita da tutte le coppie di punti di* S.

Dimostrazione. Se $\mathscr{R}$ è costituito da tutte le coppie di punti di S, $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ consta di tutte le parti di S, onde vale la (5.7) per $s = 0$. Viceversa se vale la (5.7) con $s = 0$, per ogni coppia di punti distinti x, y di S, per la (5.7) con $s = 0$ ove si ponga $C = \{y\}$, si ha che l'indice di $\{x, y\}$ è zero, cioè $\overline{\{x, y\}} = \{x, y\}$, onde la retta per x, y coincide con $\{x, y\}$. Si ha così l'asserto.

III. *Uno spazio di rette* $(S, \mathscr{R})$ *è di specie uno se, e soltanto se,* $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ *è uno spazio proiettivo, avente qualche retta con almeno tre punti.*

Dimostrazione. Se $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ è uno spazio proiettivo è evidentemente verificata la (5.7) con $s = 1$, se tale spazio contiene una retta con almeno tre punti. Viceversa, se $(S, \mathscr{R})$ è di specie uno, proviamo che $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ è uno spazio proiettivo, il quale dovrà necessariamente contenere qualche retta con almeno tre punti, altrimenti, per la proposizione *II*, $(S, \mathscr{R})$ sarebbe di specie zero. Per provare che $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ è uno spazio proiettivo basta provare che $(S, \mathscr{R})$ soddisfa l'assioma di Veblen affermante che *date due rette sghembe ed un punto fuori di esse, per il punto passa al più una retta incidente le rette date*, ovvero, in forma equivalente, *due rette distinte qualsiasi aventi un punto in comune sono tali che le rette congiungenti due punti distinti presi l'uno sull'una e l'altro sull'altra s'incontrano a due a due in un punto* (cfr. [**14**]$_2$).

Siano dunque a, b due rette distinte aventi un punto x in comune, siano poi y, u due punti di a distinti tra loro e da x e z, v due punti di b distinti tra loro e da x, si tratta di provare che la retta r per y e z e la retta t per u e v sono incidenti. Si ha $v \notin r$, inoltre, essendo $(S, \mathscr{R})$ di specie uno, risulta $\overline{(v \cup r)} = (v \cup r)^1$, cioè $\overline{(v \cup r)}$ coincide con l'unione delle rette che da v proiettano i punti di r e quindi *per ogni punto* $w \in \overline{(v \cup r)} - \{v\}$ *la retta per* v *e* w *incide* r. D'altra parte la retta b è contenuta in $\overline{(v \cup r)}$ (perchè $v, z \in \overline{(v \cup r)}$, essendo $z \in r$), onde $x \in \overline{(v \cup r)}$ (essendo $x \in b$), quindi $x \cup r \subseteq \overline{(v \cup r)}$ da cui $\overline{(x \cup r)} \subseteq \overline{(v \cup r)}$. Poichè ad $\overline{(x \cup r)}$ appartiene la retta a e quindi il punto u, sarà $u \in \overline{(v \cup r)}$, quindi la retta per v e u, cioè la retta t, incide r. Si ha così l'asserto.

Nella dimostrazione della proposizione precedente la (5.7) con $s = 1$ si è sfruttata solamente per gli elementi C di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ che coincidono con le rette. Ne segue che

IV. *Uno spazio di rette* $(S, \mathscr{R})$ *è di specie uno, cioè* (cfr. prop. III) $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ *è uno spazio proiettivo avente qualche retta con almeno tre punti, se, e soltanto* *se, si ha*

$$(5.8) \qquad \forall x \in S, \quad \forall r \in \mathscr{R}, \qquad \text{indice}(x \cup r) \leqslant 1,$$

il segno d'uguaglianza essendo effettivamente raggiunto.

Proviamo che

V. *Sia* $(S, \mathscr{R})$ *uno spazio di rette di specie due. Lo spazio di chiusura* $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ *è combinatorio se, e soltanto se, risulta*

$$(5.9) \qquad \forall r \in \mathscr{R}, \quad \forall x, y \in S \,|\, x \notin r, \quad x \in \overline{(y \cup r)} \Rightarrow y \in \overline{(x \cup r)}.$$

Dimostrazione. Se $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ è combinatorio, in forza della (3.14), (essendo $r \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}}$) si ha la (5.9). Viceversa supponiamo che valga la (5.9) e proviamo la (3.14) per $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$, cioè che $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ è uno spazio combinatorio.

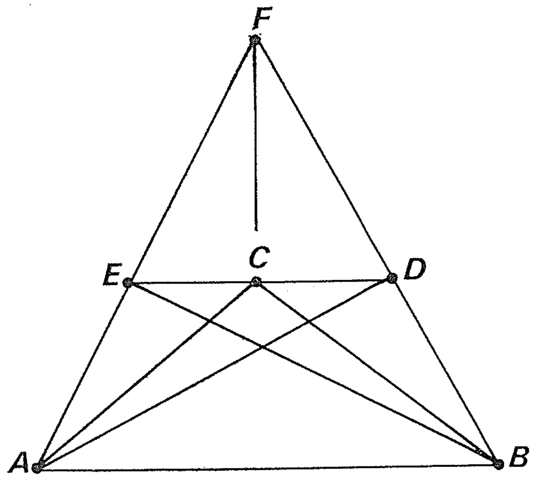
Dati comunque $C \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ e $x, y \in S$ in modo tale che $x \notin C$ e $x \in \overline{(y \cup C)}$, si tratta di mostrare che risulta $y \in \overline{(x \cup C)}$. Ciò è senz'altro vero se $x = y$ oppure se la retta per x, y incide C. Possiamo dunque supporre che sia $x \neq y$ e che la retta per x, y non incontri C. Poichè $(S, \mathscr{R})$ è di specie due, si ha $(y \cup C)^2 = \overline{(y \cup C)}$ e quindi, poichè $x \in \overline{(y \cup C)}$, si ha $x \in (y \cup C)^2$, esistono allora due punti distinti x_1, x_2 tali che il punto x appartenga alla retta $r(x_1, x_2)$ e le rette $r(y, x_1)$ ed $r(y, x_2)$ incontrino C in punti distinti z_1 e z_2. Sia $r = r(z_1, z_2)$, si ha che $\overline{y \cup r}$ contiene le rette $r(y, z_1) = r(y, x_1)$ ed $r(y, z_2) = r(y, x_2)$ e quindi la retta $r(x_1, x_2)$, onde $x \in \overline{y \cup r}$, ma $x \notin r$, quindi per la (5.9) si ha che $y \in \overline{x \cup r}$; ma $x \cup r \subseteq x \cup C$, dunque $y \in \overline{x \cup r} \subseteq \overline{x \cup C}$. Ne segue l'asserto.

Un esempio di spazio di rette equipotenti combinatorio di specie due è evidentemente dato da $(A_{r,q}, \mathscr{R})$, ove $A_{r,q}$ è il sostegno di uno spazio affine di dimensione r e d'ordine q ed $\mathscr{R}$ è la famiglia delle sue rette. Non è però l'unico esempio. Un altro è il seguente: in un piano proiettivo π_q, sia K un k-insieme di tipo $(0, 1, n)_1$ o di tipo $(1, n)_1$ con $n \geqslant (1+\sqrt{1+4q})/2$ (per esempio una curva hermitiana di un piano di Galois $S_{2,q}$) denotata con $\mathscr{R}$ la famiglia delle intersezioni con K delle n-secanti K, $(K, \mathscr{R})$ risulta uno spazio di rette equipotenti combinatorio di specie due e dimensione due, come sarà provato nel n. **6**. Si pone il problema di determinare tutti gli spazi di rette equipotenti combinatori di specie due.

Sia $(S, \mathscr{C})$ uno spazio combinatorio. Rimane allora determinata la famiglia $\mathscr{R}$ delle rette di $(S, \mathscr{C})$, cioè la famiglia dei sottospazi di dimensione uno di $(S, \mathscr{C})$, evidentemente $(S, \mathscr{R})$ è uno spazio di rette. Esso allora determina lo spazio di chiusura $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$. Risulta manifestamente $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{C}_{\mathscr{R}}$. Non è detto però che sia $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{\mathscr{R}}$. Quando ciò accade diremo che $(S, \mathscr{C})$ è *completo* rispetto alle rette. In generale lo spazio $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ sarà detto *completamento* di $(S, \mathscr{C})$ rispetto alle rette. Si noti che, come mostreremo su esempi, $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ può o meno essere combinatorio. Evidentemente se si parte da uno spazio di rette combinatorio $(S, \mathscr{R})$, lo spazio combinatorio ad esso associato $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ risulta completo, anzi a partire dagli spazi di rette combinatori si ottengono, in tal modo, tutti e soli gli spazi combinatori completi. Dunque lo studio degli spazi combinatori può effettuarsi, in ordine di difficoltà, studiando e caratterizzando prima gli spazi combinatori completi, cioè — per quanto su detto — gli spazi di rette combinatori, poi quelli che ammettono un completamento combinatorio, infine quelli con un completamento non combinatorio.

Ogni spazio proiettivo o affine finito è uno spazio combinatorio completo. Ogni k-calotta di uno spazio di Galois $S_{r,q}$, $k > r + 1$, rispetto alla struttura geometrica indotta dallo spazio, è uno spazio combinatorio non completo, il cui completamento è combinatorio, risultando la geometria discreta. Un altro esempio di spazio combinatorio non completo, il cui completamento sia combinatorio è il seguente: sia $(S, \mathscr{C})$ uno spazio combinatorio completo di dimensione r (per es. uno spazio di Galois $S_{r,q}$), fissato un intero d con $2 \leqslant d \leqslant r-1$, sia $\mathscr{C}_d$ la sottofamiglia di $\mathscr{C}$ costituita dai sottospazi di dimensione h con $d \leqslant h \leqslant r-1$; posto $\mathscr{C}' = \mathscr{C} - \mathscr{C}_d$, subito si prova che $(S, \mathscr{C}')$ è uno spazio combinatorio di dimensione d che non è completo, il cui completamento è $(S, \mathscr{C})$.

Diamo infine un esempio di spazio combinatorio il cui completamento non è combinatorio. Si consideri l'insieme S costituito dai punti A, B, C, D, E, F della figura seguente.



Poichè S è un sottoinsieme finito del piano, esso è uno spazio combinatorio rispetto alla struttura $\mathscr{C}$ indotta dal piano. Precisamente $\mathscr{C}$ è costituita da $\emptyset$, dai singoli punti di S, da S e dalle intersezioni con S delle rette del piano che hanno in comune con S almeno due punti. Dunque la famiglia $\mathcal{R}$ delle rette di tale spazio combinatorio $(S, \mathcal{C})$ è data da $\{A, E, F\}$, $\{B, D, F\}$, $\{E, C, D\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{A, B\}$, $\{B, E\}$, $\{B, C\}$, $\{C, F\}$. Attualmente $C_{\mathcal{R}}$ è costituita da tutti gli elementi di $\mathcal{C}$ e da $\{A, B, C\}$. Lo spazio di chiusura $(S, \mathcal{C}_{\mathcal{R}})$, completamento di $(S, \mathcal{C})$, non è combinatorio. Infatti, posto $X = \{A, B\}$, $x = C$, $y = F$, si ha $x \notin \overline{X} = X$, $x \in \overline{y \cup X} = S$; d'altra parte si ha $y \notin \overline{x \cup X} = \{A, B, C\}$. Dunque $(S, \mathcal{C})$ ha un completamento non combinatorio, inoltre $(S, \mathcal{R})$ dà un esempio di spazio di rette non combinatorio. Esso è il più semplice spazio di rette non combinatorio, in quanto è facile provare che ogni $(S, \mathcal{R})$ con $|S| \leqslant 5$ è sempre combinatorio, mentre per $|S| = 6$ l'unico non combinatorio è l'esempio precedente.

6. - Spazi $(S, \mathcal{R})$ di rette di cardinalità n con $|S| \leqslant n^3$

Sia $(S, \mathcal{R})$ uno spazio di rette equipotenti e sia n il numero dei punti di ciascuna sua retta ed m il numero delle rette per un punto. Supporremo $n \geqslant 3$. Risulta (cfr. n. **2**)

$$(6.1) \qquad |S| = m(n-1) + 1 , \qquad |\mathcal{R}| = m^2 - m(m-1)/n , \qquad 3 \leqslant n \leqslant m .$$

Ci proponiamo in questo numero di studiare tali spazi nell'ipotesi che sia $|S| \leqslant n^3$ e cioè $m \leqslant n^2 + n + 1$. Cominciamo a provare che

I. *Se è $m < n(n-1) + 1$, cioè $|S| < n^3 - 2n^2 + 2n$, lo spazio $(S, \mathcal{R})$ è di specie al più due e $(S, \mathcal{C}_{\mathcal{R}})$ è un piano combinatorio (cioè uno spazio combinatorio di dimensione due).*

Dimostrazione. Sia $r \in \mathcal{R}$ ed $y \in S - r$. Proviamo che per ogni $x \in S$, non appartenente a nessuna delle n rette che da y proiettano gli n punti di r, passa una retta incidente due delle n rette suddette in due punti distinti; ne seguirà che $(y \cup r)^2 = S = (\overline{y \cup r})$ e quindi che $(S, \mathcal{R})$ è di specie al più due e che $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ non contiene altri elementi diversi da $\emptyset$, i singleton, le rette, S, cioè che $(S, \mathcal{C}_{\mathcal{R}})$ è un piano combinatorio. Le rette congiungenti y con gli $n(n-1) + 1$ punti di $(y \cup r)^1$ non possono essere tutte distinte, altrimenti sarebbe $m \geqslant n(n-1) + 1$, onde l'asserto.

In un piano di Galois $S_{2,q}$, con q quadrato, sia H una curva hermitiana non singolare e sia $\mathcal{R}$ la famiglia delle intersezioni con H delle n-secanti di H. Allora $(H, \mathcal{R})$ è uno spazio di rette con $n = \sqrt{q} + 1$ ed $m = q$. Risulta $m = q < n(n-1)+1$, onde, per la proposizione I, $(H, \mathcal{R})$ *è di specie due* (non potendo essere di specie uno, altrimenti sarebbe un piano proiettivo) *inoltre* $(H, \mathcal{C}_{\mathcal{R}})$ *è un piano combinatorio*. Ne segue che la struttura combinatoria $\mathcal{G}$

indotta da $S_{2,q}$ in H coincide con $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$, cioè $(H, \mathscr{G})$ è completo. Più in generale si ha

II. *In un piano grafico* π_q *di ordine* q, *sia* K *un* k*-insieme di tipo* $(0, 1, n)_1$ *o* $(1, n)_1$ *ovvero di tipo* $(0, n)_1$, *con* $n \geqslant (1 + \sqrt{1+4q})/2$ *nei primi due casi, con* $n > (1 + \sqrt{1+4q})/2$ *nel terzo caso. Detta* $\mathscr{R}$ *la famiglia delle intersezioni con* K *delle* n*-secanti di* K *e* $\mathscr{G}$ *la struttura di spazio combinatorio indotta da* π_q *su* K, *si ha che* $(K, \mathscr{R})$ *risulta uno spazio di rette di specie al più due, inoltre* $(K, \mathscr{G})$ *è un piano combinatorio completo.*

Dimostrazione. Nei primi due casi, poichè K ammette almeno una 1-secante, sarà $m < q+1$, ma è $n \geqslant (1+\sqrt{1+4q})/2$, cioè $q+1 \leqslant n(n-1)+1$, onde è $m < n(n-1)+1$, nel terzo caso è $m \leqslant q+1$, ma è $n > (1+\sqrt{1+4q})/2$, onde ancora è $m < n(n-1)+1$; in ogni caso dalla proposizione I segue allora l'asserto.

Proviamo che

III. *Se è* $m < n^2$, *cioè* $|S| < n^3 - n^2 + 1$, $(S, \mathscr{R})$ *è di specie al più quattro, inoltre ogni elemento di* $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$, *diverso da quelli banali (cioè* $\emptyset$, *i singleton, le rette ed* S) *è un piano proiettivo. Ne segue che* $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ *è combinatorio se, e soltanto se, risulta uno spazio di Galois* $S_{3,n-1}$ *o un piano combinatorio.*

Dimostrazione. Sia $r \in \mathscr{R}$ ed $y \in S - r$. Se accade che $(y \cup r)^1 = \overline{(y \cup r)}$ (cioè se $\overline{(y \cup r)}$ coincide con l'unione delle rette che da y proiettano i punti di r), allora $\overline{(y \cup r)}$ è un piano proiettivo. Supponiamo dunque che sia $(y \cup r)^1 \neq \overline{(y \cup r)}$ e dimostriamo che è $\overline{(y \cup r)} = S$. Ragionando per assurdo supponiamo che esista un punto $x \in S - \overline{(y \cup r)}$, ogni retta per x deve allora incontrare $\overline{(y \cup r)}$ in al più un punto (perchè se l'incontrasse in due punti essa apparterrebbe a $\overline{(y \cup r)}$, onde $x \in \overline{(y \cup r)}$), ne segue che le rette per x sono almeno in numero di $|\overline{(y \cup r)}|$. D'altra parte, poichè è $(y \cup r)^1 \neq \overline{(y \cup r)}$, esiste un punto $z \in \overline{(y \cup r)} - (y \cup r)^1$; la retta yz appartiene quindi a $\overline{(y \cup r)}$, ma è distinta dalle n rette per y che proiettano gli n punti di r, onde le rette di $\overline{(y \cup r)}$ per y sono almeno $n+1$, quindi è $|\overline{(y \cup r)}| \geqslant (n+1)(n-1)+1 = n^2$. Se ne deduce che le rette per x sono almeno in numero di n^2, cioè che è $m \geqslant n^2$, il che è escluso; l'assurdo prova l'asserto. Sia ora C un elemento non banale di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$; si ha allora $C \neq S$, inoltre C contiene una retta r ed un punto $y \notin r$; risulta $\overline{(y \cup r)} \subseteq C$, non può allora essere $\overline{(y \cup r)} = S$ (altrimenti sarebbe $C = S$), dunque, per quanto precede, risulta $\overline{(y \cup r)} = (y \cup r)^1$, cioè $\overline{(y \cup r)}$ è un piano proiettivo; osserviamo ora che, se $\pi \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ è un piano proiettivo e $z \in S - \pi$ si ha $(z \cup \pi)^2 = S = \overline{(z \cup \pi)}$ (in quanto altrimenti esisterebbe un punto t di S per il quale le rette che da esso proiettano i punti di $(z \cup \pi)^1$ sono tutte distinte, e quindi si avrebbe

$m \geqslant (n(n-1)+1)(n-1)+1$, ma ciò è escluso, essendo $m < n^2$); ne segue che necessariamente è $\overline{(y \cup r)} = C$. Si è così provato che ogni elemento di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ non banale è un piano proiettivo. Per dimostrare che $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ è di specie al più quattro, basta solo provare (in forza dell'osservazione precedente) che per ogni retta $r \in \mathscr{R}$ e per ogni $y \in S - r$ risulta $(y \cup r)^4 = \overline{(y \cup r)}$. Se fosse $(y \cup r)^4 \neq \overline{(y \cup r)}$, esisterebbe uno $z \in \overline{(y \cup r)} - (y \cup r)^4$. D'altra parte esiste un $t \in (y \cup r)^2 - (y \cup r)^1$ (altrimenti $(y \cup r)^2 = (y \cup r)^1 = \overline{(y \cup r)}$), onde la retta ty appartiene ad $(y \cup r)^3$. Ogni retta per z non può incontrare $(y \cup r)^1 \cup (ty)$ in due punti distinti, altrimenti $z \in (y \cup r)^4$. Quindi le rette per z incontrano $(y \cup r)^1 \cup (ty)$ in un sol punto. Ne segue che le rette per z sono almeno in numero di $|(y \cup r)^1 \cup (ty)| = n(n-1) + 1 + (n-1) = n^2$, cioè $m \geqslant n^2$, ma ciò è escluso. Ne segue l'asserto.

IV. *Dato uno spazio $(S, \mathscr{R})$ di rette di cardinalità n, con $|S| \leqslant n^3$, cioè $m \leqslant n^2 + n + 1$, ogni elemento di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ non banale (cioè diverso da $\emptyset$, i singleton, le rette ed S) risulta necessariamente un piano affine o proiettivo se è $|S| \neq 27$; se è $|S| = 27$ (e cioè $n = 3$, $m = 13$) in $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ può esistere anche un 2-sistema di Steiner con 13 punti, nel qual caso esso è unico e tutti gli altri eventuali elementi non banali di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ sono piani proiettivi. Se $(S, \mathscr{R})$ è combinatorio, esso o è un piano combinatorio, o è uno spazio affine o proiettivo di dimensione tre.*

Dimostrazione. Sia $r \in \mathscr{R}$ e $y \in S - r$ e sia $\overline{(y \cup r)} \neq S$. Se $(y \cup r)^1 = \overline{(y \cup r)}$, allora $\overline{(y \cup r)}$ è un piano proiettivo. Supponiamo dunque che $(y \cup r)^1 \neq \overline{(y \cup r)}$. Le rette per y di $\overline{(y \cup r)}$ siano $m' = h + n$, con $h \geqslant 1$ (per quanto precede). Dovrà allora aversi $m'(m'-1) \equiv 0 \bmod n$ (in forza della (2.8) relativa allo spazio di rette di sostegno $\overline{(y \cup r)}$ e le cui rette sono quelle di $\mathscr{R}$ contenute in $\overline{(y \cup r)}$), cioè $h(h-1) \equiv 0 \bmod n$. Ne segue che se è $h > 1$ allora è $h \geqslant 3$. Dunque o è $h = 1$, ma allora $\overline{(y \cup r)}$ è un piano affine, ovvero è $h \geqslant 3$. In questa seconda ipotesi risulta $|\overline{(y \cup r)}| = (h + n)(n-1) + 1 \geqslant (3 + n)(n-1) + 1 = n^2 + 2n - 2$. Poichè $\overline{(y \cup r)} \neq S$, esiste un $x \in S - \overline{(y \cup r)}$; le rette per x che incontrano $\overline{(y \cup r)}$ (necessariamente in un sol punto) sono in numero di $|\overline{(y \cup r)}|$, quindi è $m \geqslant |\overline{(y \cup r)}| \geqslant n^2 + 2n - 2$. Ma è $m \leqslant n^2 + n + 1$, onde è $n^2 + n + 1 \geqslant m \geqslant n^2 + 2n - 2$, da cui si ha (supponendosi $n \geqslant 3$) $n = 3$ ed $m = 13 = |\overline{(y \cup r)}|$; risulta allora $|S| = 27$ e $\overline{(y \cup r)}$ un 2-sistema di Steiner con 13 punti. Si è così provato che $\overline{(y \cup r)}$ o è un piano proiettivo o è un piano affine oppure è $|S| = 27$ e $\overline{(y \cup r)}$ è un 2-sistema di Steiner con 13 punti.

Sia ora α un elemento di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ che risulti un piano affine o proiettivo se $n > 3$, oppure anche un 2-sistema di Steiner con 13 punti se $n = 3$. Sarà allora in ogni caso $|\alpha| \geqslant n^2 - n + 1$. Sia poi $y \in S - \alpha$, proviamo che $(y \cup \alpha)^2 = S$. Se così non fosse, esisterebbe un $x \in S - (y \cup \alpha)^2$. Le rette che da x proiettano i punti di $(y \cup \alpha)^1$ $(\subseteq (y \cup \alpha)^2)$ sarebbero allora tutte distinte ed in numero di $(n-1)|\alpha|+1 \geqslant (n-1)(n^2-n+1)+1 = n^3-2n^2+2n$ (essendo $|\alpha| \geqslant n^2-n+1$), onde sarebbe $n^2+n+1 \geqslant m \geqslant n^3-2n^2+2n$, da cui $3n^2+1 \geqslant n^3+n$ e quindi $3+1/n^2 \geqslant n+1/n$, onde $n<3$, tale assurdo prova appunto che $(y \cup \alpha)^2 = S$ e quindi che $(y \cup \alpha)^2 = \overline{(y \cup \alpha)} = S$. Da ciò e da quanto provato alla fine del capoverso precedente segue subito che ogni elemento non banale $C \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ risulta necessariamente un piano affine o proiettivo oppure è $|S|=27$ e C è un 2-sistema di Steiner con 13 punti.

Nell'ipotesi che sia $|S|=27$ e quindi $n=3$ ed $m=13$, supponiamo che $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ contenga un elemento α che risulti un 2-sistema di Steiner con 13 punti. Se $y \in S-\alpha$, per y passano esattamente $m=13$ rette; poichè i punti di α sono 13, si ha allora che tutte le rette per y incidono α. Ne segue che ogni retta di $(S, \mathscr{R})$ o sta in α ovvero incide α. Se ne deduce che ogni elemento β non banale di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$, diverso da α, incontra α in una retta (si noti che, in forza di quanto provato nel capoverso precedente, non può accadere che due elementi non banali di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ siano uno contenuto nell'altro). Se β contenesse una retta s non incidente la retta $r=\beta \cap \alpha$, esisterebbe una retta di $\mathscr{R}$ non incidente α, ma ciò è escluso. Ne segue che ogni retta di β incide $r=\beta \cap \alpha$ e quindi che β è un piano proiettivo (non esistendo rette di β parallele ad $r \subseteq \beta$). Se ne deduce che ogni elemento non banale di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$, diverso da α, è un piano proiettivo. Si è così provata la prima parte della proposizione.

Se $(S, \mathscr{R})$ è combinatorio, per quanto precede, esso o ha dimensione due, cioè è un piano combinatorio, ovvero ha dimensione tre. Se ha dimensione tre, $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ non può contenere (supposto $|S|=27$) un 2-sistema di Steiner con 13 punti: infatti, se così fosse, detta r una retta di tal sistema α, se h è il numero di piani di $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ per r diversi da α e quindi necessariamente proiettivi (dotati di 7 punti, essendo $n=3$), dovrà aversi $4h+13=|S|=27$, da cui $2h=7$ e ciò è assurdo. Se ne deduce che gli elementi non banali di $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ sono, in ogni caso, piani affini o piani proiettivi e quindi, in forza di [**19**], essi sono *tutti* piani affini o *tutti* piani proiettivi; allora, in forza di [**2**], se è $|S| \neq 27$, e direttamente se $|S|=27$, si ha che $(S, \mathscr{C}_{\mathscr{R}})$ è uno spazio affine o uno spazio proiettivo, si ha così completamente l'asserto.

7. - Spazi di rette d-immersi in uno spazio grafico S_t

Sia S_t uno spazio grafico di dimensione t e sia K un sottoinsieme finito di S_t, congiunto dall'S_t. Denotiamo con $\mathscr{R}$ la famiglia di parti di K ciascuna delle quali sia l'intersezione con K di un S_d $(1 \leqslant d \leqslant t-1)$ che abbia *più* di $d+1$ punti in comune con K, cioè, se indichiamo con $\mathscr{C}_d$ la famiglia dei sottospazi di dimensione d di S_t, si abbia

$$r \in \mathcal{R} \Leftrightarrow r = K \cap S_d\,, \qquad S_d \in \mathcal{C}_d\,, \qquad |r| \geqslant d+2\,. \tag{7.1}$$

Se $(K, \mathcal{R})$ è uno spazio di rette (cioè se per ogni coppia di punti distinti di K passa uno ed un solo S_d avente più di $d+1$ punti in comuni con K) diremo che esso è *uno spazio di rette d-immerso in* S_t o anche (con abuso di linguaggio) che K è *uno spazio di rette d-immerso in* S_t. Uno spazio di rette $(K', \mathcal{R}')$ dicesi poi *d-immergibile* in S_t se è isomorfo ad uno spazio di rette d-immerso in S_t. Cominciamo a provare che

I. *Se $d \geqslant 2$, uno spazio di rette K d-immerso in S_t risulta una calotta di specie d di S_t, cioè K è costituito da punti a $d+1$ a $d+1$ indipendenti e contiene $d+2$ punti dipendenti* (cfr. [**18**]$_3$).

Dimostrazione. Supponiamo che K contenga $d+1$ punti distinti dipendenti e sia S'_{d-1} un sottospazio di S_t di dimensione $d-1$ che contenga tali $d+1$ punti. Sia $P \in K - S'_{d-1}$ (certamente esistente perchè K è congiunto da S_t ed è $d-1<t$), consideriamo l'S_d congiungente P con S'_{d-1}. Esso ha in comune con K più di $d+1$ punti, quindi interseca K in un elemento r di $\mathcal{R}$. Scelto poi un punto Q di $K - S_d$ (certamente esistente perchè K è congiunto da S_t ed è $d<t$), l'S'_d congiungente S'_{d-1} con Q incontra K in più di $d+1$ punti, onde $S'_d \cap K = r' \in \mathcal{R}$; ora r ed r' hanno più di due punti distinti in comune (in quanto $|S'_{d-1} \cap K| \geqslant d+1 \geqslant 3$) e ciò è in contrasto con il fatto che $(K, \mathcal{R})$ è uno spazio di rette. L'assurdo prova che K è costituito da punti a $d+1$ a $d+1$ indipendenti. Inoltre dalla (7.1) si ha che per ogni r di $\mathcal{R}$ risulta $|r| \geqslant d+2$, onde r e quindi K contiene $d+2$ punti dipendenti. Si ha così l'asserto.

Esempi di spazi di rette d-immersi in uno spazio di Galois sono dati dalle varietà di Veronese immagini proiettive delle ipersuperficie d'ordine d di uno spazio di Galois $S_{r,q}$. Così per esempio la superficie di Veronese V immagine proiettiva delle coniche del piano $S_{2,q}$ è uno spazio di rette 2-immerso in $S_{5,q}$, anzi di fatto è un piano proiettivo 2-immerso in $S_{5,q}$; in essa le «rette» sono le sezioni di V con i piani di $S_{5,q}$ che hanno più di 3 punti in comune con V (tali sezioni essendo, come è noto, delle coniche).

Nel seguito supporremo che $(K, \mathcal{R})$ sia uno spazio di rette equipotenti con $n = |r|$, $\forall r \in \mathcal{R}$, denoteremo poi con m il numero delle rette per un punto di K, onde varrà la (6.1). Esamineremo ora separatamente i casi $d=1$ e $d>1$.

Caso $d=1$. Sia $(K, \mathcal{R})$ uno spazio di rette (equipotenti) 1-immerso in uno spazio grafico S_t. Poichè per due punti distinti x, y di K deve passare un (unico) elemento di $\mathcal{R}$ e tale elemento deve essere l'intersezione di K con una retta avente più di due punti in comune con K, si ha che la retta di S_t per x ed y deve incontrare K nell'elemento di $\mathscr{R}$ per x, y, quindi la retta di S_t per x, y incontra K in n punti. Dunque K è un insieme di classe $[0, 1, n]_1$ rispetto alle rette (cioè è un $|K|$-insieme intersecato da ogni retta di S_t in zero, o uno, o n punti). Viceversa ogni K-insieme K di S_t, congiunto da S_t, di classe $[0, 1, n]_1$ determina uno spazio di rette 1-immerso in S_t. Lo studio degli spazi di rette equipotenti 1-immersi in S_t equivale dunque a quello degli insiemi finiti di punti congiunti da S_t e di classe $[0, 1, n]_1$. Esaminiamo ora alcuni casi particolari.

$(K, \mathscr{R})$ *sia un piano proiettivo, d'ordine* $n-1$, 1-*immerso in* S_t. Deve allora necessariamente essere $t = 2$. K è allora un (n^2-n+1)-insieme di S_2 di classe $[0, 1, n]_1$, e viceversa. Si ha inoltre che K è un insieme congiunto dall'S_2 di classe $[0, 1, n]_1$ tale che per ogni $P \in S_2 - K$ passa al più una n-secante a K, e viceversa. Se S_2 è un piano su un corpo γ, allora i piani proiettivi 1-immersi in $S_{2,\gamma}$ si ottengono tutti e soli (a meno di collineazioni) considerando i subpiani di $S_{2,\gamma}$ a coordinate nei sottocampi finiti di γ, allora γ deve avere caratteristica $p \neq 0$ e deve essere $n = p^h + 1$.

$(K, \mathscr{R})$ *sia lo spazio di rette di uno spazio proiettivo d-dimensionale, di ordine* $n-1$, 1-*immerso in* S_t. Deve allora essere $t = d$. Inoltre K risulta un insieme congiunto dall'S_d di classe $[0, 1, n]_1$ tale che per ogni $P \in S_d - K$ passa al più una n-secante a K, e viceversa. Se S_d è uno spazio su un corpo γ, allora gli spazi 1-immersi in $S_{d,\gamma}$ si ottengono tutti e soli (a meno di collineazioni) considerando i subspazi d-dimensionali di $S_{d,\gamma}$ a coordinate nei sottocampi finiti di γ, onde γ deve avere caratteristica $p \neq 0$ e deve essere $n = p^h + 1$.

$(K, \mathscr{R})$ *sia un piano affine, di ordine* n, 1-*immerso in* S_t. Deve allora essere $t = 2$. Inoltre K è un n^2-insieme di S_2 di classe $[0, 1, n]_1$, e viceversa. Si può provare che se S_2 è un piano ordinato (per esempio il piano sui reali) non esistono piani affini 1-immersi in S_2 (per $n \geqslant 3$). Se S_2 è un piano su un campo γ di caratteristica $p = 0$ ovvero $p > 3$ ne esistono sempre d'ordine $n = 3$, se -3 è un quadrato in γ: infatti in $S_{2,\gamma}$ la cubica $\mathscr{C}$ di equazione $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ è non singolare e ammette come hessiana la $xyz = 0$, dunque i flessi di $\mathscr{C}$ sono i seguenti 9 punti (posto $e = (1+\sqrt{-3})/2$)

$$
\begin{gathered}
(0,1,-1),\quad (0,e,1),\quad (0,-e^2,1),\quad (1,0,-1),\quad (e,0,1),\quad (-e^2,0,1),\\
(1,-1,0),\quad (e,1,0),\quad (-e^2,1,0).
\end{gathered}
\tag{7.2}
$$

I 9 flessi di $\mathscr{C}$ costituiscono un piano affine d'ordine 3, 1-immerso in $S_{2,\gamma}$. Osserviamo che, a differenza del caso proiettivo, la caratteristica del piano affine 1-immerso in $S_{2,\gamma}$ (γ corpo) può essere diversa da quella di $S_{2,\gamma}$, anzi nulla vieta a priori che pur essendo $S_{2,\gamma}$ desarguesiano esso ammetta un piano affine 1-immerso non desarguesiano. Il problema di determinare i piani affini 1-immersi in piani proiettivi disarguesiani o non disarguesiani è tutt'ora aperto.

Caso $d \geqslant 2$. Sia $(K, \mathscr{R})$ uno spazio di rette, con $n = |r|$ $(\forall r \in \mathscr{R})$, d-immerso in uno spazio grafico S_t. Allora è $n \geqslant d + 2$, inoltre K è (cfr. prop. I) una calotta di specie d tale che per ogni $x, y \in K$ $(x \neq y)$ passa un sol S_d che incontra K in n punti, tutti gli altri S_d per x, y incontrano K in al più $d + 1$ punti. Viceversa una calotta di specie d di S_t soddisfacente alla precedente proprietà è uno spazio di rette di cardinalità n d-immerso in S_t. Per ogni $r \in \mathscr{R}$ sarà $r = K \cap S_d$ un n-arco in S_d (cioè un insieme di n punti a $d + 1$ a $d + 1$ indipendenti di S_d).

Supponiamo ora che S_t sia uno spazio di Galois $S_{t,q}$ e che sia $d = 2$ e quindi $n \geqslant 4$. Proviamo che

II. *Se è* $n > (q + 4)/2$, *allora due qualsiasi piani* α_1, α_2 *di* $S_{t,q}$, *n-secanti lo spazio di rette* K *2-immerso in* $S_{t,q}$, *sono congiunti da un* S_c, *con* $c \geqslant 4$. *Ne segue che* $t \geqslant 4$.

Dimostrazione. Siano $C_1 = \alpha_1 \cap K$ e $C_2 = \alpha_2 \cap K$. Evidentemente C_1 e C_2 sono due n-archi piani che hanno in comune al più un punto H. Supposto per assurdo che α_1 e α_2 siano congiunti da un S_3, sia $P \in C_1 - C_2$ e $Q \in C_2 - C_1$. Sia s una delle $n - 1$ rette secanti C_1 per P, se $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, ovvero una delle $n - 2$ rette secanti C_1 per P diversa dalla HP, se $C_1 \cap C_2 = H$. Il piano α per Q ed s appartiene all'S_3 ed incontra α_2 in una retta u. La u non può essere secante C_2, altrimenti il piano α avrebbe 4 punti in comune con K e quindi intersecherebbe K in una «retta» di $(K, \mathscr{R})$, ma allora per la retta s di $S_{t,q}$, che è 2-secante K, passerebbero due «rette» di $(K, \mathscr{R})$ (precisamente C_1 ed $\alpha \cap K$). Ne segue che u è tangente all'n-arco C_2. Le $n - 1$ o $n - 2$ rette secanti C_1 per P determinano così rispettivamente $n - 1$ o $n - 2$ rette di α_2 tangenti per Q a C_2, deve allora essere rispettivamente $n - 1 \leqslant q + 2 - n$, cioè $n \leqslant (q + 3)/2$ ovvero $n - 2 \leqslant q + 2 - n$, cioè $n \leqslant (q + 4)/2$. Ma ciò è escluso supponendosi $n > (q + 4)/2$, si ha così l'asserto.

III. *Se* K *è un piano proiettivo, d'ordine* $n - 1$, *2-immerso in* $S_{t,q}$, *con* $t \geqslant 5$, *allora ogni* S_4 *di* $S_{t,q}$ *contiene al più due piani n-secanti* K.

Dimostrazione. Se un S_4 contenesse tre piani n-secanti K, poichè due «rette» di $(K, \mathscr{R})$ hanno sempre un punto in comune, si avrebbe che tutto K sarebbe contenuto in S_4, ma ciò è escluso perchè K è congiunto dall'S_t ed è $t \geqslant 5$, onde l'asserto.

Dalla proposizione III e da quanto provato in [**18**]$_1$ segue che

IV. *Un piano proiettivo d'ordine* q *dispari 2-immerso in una* $S_{t,q}$, *con*

$t \geqslant 5$, *è una superficie di Veronese di* $S_{5,q}$, *onde è* $t = 5$ *ed il piano è disarguesiano.*

Svariati problemi si pongono in questo ordine d'idee. Ne indicheremo alcuni.

$\mathscr{P}_1$. – Esaminare se ogni piano proiettivo d'ordine q che sia d-immerso in uno spazio di Galois $S_{t,q}$ risulti una superficie di Veronese rappresentativa delle curve d'ordine d di un $S_{2,q}$. Per $d = 2$ e q dispari la risposta è affermativa (cfr. prop. IV).

$\mathscr{P}_2$. – Ogni spazio di rette 1-immerso in un piano di Galois $S_{2,q}$ dà origine, sulla superficie di Veronese di $S_{5,q}$ rappresentativa delle coniche di $S_{2,q}$, ad uno spazio di rette 2-immerso in $S_{5,q}$. Esaminare se esistono altri spazi di rette 2-immersi in $S_{5,q}$ oltre ai suddetti, cioè se esistono degli spazi di rette 2-immersi in $S_{5,q}$ che *non* siano tracciati su una superficie di Veronese.

$\mathscr{P}_3$. – Osserviamo che, se $(K, \mathscr{R})$ è uno spazio di rette (con $n = |r|$, $\forall r \in \mathscr{R}$) 2-immerso in $S_{t,q}$, ogni piano n-secante K interseca K in un n-arco piano e quindi è $n \leqslant q + 1$ se q è dispari, $n \leqslant q + 2$ se q è pari, inoltre da ogni punto di un tal piano α, per cui passano secanti all'n-arco $\alpha \cap K$, non possono passare rette secanti K e non giacenti su α; ne segue che se l'n-arco $\alpha \cap K$ è completo ogni S_3 per α incontra K al più in un punto fuori α, onde è $|K| \leqslant n + q^{t-3} + q^{t-4} + \ldots + q$. Tenuto conto di ciò e della prop. II, esaminare se esistono spazi di rette 2-immersi in $S_{t,q}$ con $t = 3$ o $t = 4$.

$\mathscr{P}_4$. – Tenuto conto dell'osservazione precedente, studiare gli spazi di rette 2-immersi in $S_{t,q}$ con $n = q + 1$.

$\mathscr{P}_5$. – Esaminare se esistono spazi di rette 2-immersi in $S_{t,q}$ con $n = q + 2$, essendo q pari.

Bibliografia

[1] A. Barlotti: [•]$_1$ *Una costruzione di una classe di spazi affini generalizzati*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **17** (1962), 182-187; [•]$_2$ *Alcuni risultati nello studio degli spazi aff'ni generalizzati di Sperner*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **35** (1965), 18-46.

[2] F. Buekenhout, *Une caractérisation des espaces affins basée sur la notion de droite*, Math. Z. **111** (1969), 367-371.

[3] P. V. Ceccherini, *Sulla nozione di spazio grafico*, Rend. Mat. **26** (1967), 78-98.

[4] H. Crapo and G. C. Rota, *On the foundations of combinatorial theory: combinatorial geometries*, Univ. Waterloo, M.I.T., 1968.

[5] P. Dembowski, *Finite geometries*, Ergebnisse der Math., Springer-Verlag, Berlin 1968.

[6] J. Doyen, *Sur la structure de certains systèmes triples de Steiner*, Math. Z. **111** (1969), 289-300.

[7] J. Doyen and A. Rosa, *A bibliography and survey of Steiner systems*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **7** (1973), 392-419.

[8] J. H. Hall: $[\bullet]_1$ *Steiner triple systems with geometrical minimally generated subsystems*, Quart. J. Math. Oxford (2) **25** (1974), 41-50; $[\bullet]_2$ *Combinatorial theory*, Waltham, Toronto, London 1967.

[9] H. Hanani: $[\bullet]_1$ *A note of Steiner triple systems*, Math. Scand. **8** (1960), 154-156; $[\bullet]_2$ *The existence and construction of balanced incomplete block designs*, Ann. Math. Stat. **32** (1961), 361-386; $[\bullet]_3$ *On some tactical configurations*, Canad. J. Math. **15** (1963), 702-722; $[\bullet]_4$ *On covering of balanced incomplete block designs*, Canad. J. Math. **16** (1964), 615-625.

[10] T. P. Kirkman, *On a problem in combinations*, Camb. Dublin Math. J. **2** (1847), 191-204.

[11] M. Marchi, *S-spazi e loro problematica*, Sem. Geometrie Combinatorie, Ist. Mat. Fac. Sc. Univ. Roma n. **1**, Maggio 1967.

[12] E. H. Moore, *Concerning triple systems*, Math. Ann. **43** (1893), 271-285.

[13] M. Reiss, *Über eine Steinersche combinatorische Aufgabe*, J. Reine Angew. Math. **56** (1859), 326-344.

14] B. Segre: $[\bullet]_1$ *Le geometrie di Galois*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **48** (1959), 1-97; $[\bullet]_2$ *Gli spazi grafici*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **30** (1960), 1-21; $[\bullet]_3$ *Lectures on modern geometry*, Cremonese, Roma 1961; $[\bullet]_4$ *Istituzioni di geometria superiore* (II). *Spazi proiettivi* (corso di complementi tenuto da G. Tallini, lezioni raccolte da P. V. Ceccherini), Ist. Mat. « G. Castelnuovo » Univ. Roma 1965; $[\bullet]_5$ *Istituzioni di geometria superiore* (III). *Complessi, reti, disegni* (lezioni raccolte da P. V. Ceccherini), Ist. Mat. « G. Castelnuovo » Univ. Roma 1965; $[\bullet]_6$ *Introduction to Galois geometries*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. (8) **8** (1967), 133-236; $[\bullet]_7$ *Sugli insiemi finiti di punti di uno spazio grafico*, Rend. Mat. (8) **6** (1975), 37-63.

[15] E. Sperner, *Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische strukturen*, J. Reine Angew. Mat. **204** (1960), 205-215.

[16] J. Steiner, *Combinatorische Aufgabe*, J. Reine Angew. Math. **45** (1853), 181-182.

[17] L. Szamkolowicz: $[\bullet]_1$ *On the problem of existence of finite regular planes*, Colloq. Math. **9** (1962), 245-250; $[\bullet]_2$ *Remarks on finite regular planes*, Colloq. Math. **10** (1963), 31-37; $[\bullet]_3$ *Alcuni problemi della teoria dei sistemi di Steiner*, Rend. Mat. (5) **24** (1965), 348-359.

[18] G. Tallini: $[\bullet]_1$ *Una proprietà grafica caratteristica delle superficie di Veronese negli spazi finiti* (I) e (II), Atti Acc. Naz. Lincei Rend. (8) **24** (1958), 19-23, 135-138; $[\bullet]_2$ *Le geometrie di Galois e le loro applicazioni alla statistica e alla teoria dell'informazione*, Rend. Mat. **19** (1960), 379-400; $[\bullet]_3$ *On caps of kind s in a Galois r-dimensional space*, Acta Arith. **7** (1961), 19-28;

[•]$_4$ *Un'applicazione delle geometrie di Galois a questioni di statistica,* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8) **35** (1963), 479-485; [•]$_5$ *Strutture grafiche proiettive,* Liguori, Napoli 1973; [•]$_6$ *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois,* Relazione n. 30, Ist. Mat. Univ. Napoli, 1974.

[**19**] L. Teirlinck, *On linear spaces in which every plane is either projective or affine,* Geometriae Dedicata **4** (1975), 39-44.

[**20**] W. T. Tutte, *Introduction to the theory of Matroids,* American Elsevier Publishing Company, Inc. New York 1971.

[**21**] H. Whitney, *On the abstract properties of linear dependence,* Amer. J. Math. **57** (1935), 507-533.

Summary

This work is a survey on combinatorial geometries and line spaces and an approach to the study of Steiner systems from the combinatorial point of view. After some recalls on geometrical spaces and on line spaces, we consider closure spaces and combinatorial spaces. Then we enphasize the links between line space and combinatorial geometries. At last we deal with Steiner systems $(S, \mathscr{R})$, *with* $|r| = n$ $(\forall r \in \mathscr{R})$ *and* $|S| \leqslant n^3$ *and we turn to the study of line spaces d-embedded in a graphic space.*

* * *