Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 115-123

A. MANIGLIA (*)

Gruppi di funzioni generalizzati singolari (**)

A GIORGIO SESTINI per il suo 70° compleanno

1. - Definizioni preliminari

Siano $F_1, F_2, \dots, F_s$, s funzioni indipendenti, di n variabili indipendenti $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n$ e si supponga che per $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^n)$ variabile in un certo dominio di R^n, le F_i verifichino condizioni di regolarità abbastanza ampie, sì da garantire dal punto di vista analitico, la validità delle argomentazioni che si tratteranno.

Sia inoltre $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ una matrice funzionale di ordine n, antisimmetrica, e i cui elementi $\eta^{\alpha\beta}(\omega)$, oltre a verificare le ipotesi di regolarità già assunte per le F_i, verifichino anche le proprietà

$$\eta^{\lambda\mu}\frac{\partial\eta^{\nu\varrho}}{\partial\omega^\mu} + \eta^{\nu\mu}\frac{\partial\eta^{\varrho\lambda}}{\partial\omega^\mu} + \eta^{\varrho\mu}\frac{\partial\eta^{\lambda\nu}}{\partial\omega^\mu} = 0 \,. \tag{1.1}$$

Considerate ora due qualsiasi funzioni fra le F_i, siano F_α, F_β, si definisce loro « Parentesi di Poisson Generalizzata » (P.P.G.) (cfr. [**3**], pag. 413), la funzione

$$(F_\alpha, F_\beta)^*(\omega) = \eta^{\mu\nu}(\omega)\frac{\partial F_\alpha}{\partial\omega^\mu}\frac{\partial F_\beta}{\partial\omega^\nu} \,. \tag{1.2}$$

Facendo uso di questa definizione, a partire dalle s funzioni $F_1, \dots, F_s$, si determinano, come nel caso della P.P. ordinaria, (cfr. [**2**] pag. 282), r funzioni indipendenti $F_1, \dots, F_r$ $(s \leqslant r \leqslant n)$ tali che tutte le $r(r-1)/2$ P.P.G. che

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, via Arnesano, Lecce, Italy.

(**) Ricevuto: 8-V-1978.

si possono formare con esse sono funzioni di esse stesse.

Le $F_1, F_2, \ldots, F_r$ e tutte le funzioni che dipendono dalle ω per il tramite di esse costituiscono un gruppo generalizzato di funzioni, che indichiamo con G_r, e di cui le $F_1, \ldots, F_r$ costituiscono una base; r è detto il *rango* del gruppo.

Si osservi che, se g_1 e g_2 sono funzioni appartenenti a G_r, si ha

$$(1.3) \qquad (g_1, g_2)^* = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial g_1}{\partial F_\alpha} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \omega^\mu} \frac{\partial g_2}{\partial F_\beta} \frac{\partial F_\beta}{\partial \omega^\nu} = \frac{\partial g_1}{\partial F_\alpha} \frac{\partial g_2}{\partial F_\beta} (F_\alpha, F_\beta)^* ,$$

come per i gruppi ordinari (cfr. [**2**], pag. 282).

Inoltre, se f, g, h sono tre funzioni di G_r, in virtù di (1.1) vale l'identità di Jacobi

$$(1.4) \qquad ((f, g)^*, h)^* + ((g, h)^*, f)^* + ((h, f)^*, g)^* = 0 .$$

2. - Caso in cui $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ è singolare. Funzioni neutre

Supponiamo che la matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ sia singolare, di rango eguale ad $(n-k)$.

Le funzioni $f(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ che hanno P.P.G. nulla con ogni funzione di $\omega_1, \ldots, \omega_n$ si dicono neutre, ed è chiaro che ogni funzione che dipenda da $\omega_1, \ldots, \omega_n$ per il tramite di funzioni neutre è ancora una funzione neutra. Il numero di funzioni neutre indipendenti rispetto alla matrice data è k, come si vede dall'equazione

$$(2.1) \qquad (\Phi, f)^* = 0$$

nell'incognita f, facendo coincidere $\Phi(\omega)$ successivamente con $\omega_1, \ldots, \omega_n$, e si ha (cfr. [**4**])

Teorema. *Considerato l'insieme delle funzioni di n variabili $\omega^1, \ldots, \omega^n$, e definita la* P.P.G. *mediante una matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ singolare e di rango $n-k$, esistono k funzioni, dette neutre, aventi* P.P.G. *nulla con ogni funzione delle ω* (1).

Come conseguenza immediata del Teorema precedente, si ha che se n è dispari esiste almeno una funzione neutra. Inoltre bisogna fare la seguente precisazione.

Se le funzioni di partenza $F_1, \ldots, F_s$ sono tutte funzioni neutre, non è possibile costruire, col procedimento indicato al n. **1**, alcun gruppo generalizzato

(1) Si osservi che se n è pari e la matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ è non singolare, il sistema (2.2) ha solo soluzioni banali e quindi si ricade nel caso dei gruppi generalizzati non singolari ([**1**]).

di funzioni, ad eccezione del gruppo banale composto dalle $F_1, \ldots, F_s$ neutre e dalla funzione identicamente nulla. Pertanto, affinchè quanto sarà detto in seguito non si riduca a questo caso, si supporrà che le s funzioni di partenza non siano tutte neutre rispetto alla matrice assegnata. In altri termini, indicato con a_1 il numero di funzioni neutre indipendenti del gruppo G_r di funzioni costruito a partire da $F_1, \ldots, F_s$, supporremo che sia $r - a_1 \geqslant 2$.

3. - Gruppo reciproco

Si consideri ora il sistema differenziale

$$(F_\alpha, f)^* = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)\,; \tag{3.1}$$

per la proprietà (1.3) le soluzioni di tale sistema sono tutte le funzioni delle ω aventi P.P.G. nulla con ogni funzione di G_r. Esplicitando si ha

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \omega^\mu} \frac{\partial f}{\partial \omega^\nu} = 0 \qquad (\alpha = 1 \ldots r)\,. \tag{3.2}$$

Ora, avendo indicato con a_1 il numero di funzioni neutre indipendenti di G_r, si ha che a_1 delle r equazioni del sistema (3.2) sono delle identità, e quindi il sistema stesso è costituito in realtà da $r - a_1$ equazioni; inoltre esso è completo in virtù dell'identità (1.4), ed il numero di soluzioni indipendenti che esso possiede dipende dal rango della matrice

$$\left(\eta^{\mu\nu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \omega^\mu}\right), \tag{3.3}$$

la quale è il prodotto delle matrici

$$(\eta^{\mu\nu}) \text{ di rango } n - k = p\,, \qquad \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial \omega^\nu}\right) \text{ di rango } r - a_1\,,$$

e quindi, per il teorema di Binet, ha rango $s \leqslant \min(p, r - a_1)$.

Ora, poichè p è il numero massimo di funzioni indipendenti non neutre che un gruppo generico di rango $\leqslant n$ può avere, risulta $p \geqslant r - a_1$, e quindi

$$s \leqslant r - a_1\,. \tag{3.4}$$

Quindi il sistema (3.2) ammette $n - s$ soluzioni indipendenti $f_1, \ldots, f_{n-s}$, e fra esse sono comprese le k funzioni neutre.

Dimostriamo ora che nella (3.4) vale solo il segno di eguaglianza. Infatti, se fosse $s < r - a_1$ strettamente, si avrebbe $n = (r - a_1) + n - s > (r - a_1) + [n - (r - a_1)]$, cioè $n > n$, il che è assurdo.

Osserviamo ancora che, valendo l'identità di Jacobi, ogni funzione $f(\omega) = (f_i, f_j)^*(\omega)$, $(i, j = 1, \ldots, n - s)$ è soluzione di (3.2); vale quindi il seguente

Teorema I. *Dato un gruppo generalizzato di funzioni G_r, con l'operazione* P.P.G. *definita da una matrice $(\eta^{\mu\nu}(\omega))$ singolare, resta determinato un altro gruppo generalizzato di funzioni R_{n-s}, di rango $n - s = n - (r - a_1)$, munito della operazione* P.P.G. *definita dalla stessa matrice $(\eta^{\mu\nu}(\omega))$, e costituito da tutte le $f(\omega)$ che hanno* P.P.G. *nulla con ogni $F(\omega)$ e G_r, R_{n-s}, in accordo con la nomenclatura del caso ordinario, lo diciamo gruppo reciproco di G_r e ad esso appartengono tutte le funzioni neutre.*

Nel caso in cui $p = r - a_1$, R_{n-s} consta delle sole a_1 funzioni neutre.

4. - Funzioni singolari di un gruppo

Si considerino le funzioni di G_r che sono in involuzione con ogni funzione del gruppo, cioè che hanno P.P.G. nulla con ogni funzione di esso; tali funzioni sono dette singolari, ed è chiaro che esse appartengono anche al reciproco di G_r, cioè ad R_{n-s}.

In virtù della (1.4) le funzioni singolari di un gruppo G_r ne costituiscono un sottogruppo S, e si ha (cfr. [**2**] pag. 283).

Teorema II. *Il sottogruppo S delle funzioni singolari di un gruppo G_r è anche un sottogruppo del reciproco R_{n-s}.*

Risulta evidente, in questo caso, che ad S appartengono le a_1 funzioni neutre di G_r.

Se tutte le funzioni di un gruppo sono singolari, il gruppo si dice commutativo (cfr. [**2**] pag. 283).

Supponiamo ora di avere un gruppo G_r non commutativo, vogliamo determinare il numero di funzioni singolari indipendenti che esso possiede; tale numero (cfr. [**2**] pag. 283), è il numero di soluzioni indipendenti del sistema

$$(F_\alpha, \Phi)^* = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r). \tag{4.1}$$

Come osservato nel n. **3**, a_1 delle r equazioni del sistema (4.1) sono delle identità, e quindi il sistema si scrive, permutando opportunamente le funzioni F_α

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \omega^\nu} \frac{\partial F_\beta}{\partial \omega^\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial F_\beta} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r - a_1). \tag{4.2}$$

Il numero di soluzioni di questo sistema, che è completo in virtù dell'identità di Jacobi, dipende dal rango della matrice

$$(\varphi^*_{\alpha\beta}) = \left(\eta^{\mu\nu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \omega^\mu} \frac{\partial F_\beta}{\partial \omega^\nu}\right),$$

che è senza dubbio $\leqslant r - a_1$.

Vale quindi il seguente

Teorema III. *Se il rango di* $(\varphi^*_{\alpha\beta})$ *è* $(r - a_1) - a$, *il gruppo non commutativo* G_r *possiede* a *funzioni singolari non neutre, che ne determinano un sottogruppo di rango* a.

5. - Estensione del gruppo

È noto (cfr. [**2**] pag. 286) dalla teoria dei gruppi di funzioni ordinari che ogni gruppo G_r non commutativo si può estendere ad un gruppo di rango eguale al numero di variabili indipendenti e tale proprietà si conserva anche per i gruppi generalizzati con P.P.G. definita da una matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ ([**1**]).

Nella letteratura però è trattato solo in caso in cui il numero di variabili indipendenti sia pari, e la matrice $(\eta^{\alpha\beta})$ è non singolare; in questo n. si farà vedere che l'estensione di un gruppo generalizzato singolare di rango r si può ottenere indipendentemente dal fatto che n sia pari o dispari.

Consideriamo dunque il gruppo G_r definito come nei numeri precedenti; in esso è possibile (cfr. [**2**] pag. 285) determinare una base $\varphi^1, \ldots, \varphi^{t+q}, \psi_1, \ldots, \psi_t$ $(2t + q = r)$ tale che

$$(\varphi^\mu, \varphi^\lambda)^* = 0\,, \qquad (\psi_i, \psi_k)^* = 0\,, \qquad (\varphi^\mu, \psi_k) = \delta^\mu_k \tag{5.1}$$

con $\mu, \lambda = 1, \ldots, t + q$ ed $i, k = 1, \ldots, t$.

Dalle (5.1) risulta chiaro che le funzioni $\varphi^{t+1}, \ldots, \varphi^{t+q}$ sono funzioni appartenenti anche al gruppo reciproco di G_r, e inoltre è $q = a + a_1$, con a_1 = numero di funzioni neutre di G_r, a = numero di funzioni singolari non neutre di G_r.

Inoltre è possibile (cfr. [**2**], pag. 286) aggiungere alle funzioni della base di G_r verificanti (5.1), a funzioni del reciproco in modo tale che le $r + a$ funzioni che si ottengono siano indipendenti, generino un gruppo di funzioni G_{r+a} di rango $(r + a)$ privo di funzioni singolari non neutre, e verifichino le (5.1) con $i, k = 1, \ldots, t + a$; in tal modo G_r risulta essere un sottogruppo di G_{r+a}.

Il reciproco di G_{r+a} è generato dalle soluzioni indipendenti del sistema completo

$$(5.2)\qquad \begin{aligned} &(\varphi^\mu, f)^* = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, t + q = t + a + a_1)\,, \\ &(\varphi_i, f)^* = 0 \qquad (i = 1, \ldots, t + a)\,, \end{aligned}$$

che ammette (²) $n - (2t + 2a) = n - (r + a - a_1)$ soluzioni indipendenti, è anch'esso privo di funzioni singolari non neutre, e quindi anch'esso, come G_r e G_{r+a}, ha un numero pari di funzioni non neutre.

Indicando questo numero con $2b$, cioè ponendo $n - (2t + 2a) = n - (r + a - a_1) = 2b + a_1 + a_2$, ed essendo $(a_1 + a_2)$ il numero totale di funzioni neutre, con i procedimenti indicati sopra è possibile scegliere una base in tale gruppo, diciamola: $\bar\varphi^1, \ldots, \bar\varphi^b, \bar\varphi^{b+1}, \ldots, \bar\varphi^{b+(a+a)}$, $\bar\psi_1, \ldots, \bar\psi^b$ tale che

$$(5.3)\qquad (\bar\varphi^\varrho, \bar\varphi^\sigma) = 0\,, \quad (\bar\psi_l, \bar\psi_k) = 0\,, \quad (\bar\varphi^\varrho, \bar\psi_k) = \delta^\varrho_k$$
$$(\varrho, \sigma = 1, \ldots, b + (a_1 + a_2);\ l, k = 1, \ldots, b)\,.$$

A questo punto osserviamo che, se nella base di G_{r+a} prendiamo le a_1 funzioni neutre coincidenti con $\bar\varphi^{b+1}, \ldots, \bar\varphi^{b+a_1}$, le $r + a$ funzioni che si ottengono verificano ancora le (5.1); inoltre, ponendo

$$\bar\varphi^1 = \varphi^{t+a+1}, \ldots, \bar\varphi^t = \varphi^{t+a+b} = \varphi^{n_1}\,, \qquad \bar\psi_1 = \psi_{t+a+1}, \ldots, \bar\psi_b = \psi_{t+a+b} = \psi_{n_1}\,,$$
$$\bar\varphi^{b+1} = \varphi^{n_1+1}, \ldots, \bar\varphi^{b+a_1} = \varphi^{n_1+a_1}, \ldots, \bar\varphi^{b+a_1+a_2} = \varphi^{n_1+(a_1+a_2)}\,,$$

otteniamo n funzioni indipendenti, che verificano le condizioni (5.1) con $\lambda, \mu = 1, \ldots, n_1 + (a_1 + a_2)$, $i, k = 1, \ldots, n_1$. In definitiva vale il seguente

Teorema IV. *Dato un gruppo di funzioni di n variabili, di rango r, e non commutativo, esiste sempre un gruppo di rango n di cui esso è un sottogruppo, in cui si può scegliere una base*

$$\varphi^1, \ldots, \varphi^{n_1+(a_1+a_2)}, \quad \psi_1, \ldots, \psi_{n_1} \qquad (2n_1 + a_1 + a_2 = n)\,,$$

(²) Il sistema (5.2) è composto da $2t + a + q$ equazioni, ma a_1 di esse si riducono a delle identità.

che verifica le condizioni

$$(5.4)\qquad (\varphi^\mu, \varphi^\lambda)^* = 0\,, \qquad (\psi_j, \psi_k)^* = 0\,, \qquad (\varphi^\mu, \psi_k) = \delta^\mu_k$$

$$(\lambda, \mu = 1, \ldots, n_1 + (a_1 + a_2);\ i, k = 1, \ldots, n_1)\,.$$

6. - Base canonica in un gruppo di rango massimo

È noto (cfr. [**1**]) che ha validità del Teorema IV del n. precedente nel caso dei gruppi generalizzati non singolari equivale all'esistenza, in un gruppo di rango massimo G_n, di una base $f^1, \ldots, f^n$ che verifichi le condizioni di canonicità (cfr. [**3**] pag. 414).

$$(6.1)\qquad (f^i, f^j)^*(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \eta^{ij}(f^1, \ldots, f^n)\,.$$

Ci si chiede se è sempre possibile trovare una tale base anche in un gruppo generalizzato singolare, con P.P.G. definita da una matrice $(\eta^{\mu\nu}(\omega))$ singolare.

Si consideri all'uopo l'insieme di tutte le funzioni $f\colon \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, che godano di tutte le proprietà di regolarità di cui al n. **1**, e la matrice

$$\eta(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

È chiaro che, comunque si considerino tre funzioni φ_1, φ_2, φ_3 indipendenti in S, il gruppo generalizzato costruito a partire da φ_1, φ_2, φ_3 con la P.P.G. definita dalla matrice data η è un sottoinsieme di S ed ha senso chiedersi se in tale gruppo esistono tre funzioni indipendenti di S f^1, f^2, f^3 che verifichino le (6.1), cioè il sistema

$$(6.2)\qquad (f_1, f_2)^* = x\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - x\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x} = f_1\,,$$

$$(f_1, f_3)^* = x\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_3}{\partial y} - x\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_3}{\partial x} = 0\,, \quad (f_2, f_3)^* = x\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_3}{\partial y} - x\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial f_3}{\partial x} = 0\,.$$

Se consideriamo lo Jacobiano di f^1, f^2, f^3, si ha

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial f_3}{\partial z}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right),$$

dove si è sviluppato J secondo gli elementi della 3ª riga, e si è tenuto conto che i minori di $\partial f_1/\partial z$, $\partial f_2/\partial z$ sono nulli per la 2ª e 3ª delle (6.2).

Ricavando poi dalle stesse equazioni $\partial f_1/\partial x$ e $\partial f_2/\partial_x$ e sostituendo nello sviluppo di J, si ottiene $J = 0$. Ciò vuol dire che f^1, f^2, f^3 sono dipendenti, e quindi non è possibile trovare una base canonica nel gruppo generato da φ_1, φ_2, φ_3.

Si deduce che, in generale, in un gruppo generalizzato di funzioni di rango massimo non esiste una base che verifichi le condizioni (6.1).

7. - Conclusioni

L'assegnare una matrice quadrata $(\eta^{\alpha\beta}(\omega_1, \ldots, \omega_n))$, singolare, antisimmetrica e di ordine n ed s funzioni $F_i(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, con $s \leqslant n$, permette di costruire un gruppo generalizzato singolare di funzioni.

In tale gruppo, supposto non commutativo, si definiscono, al modo usuale, le funzioni singolari, che ne costituiscono un sottogruppo al quale appartengono tutte le eventuali funzioni neutre del gruppo, l'esistenza delle quali è dovuta al fatto che la matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ assegnata è singolare.

Di un gruppo generalizzato singolare di funzioni si determina il gruppo reciproco, a cui appartengono tutte le funzioni neutre rispetto ad $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$; viene così a mancare, per i gruppi generalizzati singolari di funzioni, la proprietà dei gruppi ordinari secondo la quale ogni gruppo di funzioni è il gruppo reciproco del proprio reciproco; questa proprietà continua a valere solo per i gruppi generalizzati singolari di funzioni che già in partenza contengono *tutte* le funzioni neutre.

Ogni gruppo generalizzato singolare di funzioni si può *sempre* estendere ad un gruppo di rango n, cioè di rango massimo, ma in generale in un gruppo generalizzato singolare di funzioni di rango massimo non è possibile determinare una base canonica, nel senso del n. **6**, rispetto alla matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ assegnata.

Bibliografia

[1] G. Andreassi, *Gruppi di funzioni generalizzati*, Rend. Mat. (in corso di stampa).

[2] L. P. Eisenhart, *Continuous groups of transformations*, Dover Publications Inc., New York 1961.

[**3**] N. Mukunda and E. C. G. Sudarshan, *Structure of the Dirac bracket in Classical Mechanics*, Department of Physics, Syracuse University Syracuse, New York april 1967.

[**4**] E. C. G. Sudarshan and N. Mucunda, *Classical dynamics: A modern perspective*, Wiley, New York 1974.

Summary

Singular generalized function groups are studied. After recalling the fundamental notions and definitions, we prove that for a singular group some properties of ordinary groups are still valid, as the existence of the reciprocal group and the extension of every group to a group a maximal rank.

Finally we prove by means of an example that it is not always possible to find, for a group of maximal rank, a canonical basis.

* * *