Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 125-130

MARIELLA CECCHI (*)

Criteri di limitatezza per le componenti delle soluzioni di una classe di sistemi di n equazioni differenziali del primo ordine (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

Introduzione

In un recente lavoro [**1**] abbiamo trattato il problema della limitatezza in futuro delle soluzioni per un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine della forma:

(1) $$\dot{x} + f(t, x, y) = 0\,, \qquad \dot{y} + g(t, x, y) = 0\,.$$

In tale lavoro, che si riallacciava generalizzandole a precedenti ricerche di altri autori [**3**], [**4**], sotto le ipotesi: « esistano due funzioni $\varphi_2\colon [t_0, +\infty) \times R^2 \to R$ continua e $h\colon R \to R$ assolutamente continua, entrambe $\neq 0$ e tali che posto $\varphi_1(t, x, y) = h(t)\varphi_2(t, x, y)$ e indicando con F, $G\colon [t_0, +\infty) \times R^2 \to R$ due funzioni di classe $\mathscr{C}^1$ tali che $F_y = \varphi_1 f$, $G_x = \varphi_2 g$ in $[t_0, +\infty) \times R^2$, si abbia: ($a_0$) $h(t) > 0$, $\ln h(t)$ a variazione negativa limitata in $[t_0, +\infty)$, (a_1) $G(t, x, y)$ uniformemente non limitata superiormente per $|x| \to +\infty$, $G(t, x, y)$ inferiormente limitata, (a_2) $F(t, x, y)$ superiormente limitata, (a_3) $F_t - hG_t \geqslant 0$; (a_4) $\varphi_1[\varphi_1^2 G_x G_y - \varphi_2^2 F_x F_y] \geqslant 0$ », si dimostrava la limitatezza in futuro della componente $x(t)$ delle soluzioni del sistema (1).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Applicata, Università, Via S. Marta 3, 50139 Firenze, Italy.

(**) Ricevuto: 20-VII-1978.

D'altra parte numerosi problemi posti dalla fisica possono essere ricondotti allo studio della limitatezza in futuro di determinate componenti delle soluzioni di una equazione differenziale ordinaria del primo ordine vettoriale

$$\dot{x} + f(t, x) = 0 , \tag{2}$$

dove $f: I \times R^n \to R^n$, $I = [t_0, +\infty)$, è un vettore continuo che soddisfa in genere a condizioni di limitatezza o non limitatezza integrale nell'intervallo I per alcune delle sue componenti.

In analogia a quanto è stato fatto in [**1**] useremo la seguente definizione: diremo che una funzione $A: I \times R^n \to R$ è *non limitata superiormente per* $|x_i| \to +\infty$ se per $\forall K > 0$ esistono $\bar{x}_i^+ > K$ e $\bar{x}_i^- < -K$ tali che $A(t, x_1, \ldots, \bar{x}_i^+, \ldots, x_n) > K$ e $A(t, x_1, \ldots, \bar{x}_i^-, \ldots, x_n) > K$ per $\forall (t, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in I \times R^{n-1}$. Tale condizione risulta implicitamente soddisfatta nei precedenti lavori già citati. Ad esempio in [**4**] per l'equazione

$$\ddot{x} + \alpha(t)\gamma(\dot{x})f(x) = 0 \tag{3}$$

l'ipotesi $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \int_0^x f(s)\,ds = +\infty$ garantisce la non limitatezza della funzione $A(x) = \int_0^x f(s)\,ds$, secondo la definizione posta sopra. Così pure in [**3**], per il sistema

$$\dot{x} + \alpha(t)f_1(x)\gamma_1(y) = 0 , \qquad \dot{y} + \beta(t)f_2(x)\gamma_2(y) = 0 , \tag{4}$$

la condizione $\int_0^x f_2(s)/f_1(s)\,ds$ superiormente non limitata (per $x \to \pm\infty$) assicura ancora la non limitatezza della funzione $A(x) = \int_0^x f_2(s)/f_1(s)\,ds$ secondo la definizione sopra citata.

Nei lavori sopra menzionati è stato seguito un metodo analogo al metodo di Lyapounov per lo studio della stabilità per sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Scopo del presente lavoro è quello di precisare formalmente tale metodo in modo del tutto generale, e applicarlo al caso di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine vettoriali per ottenere analoghi criteri sufficienti per la limitatezza in futuro delle singole componenti delle soluzioni delle equazioni stesse.

1. – Sia data l'equazione

$$\dot{x} + f(t, x) = 0 , \tag{2}$$

con $f: I \times R^n \to R^n$, continua.

Stabiliamo il seguente

Lemma. *Se esistono due funzioni F, $G: I\times R^n \to R$ di classe $\mathscr{C}^1$, ed una funzione $h: I\to R$, con $h(t)>0$ e assolutamente continua, che verificano le condizioni*

(a_0') $\ln h(t)$ *a variazione negativa limitata in* I,

(a_1') $G(t,x)$ *non limitata superiormente per* $|x_i|\to+\infty$, $G(t,x)\geqslant 0$,

(a_2') $F(t,x)\leqslant 0$,

(a_3') $F'-hG'\geqslant 0$ *lungo le soluzioni di* (2),

allora per ogni soluzione $x=x(t)$ di (2) la componente $x_i(t)$ è limitata nell'intervallo destro di esistenza della soluzione stessa.

Dimostrazione. Consideriamo la disuguaglianza $F'-hG'\geqslant 0$ e integriamo tra $\bar t$ e t, con $t>\bar t\geqslant t_0$. Con procedimento analogo a quello usato in [**1**] otteniamo

$$h(t)G\big(t,x(t)\big)\leqslant F\big(t,x(t)\big)-F\big(\bar t,x(\bar t)\big)+h(\bar t)G\big(\bar t,x(\bar t)\big)+\int_{\bar t}^{t} h'(s)G\big(s,x(s)\big)\,\mathrm{d}s\,.$$

Da (a_1'), (a_2') segue

$$h(t)G\big(t,x(t)\big)\leqslant K+\int_{\bar t}^{t}|h'(s)|G\big(s,x(s)\big)\,\mathrm{d}s$$

con K costante opportuna. Applicando il lemma di Gromwall

$$G\big(t,x(t)\big)\leqslant\frac{K}{h(\bar t)}\exp\int_{\bar t}^{t}\frac{|h'(s)|-h'(s)}{h(s)}\,\mathrm{d}s\,.$$

Da (a_0), (a_1') segue che $x_i(t)$ è limitata nell'intervallo destro di esistenza della soluzione stessa.

Osservazione 1. Notiamo che si ha un risultato equivalente se nelle ipotesi (a_1'), (a_2') si sostituiscono le condizioni $G(t,x)\geqslant 0$, $F(t,x)\leqslant 0$ rispettivamente con $G(t,x)$ inferiormente limitata, $F(t,x)$ superiormente limitata.

Osservazione 2. Notiamo ancora che dalla dimostrazione del lemma segue che se $h'(t)\geqslant 0$ non è necessaria l'ipotesi $G(t,x)\geqslant 0$.

2. – Data una funzione $u\in\mathscr{C}^1[I\times R^n, R]$, indicheremo con $P_i(u)$ una qualunque funzione $U: I\times R^n\to R$, di classe $\mathscr{C}^1$ e tale che $\partial U(t,x)/\partial x_i=u(t,x)$.

Ciò premesso, data l'equazione (2), dove supporremo $f\in\mathscr{C}^1[I\times R^n, R^n]$, sia $F_{ij}=P_j(f_i)$.

Teorema 2.1. *Se esiste una funzione $h: I \to R$, positiva ed assolutamente continua con*

(a_0) $\ln h(t)$ *a variazione negativa limitata in I, e se valgono le seguenti condizioni per qualche $j \neq i$:*

(b_1) $F_{ji}(t, x)$ *inferiormente limitata e non limitata superiormente per* $|x_i| \to +\infty$,

(b_2) $\overline{F}_{ij}(t, x) = h(t) F_{ij}(t, x)$ *superiormente limitata,*

(b_3) $\dfrac{\partial \overline{F}_{ij}}{\partial t} - h \dfrac{\partial F_{ji}}{\partial t} \geq 0,$

(b_4) $h \sum\limits_{k \neq i} \dfrac{\partial F_{ji}}{\partial x_k} f_k - \sum\limits_{k \neq j} \dfrac{\partial \overline{F}_{ij}}{\partial x_k} f_k \geq 0,$

allora per ogni soluzione $x = x(t)$ di (2) la componente $x_i(t)$ è limitata nell'intervallo destro di esistenza della soluzione stessa.

Dimostrazione. Basta verificare che vale la (a_3') del Lemma del paragrafo precedente con $G = F_{ji}$, $F = \overline{F}_{ij}$.

Consideriamo la i-ma equazione del sistema e la j-ma. Moltiplichiamo la prima per $h\dot{x}_j$ e la seconda per $h\dot{x}_i$. Otteniamo $h\dot{x}_j f_i = h f_j \dot{x}_i$, ossia

$$\frac{\partial \overline{F}_{ij}}{\partial x_j} \dot{x}_j = \frac{\partial F_{ji}}{\partial x_i} \dot{x}_i .$$

Lungo le soluzioni di (2) si ha

$$\overline{F}'_{ij} = \frac{\partial \overline{F}_{ij}}{\partial t} - \sum_k \frac{\partial \overline{F}_{ij}}{\partial x_k} f_k, \qquad F'_{ji} = \frac{\partial F_{ji}}{\partial t} - \sum_k \frac{\partial F_{ji}}{\partial x_k} f_k ,$$

e sostituendo nella uguaglianza precedente

$$\overline{F}'_{ij} - \frac{\partial \overline{F}_{ij}}{\partial t} + \sum_{k \neq j} \frac{\partial \overline{F}_{ij}}{\partial x_k} f_k = h \, [F'_{ji} - \frac{\partial F_{ji}}{\partial t} + \sum_{k \neq i} \frac{\partial F_{ji}}{\partial x_k} f_k]$$

e da (b_3), (b_4) segue quanto voluto.

Teorema 2.2. *Se valgono le seguenti condizioni per qualche $j \neq i$:*

(b_1') $F_{ji}(t, x)$ *non limitata superiormente per* $|x_i| \to +\infty$,

(b_2') $F_{ij}(t, x)$ *superiormente limitata,*

$$(\mathrm{b}_3') \quad \frac{\partial F_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial F_{ji}}{\partial t} \geqslant 0\,,$$

$$(\mathrm{b}_4') \quad \sum_{k\neq i} \frac{\partial F_{ji}}{\partial x_k} f_k - \sum_{k\neq j} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} f_k \geqslant 0\,,$$

allora per ogni soluzione $x = x(t)$ di (2) la componente $x_i(t)$ è limitata nell'intervallo destro di esistenza della soluzione stessa.

Dimostrazione. Per il Lemma precedente, l'Osservazione 1, e l'Osservazione 2, basta dimostrare che le (b_3'), (b_4') implicano la condizione (a_3') con $h(t) = 1$, $F = F_{ij}$, $G = F_{ji}$. Ciò segue in maniera analoga al teorema precedente.

Osservazione 3. Sia $\Phi\colon I \times R^n \to R$ positiva; consideriamo insieme all'equazione differenziale (2) l'equazione differenziale

$$(2') \qquad \dot{x} + \Phi(t, x) f(t, x) = 0\,.$$

Se per la (2) valgono le ipotesi del Teor. 2.1 o Teor. 2.2, per il Lemma anche le soluzioni di (2') hanno la componente $x_i(t)$ limitata nell'intervallo destro di esistenza di tali soluzioni. Basta osservare che vale la (a_3') del Lemma, rispettivamente con $F = \overline{F}_{ij}$, $G = F_{ji}$ o $F = F_{ij}$, $G = F_{ji}$. Infatti lungo le soluzioni di (2') si ha, nel caso che valgano le ipotesi del Teorema 2.1,

$$F' = \overline{F}'_{ij} = \frac{\partial \overline{F}_{ij}}{\partial t} - \sum_k \frac{\partial \overline{F}_{ij}}{\partial x_k} \Phi f_k\,, \qquad G' = F'_{ji} = \frac{\partial F_{ji}}{\partial t} - \sum_k \frac{\partial F_{ji}}{\partial x_k} \Phi f_k\,,$$

$$F' - hG' = \overline{F}'_{ij} - hF'_{ji} = \frac{\partial \overline{F}_{ij}}{\partial t} - h\frac{\partial F_{ji}}{\partial t} + \Phi\,\Big[h \sum_{k\neq i} \frac{\partial F_{ji}}{\partial x_k} f_k - \sum_{k\neq j} \frac{\partial \overline{F}_{ij}}{\partial x_k} f_k\Big]$$

e per la (b_3), (b_4) del Teorema 2.1 segue quanto voluto. Analogamente nel caso che valgano le ipotesi del Teorema 2.2.

Vediamo ora un esempio di applicazione dei Teoremi precedenti. Per il sistema

$$\dot{x} + \frac{1}{h(t)} \frac{tz^2 y}{1 + t^2 z^4 y^4} = 0\,, \quad \dot{y} + (1 + z^2)x = 0\,, \quad \dot{z} - \Big[\frac{tzy^2}{1 + t^2 z^4 y^4} - h(t) z x^2\Big] = 0\,,$$

con $h(t)$ soddisfacente alle ipotesi poste, si ha, applicando il Teorema 2.1 con

$$x_1 = x\,, \qquad f_1 = \frac{1}{h(t)}\,\frac{tz^2y}{1+t^2z^4y^4}\,, \qquad x_2 = y\,, \qquad f_2 = (1+z^2)x\,,$$

$$x_3 = z\,, \qquad f_3 = -\left[\frac{tzy^2}{1+t^2z^4y^4} - h(t)zx^2\right],$$

$$\overline{F}_{12}(t, x, y, z) = h(t)P_2(f_1)(t, x, y, z) = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} tz^2y^2$$

superiormente limitata;

$$F_{21}(t, x, y, z) = P_1(f_2)(t, x, y, z) = \tfrac{1}{2}(1+z^2)x^2$$

inferiormente limitata e non limitata superiormente per $|x| \to +\infty$;

$$\frac{\partial \overline{F}_{12}}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\frac{z^2y^2}{1+t^2z^4y^4}\,, \qquad \frac{\partial F_{21}}{\partial t} = 0\,;$$

$$h\sum_{k\neq 1}\frac{\partial F_{21}}{\partial x_k}f_k - \sum_{k\neq 2}\frac{\partial \overline{F}_{12}}{\partial x_k}f_k = \left[\frac{tzy^2}{1+t^2z^4y^4} - h(t)zx^2\right]^2.$$

Possiamo concludere che la componente $x(t)$ di ogni soluzione del sistema precedente è limitata nell'intervallo destro di esistenza.

Bibliografia

[1] M. Cecchi Baroni, *Criteri di limitatezza per le soluzioni di una classe di sistemi di due equazioni differenziali del primo ordine*, Le Matematiche **30** (1975).

[2] E. A. Coddington and N. Levinson, *Ordinary differential equations*, Mc Graw-Hill Book Company. 1955.

[3] W. J. Coles, *Boundedness of solutions of two-dimensional first order differential systems*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **4** (1971), 225-231.

[4] M. Furi, *Un criterio di limitatezza per una classe di equazioni differenziali del secondo ordine*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **1** (1968), 585-590.

Summary

In this paper we give results regarding the boundedness for a given component of the solutions of an ordinary differential equation in R^n.

* * *