Riv. Mat. Univ. Parma (4) 5 (1979), 1-26

ANTONIO MAMBRIANI e GIUSEPPE MAMBRIANI (*)

Deralgebra ristretta:

primo passo verso una nuova « analisi funzionale »; Parte II.

1. - Considerazioni introduttorie.

Il lavoro precedente:

A. MAMBRIANI e G. MAMBRIANI, *Deralgebra ristretta: primo passo verso una nuova « analisi funzionale »*; **I** [Riv. Mat. Univ. Parma (Serie 4), Vol. 4, pp. 1-22],

si richiamerà, invece che con **I**, con *Parte* **I**.

Diamo a piè di pagina la « errata corrige » della *Parte* **I** (**). Nel n. **2** di questa *Parte* **II**, ritorniamo, inoltre, su quanto esposto nelle pagine 20 e 21 della *Parte* **I** (ad esclusione del n. **6.4**), per cambiare alcuni simboli, per fare alcune precisazioni e per ulteriori considerazioni.

2. - « Derfunzioni razionali intere semplici » in una variabile $x = x(t)$, e corrispondenti « equazioni deralgebriche semplici ».

2.1. – Nella *Parte* **I** (cfr. inizio di pag. 20) abbiamo concluso, in grande parallelismo con la formula $(2)_n$ di algebra A_1 (cfr. *Parte* **I**, pag. 4), che nella

(*) Indirizzi: A. MAMBRIANI, Istituto di Matematica, Università di Parma, 43100 Parma, Italia. G. MAMBRIANI, Istituto di Fisica, Università di Parma, 43100 Parma, Italia.

(**) Ecco la *errata corrige* della *Parte* **I**:

Pag. 3, riga 15 dall'alto, *invece di* « finite e univoche » *si legga* « finite, univoche e continue ».

Pag. 7, nel secondo membro della formula $(3)_2$ *sopprimere* lo sporco subito dopo D.

Pag. 20, righe 2 e 3 dall'alto, tutti i D in corsivo *mutarli* in D tondi.

Pag. 21, riga 8 dall'alto, *invece di* c o n t i n u e si legga c o n t i n u i.

Pag. 21, riga 9 dal basso, *invece di* $y^n e^{\int x\, dt}$ *si legga* $\mathrm{D}^n e^{\int x\, dt}$.

deralgebra $A_{1,1}$ vale la seguente formula:

$$(2)_1 \quad \left[\begin{aligned} &(D+\underleftarrow{\lambda_n})(D+\underleftarrow{\lambda_{n-1}})\dots(\underleftarrow{D}+\underleftarrow{\lambda_2})(D+\lambda_1)= \\ &\qquad = D^n + p_{1,t}D^{n-1} + p_{2,t}D^{n-2} + \dots + p_{n-2,t}D^2 + p_{n-1,t}D + p_{n,t}\,, \end{aligned}\right.$$

dove è (*):

$$\begin{aligned}
p_{1,t} &= \lambda_n + \lambda_{n-1} + \dots + \lambda_2 + \lambda_1\,,\\
p_{2,t} &= (\lambda_n \neg \lambda_{n-1} + \lambda_n \neg \lambda_{n-2} + \dots + \lambda_n \neg \lambda_1) + \\
&\quad + (\lambda_{n-1}\neg\lambda_{n-2} + \lambda_{n-1}\neg\lambda_{n-3} + \dots + \lambda_{n-1}\neg\lambda_1) + \dots + (\lambda_3\neg\lambda_2 + \lambda_3\neg\lambda_1) + \lambda_2\neg\lambda_1\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
p_{n-2,t} &= (\lambda_n\neg\lambda_{n-1}\neg\dots\neg\lambda_4\neg\lambda_3 + \lambda_n\neg\lambda_{n-1}\neg\dots\neg\lambda_4\neg\lambda_2 + \lambda_n\neg\lambda_{n-1}\neg\dots\neg\lambda_4\neg\lambda_1) + \\
&\quad + (\lambda_{n-1}\neg\lambda_{n-2}\neg\dots\neg\lambda_3\neg\lambda_2 + \lambda_{n-1}\neg\lambda_{n-2}\neg\dots\neg\lambda_3\neg\lambda_1) + \dots + \\
&\quad + (\lambda_{n-2}\neg\lambda_{n-3}\neg\dots\neg\lambda_2\neg\lambda_1)\,,\\
p_{n-1,t} &= (\lambda_n\neg\lambda_{n-1}\neg\dots\neg\lambda_3\neg\lambda_2 + \lambda_n\neg\lambda_{n-1}\neg\dots\neg\lambda_3\neg\lambda_1) + (\lambda_{n-1}\neg\lambda_{n-2}\neg\dots\neg\lambda_2\neg\lambda_1)\,,\\
p_{n,t} &= \lambda_n\neg\lambda_{n-1}\neg\dots\neg\lambda_2\neg\lambda_1\,,
\end{aligned}$$

$$[\lambda_1 \in \boldsymbol{F}_1^{(n-1)},\ \lambda_2 \in \boldsymbol{F}_1^{(n-2)},\ \dots,\ \lambda_{n-1} \in \boldsymbol{F}_1^{(1)},\ \lambda_n \in \boldsymbol{F}_1]\,.$$

Il polinomio operatorio, del secondo membro di $(2)_1$, avente ordinatamente i coefficienti

$$p_{0,t} \equiv 1,\ p_{1,t},\ p_{2,t},\ \dots,\ p_{n-2,t},\ p_{n-1,t},\ p_{n,t}\,,$$

si dirà un **funderivatore (ordinario) razionale intero semplice,** *di ordine* n, (la precisazione « semplice » vuole esprimere soltanto che il coefficiente di D^n è semplicemente $p_{0,t} \equiv 1$).

2.2. – Tenendo presente il n. **5** di *Parte* **I**, sviluppiamo ora alcune considerazioni utili nel seguito.

In un campo continuo $\boldsymbol{N}^*$ del piano-sfera complesso si considerino due funzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$ univoche e *non identicamente nulle*: la x abbia la

(*) Nel secondo membro di $(2)_1$ i simboli $p_{1,t}, p_{2,t}, \dots, p_{n-2,t}, p_{n-1,t}, p_{n,t}$ indicano, ordinatamente, le funzioni che nelle pagine 20 e 21 di *Parte* **I** sono state indicate con $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-2}, \mu_{n-1}, \mu_n$; tale mutamento ha il solo scopo di far sentire che queste funzioni $p_{k,t}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ di deralgebra $A_{1,1}$ sono in parallelismo a le costanti p_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ della formula $(2)_n$ di algebra A_1.

derivata prima (finita) $x' = x'(t)$ e la y abbia le derivate prima e seconda (finite) $y' = y'(t)$, $y'' = y''(t)$.

Proviamo che *da l'ipotesi*

$$(2)_2 \qquad x = \frac{y'}{y} \qquad [\text{limitatamente ai } t \in \boldsymbol{N}^* \text{ nei quali è } y \neq 0]\,,$$

segue

$$(2)_3 \qquad x^{\overline{2}|} = \frac{y''}{y} \qquad [\text{limitatamente ai } t \in \boldsymbol{N}^* \text{ nei quali è } y \neq 0]\,.$$

Invero, essendo $x^{\overline{2}|} = x^2 + x'$, da $(2)_2$ segue $x^{\overline{2}|} = (y'/y)^2 + (y'/y)'$, onde eseguendo successivamente un innalzamento a quadrato, una derivazione e semplificando, si ottiene

$$x^{\overline{2}|} = \frac{y'^2}{y^2} + \frac{y''y - y'y'}{y^2} = \frac{y''y}{y^2} = \frac{y''}{y}\,, \qquad \text{cioè proprio la } (2)_3\,.$$

La $(2)_3$ si può generalizzare completamente, in modo rapido, supponendo che la precedente funzione x appartenga via via a gli insiemi $\boldsymbol{F}_1^{(n-1)}$ ($n = 2$, $3, 4, \ldots$) [cfr. n. **4.1** di *Parte* **I**], come si è supposto nella formula $(5)_5$ di *Parte* **I** per la funzione $\lambda = \lambda(t)$. Infatti, applicando tale $(5)_5$ ad x (invece che a λ) si ha:

$$(2)_4 \qquad x^{\overline{n}|} = e^{-\overline{\int} x\, dt}\, \mathrm{D}^n\, e^{\overline{\int} x\, dt} \qquad [x \in \boldsymbol{F}_1^{(n-1)};\ n = 2, 3, 4, \ldots]\,,$$

dove *i piccoli tratti* sopra i segni degli integrali indefiniti indicano solo le più semplici determinazioni di tali integrali. Ponendo, ora,

$$e^{\overline{\int} x\, dt} = y \qquad [\text{limitatamente ai } t \text{ di } \boldsymbol{N}^* \text{ nei quali è } y \neq 0]\,,$$

la $(2)_4$ diventa

$$(2)_5 \quad x^{\overline{n}|} = \frac{y^{(n)}}{y} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)\ [\text{limitatamente ai } t \text{ di } \boldsymbol{N}^* \text{ nei quali è } y \neq 0]\,,$$

formula che per $n = 2$ dà proprio la $(2)_3$ e per $n = 1$ diventa la $(2)_2$.

2.3. – Al funderivatore razionale intero semplice, di ordine n, del secondo membro di $(2)_1$, applichiamo ora una funzione variabile $y = y(t)$, derivabile fino a l'ordine n. Si ottiene così un'espressione differenziale che uguagliata a zero ci dà:

$$(2)_6 \qquad y^{(n)} + p_{1,t}y^{(n-1)} + p_{2,t}y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-2,t}y'' + p_{n-1,t}y' + p_{n,t}y = 0\,,$$

la quale è una *equazione differenziale* (*ordinaria*) *lineare omogenea e semplice, di ordine* n. La precisazione *semplice* vuole esprimere solo che il coefficiente di $y^{(n)}$ è semplicemente $p_{0,t} \equiv 1$: questa affermazione di semplicità ha come conseguenza che la $(2)_6$ è priva di *punti singolari* (i punti singolari essendo dati dai valori di t che annullano il coefficiente della derivata $y^{(n)}$ di ordine massimo). I coefficienti $p_{1,t}, p_{2,t}, \ldots, p_{n-2,t}, p_{n-1,t}, p_{n,t}$ sono, poi, univoci e continui nel campo $\boldsymbol{N}^*$ del piano-sfera complesso.

È ben noto che un'equazione del tipo $(2)_6$ ha sempre infinite soluzioni, precisamente ha infiniti sistemi di n soluzioni particolari

$$y_1 = y_1(t), \qquad y_2 = y_2(t), \quad \ldots, \quad y_n = y_n(t)$$

caratterizzate da la proprietà di essere *linearmente indipendenti in tutto* il campo $\boldsymbol{N}^*$ (cfr., su ciò, il prossimo n. **3**): ad un simile insieme di soluzioni è stato dato il nome di *sistema fondamentale di soluzioni* di $(2)_6$.

Ciò premesso, la *soluzione generale* di $(2)_6$ è data da

$$(2)_7 \qquad y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n\,,$$

dove:

1) y è la funzione incognita di $(2)_6$,

2) $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono n costanti arbitrarie,

3) le funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni di $(2)_6$.

Da quanto si è richiamato su la proprietà caratterizzante le funzioni y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ di un sistema fondamentale, segue che *tali funzioni sono tutte non identicamente nulle nel campo* $\boldsymbol{N}^*$. La *soluzione identicamente nulla* $y \equiv 0$ di $(2)_6$ si ottiene da la sua soluzione generale $(2)_7$ soltanto facendo $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. Scartando simile soluzione $y \equiv 0$, avremo quindi per la $y = y(t)$, di $(2)_6$, dei $t \in \boldsymbol{N}^*$ nei quali è $y \neq 0$. Ne segue che da $(2)_6$ si può dedurre la nuova equazione:

$$(2)'_6 \qquad \left[\begin{array}{l} \dfrac{y^{(n)}}{y} + p_{1,t}\dfrac{y^{(n-1)}}{y} + p_{2,t}\dfrac{y^{(n-2)}}{y} + \ldots + p_{n-2,t}\dfrac{y''}{y} + p_{n-1,t}\dfrac{y'}{y} + p_{n,t} = 0 \\ \qquad [\text{limitatamente ai } t \in N^* \text{ nei quali è } y \neq 0]\,. \end{array}\right.$$

Qui, poichè i rapporti figuranti nel primo membro sono tutti eguali a quelli del secondo membro di $(2)_5$, si conclude che la $(2)'_6$ si può scrivere nella forma

$$(2)_8 \qquad x^{\overline{n}|} + p_{1,t}x^{\overline{n-1}|} + p_{2,t}x^{\overline{n-2}|} + \ldots + p_{n-2,t}x^{\overline{2}|} + p_{n-1,t}x + p_{n,t} = 0\,,$$

che si dirà l'**equazione deralgebrica** (*ordinaria*) *semplice corrispondente a la equazione differenziale* (*ordinaria*) *semplice* $(2)_6$. Diremo, poi, che il primo membro di $(2)_8$ è una

derfunzione razionale intera semplice,

di grado n, e si indicherà con il simbolo

$${}_{\mathrm{D}}\varphi(x) \qquad \text{(da leggersi « der fi di } x\text{ »)}\,.$$

Poichè risulta $x = y'/y$, osserviamo che la $(2)_8$ si può scrivere:

$$(2)'_8 \qquad \left(\frac{y'}{y}\right)^{\overline{n}|} + p_{1,t}\cdot\left(\frac{y'}{y}\right)^{\overline{n-1}|} + p_{2,t}\cdot\left(\frac{y'}{y}\right)^{\overline{n-2}|} + \ldots + p_{n-2,t}\cdot\left(\frac{y'}{y}\right)^{\overline{2}|} + p_{n-1,t}\cdot\frac{y'}{y} + p_{n,t} = 0,$$

e, confrontando $(2)'_6$ con $(2)'_8$, concludiamo che vale la formula

$$(2)_9 \qquad \frac{y^{(\nu)}}{y} = \left(\frac{y'}{y}\right)^{\overline{\nu}|} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Osserviamo ancora che, se nell'equazione differenziale $(2)_6$ ad y sostituiamo via via le soluzioni y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ di un sistema fondamentale di soluzioni, abbiamo n identità a zero, ciascuna delle quali divisa per la corrispondente y_k (sempre limitatamente ai $t \in N^*$ nei quali è $y_k \neq 0$), applicando la $(2)_9$ e ponendo $y'_k/y_k = x_k$, si ottengono le seguenti identità a zero:

$$x_k^{\overline{n}|} + p_{1,t}x_k^{\overline{n-1}|} + p_{2,t}x_k^{\overline{n-2}|} + \ldots + p_{n-2,t}x_k^{\overline{2}|} + p_{n-1,t}x_k + p_{n,t} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

esprimenti che le n funzioni distinte

$$(2)_{10} \qquad x_1 = y_1'/y_1, \ x_2 = y_2'/y_2, \ \ldots, \ x_n = y_n'/y_n ,$$

sono tutte soluzioni (o *radici*) della equazione deralgebrica $(2)_8$. Diremo quindi che le $(2)_{10}$ sono un *sistema fondamentale di radici della* $(2)_8$.

Crediamo ora opportuno di sviluppare un

Esempio. Partiamo da la equazione differenziale, del tipo $(2)_6$,

$$(2)_{11} \qquad y''' + 3\lambda y'' + 3\lambda^{\overline{2}|} y' + \lambda^{\overline{3}|} y = 0 ,$$

dove $\lambda = \lambda(t)$ è una data funzione avente (finite), in un campo $\boldsymbol{N}^*$ del piano-sfera complesso, le derivate λ' e λ''. Le espressioni delle derpotenze $\lambda^{\overline{2}|}$ e $\lambda^{\overline{3}|}$ sono date da la tabella del n. **5.5** di *Parte* **I**: $\lambda^{\overline{2}|} = \lambda^2 + \lambda'$, $\lambda^{\overline{3}|} = \lambda^3 + 3\lambda\lambda' + \lambda''$, di guisa che la $(2)_{11}$ si scrive più estesamente:

$$(2)_{11}' \qquad y''' + 3\lambda y'' + 3(\lambda^2 + \lambda')y' + (\lambda^3 + 3\lambda\lambda' + \lambda'')y = 0 .$$

La soluzione generale di tale equazione è data (come si può controllare) da

$$(2)_{12} \qquad y = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)\, e^{-\overline{\int}\lambda\, dt} ,$$

dove c_1, c_2, c_3 sono costanti arbitrarie e il *piccolo tratto*, sopra il segno di integrale indefinito, indica la più semplice determinazione di tale integrale. Eseguendo su $(2)_{11}'$ il passaggio analogo a quello fatto in precedenza per passare da $(2)_6$ a $(2)_6'$, si ha:

$$(2)_{11}'' \qquad \left[\begin{array}{l} \dfrac{y'''}{y} + 3\lambda \dfrac{y''}{y} + 3(\lambda^2 + \lambda')\dfrac{y'}{y} + (\lambda^3 + 3\lambda\lambda' + \lambda'') = 0 \\ \quad [\text{limitatamente ai } t \in \boldsymbol{N}^* \text{ nei quali è } y \neq 0]. \end{array}\right.$$

Qui, facendo il passaggio analogo a quello da $(2)_6'$ a $(2)_8$, si ottiene:

$$(2)_{13} \qquad x^{\overline{3}|} + 3\lambda x^{\overline{2}|} + 3(\lambda^2 + \lambda')x + (\lambda^3 + 3\lambda\lambda' + \lambda'') = 0 ,$$

che è l'equazione deralgebrica (ordinaria) semplice, di grado 3, corrispondente a l'equazione differenziale $(2)_{11}$, di ordine 3, da cui siamo partiti. Posto, per brevità,

$$A = e^{-\int \lambda \, dt}, \qquad \text{da cui} \qquad A' = -\lambda A,$$

da $(2)_{12}$ segue che un sistema fondamentale di soluzioni di $(2)_{11}$ è dato da

$$y_1 = A, \quad y_2 = tA, \quad y_3 = t^2 A,$$

da cui si ricava, in conformità a $(2)_{10}$, che

$$x_1 = \frac{A'}{A}, \quad x_2 = \frac{(tA)'}{tA} = \frac{A + tA'}{tA} = \frac{1}{t} + \frac{A'}{A}, \quad x_3 = \frac{(t^2A)'}{t^2A} = \frac{2tA + t^2A'}{t^2A},$$

ossia

$$x_1 = -\lambda, \quad x_2 = \frac{1}{t} - \lambda, \quad x_3 = \frac{2}{t} - \lambda,$$

è un sistema fondamentale di radici dell'equazione deralgebrica $(2)_{13}$.

3. - Lineare dipendenza e lineare indipendenza in campo complesso.

3.1. – La « lineare dipendenza » e la « lineare indipendenza » in campo r e a l e, fra un numero finito di funzioni di una stessa unica variabile, è già ben nota (*). Ora intendiamo occuparci delle stesse nozioni in campo c o m p l e s s o.

Siano date n funzioni univoche

$$(3)_1 \qquad f_1 = f_1(t), \quad f_2 = f_2(t), \quad \ldots, \quad f_n = f_n(t),$$

contenenti tutte una sola variabile t, e definite in un campo continuo N^* (limitato o no) del piano-sfera complesso (cfr. inizio di *Parte* **I**, n. **1.1**).

Si dice che le funzioni $(3)_1$ sono *linearmente dipendenti* in N^*, quando esistono n numeri $k_1, k_2, \ldots, k_n$ (reali o complessi) n o n t u t t i n u l l i tali che sia

$$(3)_2 \qquad k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_n f_n = 0 \qquad \text{per ogni } t \in N^*.$$

(*) Ad esempio, vedasi l'opera [**1**].

Si dice, invece, che le funzioni $(3)_1$ sono *linearmente indipendenti* in $\boldsymbol{N}^*$, quando n o n esistono n numeri $k_1, k_2, \dots, k_n$ n o n t u t t i n u l l i tali che valga la identità $(3)_2$.

3.2. – Le n funzioni $(3)_1$ abbiano in $\boldsymbol{N}^*$ le derivate (finite) dei primi $n-1$ ordini. Allora, possiamo formare il determinante, detto *Wronskiano*,

$$\mathrm{W}[f_1, f_2, \dots, f_n] \equiv \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & \cdots & f_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (t \in \boldsymbol{N}^*) .$$

Come si ha in campo r e a l e (**), anche in campo c o m p l e s s o vale il seguente fondamentale

T e o r e m a. *Affinchè le n funzioni $(3)_1$ siano*

l i n e a r m e n t e d i p e n d e n t i in $\boldsymbol{N}^*$

è necessario e sufficiente che valgano le due condizioni seguenti:

$(3)_2'$ $\qquad \mathrm{W}[f_1, f_2, \dots, f_n] = 0$ *per ogni* $t \in \boldsymbol{N}^*$;

$(3)_2''$ $\left[\right.$ *i complementi algebrici* $\mathrm{W}_{n,1}, \mathrm{W}_{n,2}, \dots, \mathrm{W}_{n,n}$ *degli elementi dell'ultima riga di* $\mathrm{W}[f_1, f_2, \dots, f_n]$ *siano n o n t u t t i n u l l i , per ogni* $t \in \boldsymbol{N}^*$.

Ne segue:

Affinchè le n funzioni $(3)_1$ siano

l i n e a r m e n t e i n d i p e n d e n t i in $\boldsymbol{N}^*$

è necessario e sufficiente che le due condizioni $(3)_2'$ e $(3)_2''$ non valgano contemporaneamente.

(**) Vedasi sempre l'opera [**1**] richiamata precedentemente.

Per le applicazioni seguenti occorre distinguere *due tipi di lineare indipendenza*:

1) Le funzioni $(3)_1$ si diranno *linearmente indipendenti* **in senso forte** *in un campo* N^*, quando si ha

$$(3)_3 \qquad W[f_1, f_2, \ldots, f_n] \neq 0 \qquad \textit{per ogni } t \in N^* .$$

2) Le funzioni $(3)_1$ si diranno *linearmente indipendenti* **in senso debole** *in un campo* N^*, in ogni altro caso diverso da $(3)_3$.

Esempio semplice. Le due funzioni $f_1 = t$, $f_2 = t^2 - 1$, per le quali è $W[t, t^2 - 1] = t^2 + 1$, sono linearmente indipendenti in senso forte in ogni campo N^*, del piano-sfera complesso, non contenente $t = \pm i$; mentre sono linearmente indipendenti in senso debole in ogni campo N^* contenente sia $+i$ che $-i$, oppure solo i o solo $-i$.

4. - Il determinante Vandermondiano.

4.1. - Consideriamo n funzioni

$$(4)_1 \qquad \eta_1 = \eta_1(t), \quad \eta_2 = \eta_2(t), \quad \ldots, \quad \eta_n = \eta_n(t)$$

che in un campo N^* del piano-sfera complesso abbiano i requisiti seguenti: sono univoche, sono *mai nulle*, hanno *le derivate* (finite) *dei primi* $n-1$ *ordini*. Un esempio semplice e importante di tali funzioni è il seguente:

$$(4)_1' \qquad \bar{\eta}_1 = e^{a_1 t}, \quad \bar{\eta}_2 = e^{a_2 t}, \quad \ldots, \quad \bar{\eta}_n = e^{a_n t},$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono dati numeri *finiti, non nulli* e *tutti diversi*.

Per le funzioni $(4)_1$ esiste il Wronskiano:

$$(4)_2 \qquad W[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n] \equiv \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \\ \eta_1' & \eta_2' & \cdots & \eta_n' \\ \eta_1'' & \eta_2'' & \cdots & \eta_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_1^{(n-1)} & \eta_2^{(n-1)} & \cdots & \eta_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (t \in N^*) .$$

Supponiamo ora, ulteriormente, che le funzioni $(4)_1$ siano *linearmente indipendenti in senso forte nel campo* $\boldsymbol{N}^*$, cioè si abbia [cfr. la $(3)_3$]:

$$(4)_3 \qquad \mathrm{W}[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n] \neq 0 \qquad \text{per ogni } t \in \boldsymbol{N}^* .$$

Consideriamo, poi, le funzioni

$$(4)_4 \qquad \eta_1'/\eta_1 = x_1, \quad \eta_2'/\eta_2 = x_2, \quad \ldots, \quad \eta_n'/\eta_n = x_n ,$$

le quali esistono, univoche e finite, in tutto $\boldsymbol{N}^*$. Integrando le $(4)_4$, si ottiene:

$$\log_e \eta_1 = \overline{\int} x_1\,\mathrm{d}t, \quad \log_e \eta_2 = \overline{\int} x_2\,\mathrm{d}t, \quad \ldots, \quad \log_e \eta_n = \overline{\int} x_n\,\mathrm{d}t ,$$

dove i « piccoli tratti » sopra i segni degli integrali indefiniti indicano le più semplici determinazioni di tali integrali [cfr. le $(2)_4$]. Se ne ricava:

$$(4)_5 \qquad \eta_k = e^{\overline{\int} x_k\,\mathrm{d}t} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) .$$

Ed ora consideriamo la formula $(5)_5$ di *Parte* **I**, formula che si può anche scrivere

$$\mathrm{D}^n\, e^{\int \lambda\,\mathrm{d}t} = e^{\int \lambda\,\mathrm{d}t}\, \lambda^{\overline{n}|} ,$$

oppure, introducendo la precedente precisazione dei *piccoli tratti* su gli integrali indefiniti, mutando λ in x_k ed n in ν, si ha:

$$\mathrm{D}^\nu\, e^{\overline{\int} x_k\,\mathrm{d}t} = e^{\overline{\int} x_k\,\mathrm{d}t}\, x_k^{\overline{\nu}|} ,$$

o, in forma più breve, tenendo presente la $(4)_5$,

$$(4)_6 \qquad \eta_k^{(\nu)} = \eta_k\, x_k^{\overline{\nu}|} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1) .$$

Questa $(4)_6$ permette di scrivere la $(4)_2$ nella forma:

$$(4)_2' \qquad \mathrm{W}[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n] \equiv \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \\ \eta_1 x_1 & \eta_2 x_2 & \cdots & \eta_n x_n \\ \eta_1 x_1^{\overline{2}|} & \eta_2 x_2^{\overline{2}|} & \cdots & \eta_n x_n^{\overline{2}|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_1 x_1^{\overline{n-1}|} & \eta_2 x_2^{\overline{n-1}|} & \cdots & \eta_n x_n^{\overline{n-1}|} \end{vmatrix} \qquad (t \in \boldsymbol{N}^*) ,$$

dove, nel determinante a secondo membro, gli elementi della prima colonna hanno il fattore comune η_1, gli elementi della seconda colonna hanno il fattore comune η_2, e così via, infine gli elementi dell'ultima colonna hanno il fattore comune η_n. Per le proprietà dei determinanti, questi fattori comuni si possono porre tutti in evidenza fuori del determinante. Ciò fatto, resta un determinante che proponiamo di indicare con il simbolo

$$ {}_{\mathrm{D}}\mathrm{V}[x_1, x_2, \dots, x_n] \, , $$

da leggersi « der vu di $x_1, x_2, \dots, x_n$ ». La $(4)'_2$ si scrive, allora, brevemente:

$$ (4)''_2 \qquad \mathrm{W}[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] \equiv \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n \cdot {}_{\mathrm{D}}\mathrm{V}[x_1, x_2, x_n] \, , \qquad t \in \boldsymbol{N}^* \, , $$

nella quale il determinante

$$ (4)_7 \qquad {}_{\mathrm{D}}\mathrm{V}[x_1, x_2, \dots, x_n] \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^{\overline{2|}} & x_2^{\overline{2|}} & \cdots & x_n^{\overline{2|}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{\overline{n-1|}} & x_2^{\overline{n-1|}} & \cdots & x_n^{\overline{n-1|}} \end{vmatrix} \qquad (t \in \boldsymbol{N}^*) $$

è stato chiamato da noi

il **Vandermondiano** *relativo a le funzioni* $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Manifestamente, il nome Vandermondiano vuole ricordare l'analogia di questo nuovo determinante con il ben noto determinante di VANDERMONDE relativo a *numeri finiti e non nulli*, ciò che si ha esattamente quando le η_k sono date da le $\bar{\eta}_k$ di $(4)'_1$. Poichè in $(4)''_2$, per $t \in \boldsymbol{N}^*$, risulta: $\mathrm{W}[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] \neq 0$ in virtù di $(4)_3$, $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n \neq 0$ per la definizione delle $(4)_1$, si conclude:

il Vandermondiano $(4)_7$ *è* *non nullo* *in tutto il campo* $\boldsymbol{N}^*$.

4.2. – Osserviamo che il Vandermondiano di due sole funzioni $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, essendo eguale a $x_2 - x_1$, sarà *non nullo* in un campo $\boldsymbol{N}^*$ se e solo se i valori delle due funzioni, per ogni t del campo, sono distinti. In generale porremo la seguente

Definizione. Un certo numero n $(\geqslant 2)$ di funzioni

$$ x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \dots, \quad x_n = x_n(t) $$

[come quelle che individuano il Vandermondiano $(4)_7$ e che sono date da le $(4)_4$, mediante le $(4)_1$ supposte «linearmente indipendenti in senso forte» in un campo N^* (cfr. n. **3.2**)] si diranno:

funzioni distinte in senso forte *nel campo* N^*,

quando, essendo ν un intero positivo con $2 \leqslant \nu \leqslant n$, avviene che per qualunque sottoinsieme di ν delle n funzioni $x_1, x_2, \dots, x_n$, il corrispondente Vandermondiano, d'ordine ν, è non nullo nel campo N^*.

5. - Interpolazione, in deralgebra $A_{1,1}$, con « derfunzioni razionali intere semplici ».

5.1. – Per facilitare lo sviluppo della deralgebra $A_{1,1}$, al precedente richiamo di algebra A_1 (cfr. n. **2.1** e n. **2.2** della *Parte* **I**), facciamo seguire, ora, un secondo richiamo di algebra A_1.

Indichiamo con $f(t)$ il secondo membro della $(2)_n$ di *Parte* **I**, cioè poniamo

$$f(t) \equiv t^n + p_1 t^{n-1} + p_2 t^{n-2} + \dots + p_{n-2} t^2 + p_{n-1} t + p_n \,.$$

Questa $f(t)$ si dirà una *funzione razionale intera semplice* di grado n (la precisazione *semplice* esprime che il coefficiente di t^n è semplicemente $p_0 = 1$).

Per questa $f(t)$ abbiamo, in algebra A_1, il seguente Problema di interpolazione: *Determinare una funzione razionale intera semplice $f(t)$, di grado n, che per n valori $t_1, t_2, \dots, t_n$, non nulli e distinti, della variabile t, assuma rispettivamente n prefissati valori $b_1, b_2, \dots, b_n$.*

Tale problema si traduce nella risoluzione del sistema lineare seguente:

$$(5)_1 \qquad \begin{cases} p_1 t_1^{n-1} + p_2 t_1^{n-2} + \dots + p_{n-2} t_1^2 + p_{n-1} t_1 + p_n = b_1 - t_1^n \\ p_1 t_2^{n-1} + p_2 t_2^{n-2} + \dots + p_{n-2} t_2^2 + p_{n-1} t_2 + p_n = b_2 - t_2^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1 t_n^{n-1} + p_2 t_n^{n-2} + \dots + p_{n-2} t_n^2 + p_{n-1} t_n + p_n = b_n - t_n^n \,, \end{cases}$$

dove le incognite sono date dagli n coefficienti $p_1, p_2, \dots, p_{n-2}, p_{n-1}, p_n$; inoltre, per brevità, ci siamo permesso di trasportare nei secondi membri i primi termini (delle equazioni), cioè $t_1^n, t_2^n, \ldots, t_n^n$, in quanto essi sono quantità note. Il determinante di questo sistema lineare è dato da

$$\Delta = \begin{vmatrix} t_1^{n-1} & t_1^{n-2} & \cdots & t_1 & 1 \\ t_2^{n-1} & t_2^{n-2} & \cdots & t_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_n^{n-1} & t_n^{n-2} & \cdots & t_n & 1 \end{vmatrix},$$

che è *certamente non nullo*: invero, da Δ deduciamo il nuovo determinante $\bar{\Delta}$ le cui righe successive [prima, seconda, ..., $(n-1)^{\text{esima}}$, n^{esima}] sono in Δ, ordinatamente, la ultima colonna, la penultima colonna, ..., la seconda colonna, infine l'ultima colonna. Per le regole sui determinanti, sarà allora $\bar{\Delta} = \pm \Delta$. E poichè $\bar{\Delta}$ è esattamente il cosiddetto « determinante di VANDERMONDE relativo ai numeri $t_1, t_2, \ldots, t_n$, supposti non nulli e distinti » risulterà $\bar{\Delta} \neq 0$, onde sarà pure $\Delta \neq 0$. Pertanto, il sistema lineare $(5)_1$ ha una soluzione ed una sola, che si ottiene con la regola di CRAMER.

Si conclude quindi: *Esiste una ed una sola funzione razionale intera semplice $f(t)$, di grado n, che per n valori non nulli e distinti della variabile t, assuma n prefissati valori.*

Si può notare che non vi è alcuna speciale condizione su la scelta dei valori $b_1, b_2, \ldots, b_n$, i quali possono essere anche tutti eguali ed in particolare anche tutti nulli.

5.2. – Passiamo ora a la deralgebra $A_{1,1}$ e cerchiamo di svilupparne la parte in parallelismo al richiamo di algebra A_1 argomento del n. **5.1.**

Ad una « funzione razionale intera semplice $f(t)$, di grado n » abbiamo già fatto corrispondere in $A_{1,1}$ una « derfunzione razionale intera semplice, di grado n » data dal primo membro dell'equazione $(2)_8$, cioè da

$$(5)_2 \qquad {}_{\mathrm{D}}\varphi(x) \equiv x^{\overline{n|}} + p_{1,t}\, x^{\overline{n-1|}} + p_{2,t}\, x^{\overline{n-2|}} + \ldots + p_{n-2,t}\, x^{\overline{2|}} + p_{n-1,t}\, x + p_{n,t}\,,$$

dove i coefficienti $p_{k,t}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-2, n-1, n)$ sono funzioni continue nel loro campo N^* di definizione.

Per questa ${}_{\mathrm{D}}\varphi(x)$ abbiamo, in deralgebra $A_{1,1}$, il seguente Problema di interpolazione: *Determinare una « derfunzione razionale intera semplice » ${}_{\mathrm{D}}\varphi(x)$ (di grado n), la quale per ogni insieme di funzioni $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$ distinte in senso forte nel campo N^** (cfr. l'affermazione a la fine del n. **4.2**) *assuma rispettivamente n prefissate determinazioni $\beta_1 = \beta_1(t)$, $\beta_2 = \beta_2(t)$, ..., $\beta_n = \beta_n(t)$.*

Tale problema si traduce nella risoluzione del sistema lineare seguente:

$$(5)_3 \qquad \begin{cases} p_{1,t}x_1^{\overline{n-1|}} + p_{2,t}x_1^{\overline{n-2|}} + \dots + p_{n-2,t}x_1^{\overline{2|}} + p_{n-1,t}x_1 + p_{n,t} = \beta_1 - x_1^{\overline{n|}} \\ p_{1,t}x_2^{\overline{n-1|}} + p_{2,t}x_2^{\overline{n-2|}} + \dots + p_{n-2,t}x_2^{\overline{2|}} + p_{n-1,t}x_2 + p_{n,t} = \beta_2 - x_2^{\overline{n|}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_{1,t}x_n^{\overline{n-1|}} + p_{2,t}x_n^{\overline{n-2|}} + \dots + p_{n-2,t}x_n^{\overline{2|}} + p_{n-1,t}x_n + p_{n,t} = \beta_n - x_n^{\overline{n|}}\,, \end{cases}$$

dove le incognite sono date dagli n coefficienti $p_{1,t}, p_{2,t}, \dots, p_{n-2,t}, p_{n-1,t}, p_{n,t}$; inoltre, per brevità, ci siamo permesso di trasportare nei secondi membri i primi termini (delle equazioni) dati da $x_1^{\overline{n|}}, x_2^{\overline{n|}}, \dots, x_n^{\overline{n|}}$, in quanto essi sono quantità note. Il determinante di questo sistema è dato da

$$_{\mathrm{D}}\Delta = \begin{vmatrix} x_1^{\overline{n-1|}} & x_1^{\overline{n-2|}} & \cdots & x_1^{\overline{2|}} & x_1 & 1 \\ x_2^{\overline{n-1|}} & x_2^{\overline{n-2|}} & \cdots & x_2^{\overline{2|}} & x_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{\overline{n-1|}} & x_n^{\overline{n-2|}} & \cdots & x_n^{\overline{2|}} & x_n & 1 \end{vmatrix},$$

che *è certamente non nullo per ogni* $t \in N^*$. Infatti, se da $_{\mathrm{D}}\Delta$ deduciamo il nuovo determinante $_{\mathrm{D}}\bar{\Delta}$ le cui riche successive [prima, seconda, ..., $(n-1)^{\mathrm{esima}}$, n^{esima}] sono in $_{\mathrm{D}}\Delta$, ordinatamente, l'ultima colonna, la penultima colonna, ..., la seconda colonna e infine la prima colonna, si constata subito che $_{\mathrm{D}}\bar{\Delta}$ è esattamente il Vandermondiano $(4)_7$ che è non nullo in $\boldsymbol{N}^*$. Pertanto il sistema lineare $(5)_3$ ha una ed una sola soluzione, che si ottiene con la regola di CRAMER. Si conclude quindi:

Esiste una ed una sola « derfunzione razionale intera semplice » $_{\mathrm{D}}\varphi(x)$ *(di grado n) che assuma determinazioni prefissate per ogni ennupla di valori distinti in senso forte nel campo $\boldsymbol{N}^*$ attribuiti a la variabile $x = x(t)$.*

Si può osservare che non vi è alcuna speciale condizione su la scelta delle determinazioni $\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_n(t)$, le quali potrebbero anche essere tutte uguali e in particolare tutte nulle.

6. - La « derderivazione » e la formula tayloriana per le « derfunzioni razionali intere semplici ».

6.1. – Riprendiamo a considerare in A_1 (cfr. inizio del n. **5.1**) la « funzione razionale intera semplice »

$$(6)_1 \qquad f(t) \equiv t^n + p_1 t^{n-1} + p_2 t^{n-2} + \dots + p_{n-2}t^2 + p_{n-1}t + p_n\,.$$

Dando, in $(6)_1$, a la t un incremento arbitrario h (reale o complesso), abbiamo

$$f(t+h) \equiv (t+h)^n + p_1 \cdot (t+h)^{n-1} + p_2 \cdot (t+h)^{n-2} + \dots$$
$$\dots + p_{n-2} \cdot (t+h)^2 + p_{n-1} \cdot (t+h) + p_n \,.$$

Qui, sviluppando le varie potenze $(t+h)^\nu$ $(\nu = n, n-1, n-2, \dots, 2)$ mediante la cosiddetta formula di Newton per la potenza di un binomio, si ottiene:

$$\begin{aligned} f(t+h) &\equiv \\ &\equiv \{t^n + nt^{n-1}h + \binom{n}{2} t^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n-2} t^2 h^{n-2} + \binom{n}{n-1} t h^{n-1} + h^n\} + \\ &+ p_1 \cdot \{t^{n-1} + (n-1)t^{n-2}h + \binom{n-1}{2} t^{n-3}h^2 + \dots + \binom{n-1}{n-2} t h^{n-2} + h^{n-1}\} + \\ &+ p_2 \cdot \{t^{n-2} + (n-2)t^{n-3}h + \binom{n-2}{2} t^{n-4}h^2 + \dots + h^{n-2}\} + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ p_{n-2} \cdot \{t^2 + 2th + h^2\} + \\ &+ p_{n-1} \cdot \{t + h\} + \\ &+ p_n \,, \end{aligned}$$

dove abbiamo incolonnati i vari termini aventi una stessa potenza di h.

In questa espressione di $f(t+h)$ ordiniamo, invece, i termini secondo le successive potenze di h, cioè: nella riga iniziale (o riga zero) scriviamo i termini con il fattore h^0 $(=1)$, ossia non contenenti h; nella riga 1 scriviamo i termini con il fattore $h^1 = h$; nella riga 2 scriviamo i termini con il fattore $h^2/2!$, ecc. . Abbiamo così:

$$\begin{aligned} f(t+h) &\equiv \\ &\equiv [t^n + p_1 t^{n-1} + p_2 t^{n-2} + \dots + p_{n-2}t^2 + p_{n-1}t + p_n] + \\ &+ h \cdot [nt^{n-1} + (n-1)p_1 t^{n-2} + (n-2)p_2 t^{n-3} + \dots + 2p_{n-2}t + 1 \cdot p_{n-1}] + \\ &+ \frac{h^2}{2!} \cdot [n(n-1)t^{n-2} + (n-1)(n-2)p_1 t^{n-3} + (n-2)(n-3)p_2 t^{n-4} + \dots + 2 \cdot 1 \cdot p_{n-2}] + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} \cdot [n(n-1) \dots 3\, t^2 + (n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2\, p_1 t + (n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1 \cdot p_2] + \\ &+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \cdot [n(n-1) \dots 3 \cdot 2\, t + (n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot p_1] + \\ &+ \frac{h^n}{n!} \cdot n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \,. \end{aligned}$$

In questo secondo membro le parentesi quadre sono n. Nella prima parentesi quadra vi è la funzione razionale intera semplice di partenza, nelle altre parentesi quadre vi sono le funzioni razionali intere che discendono da $f(t)$ applicando una o più volte la sostituzione seguente:

$$(6)_2 \qquad \sigma_t = \begin{bmatrix} t^n, & t^{n-1}, & t^{n-2}, & \dots, & t^2, & t, & 1 \\ nt^{n-1}, & (n-1)t^{n-2}, & (n-2)t^{n-3}, & \dots, & 2t, & 1, & 0 \end{bmatrix},$$

la quale a t^n sostituisce nt^{n-1}, a t^{n-1} sostituisce $(n-1)t^{n-2}$, ecc..

La funzione razionale intera contenuta nella seconda parentesi quadra è quindi esattamente $\sigma_t f(t)$ e si indica con il simbolo $f'(t)$, che si legge « effe primo di t » e si chiama la *derivata prima* di $f(t)$. È dunque:

$$\sigma_t f(t) = f'(t) \equiv nt^{n-1} + (n-1)p_1 t^{n-2} + (n-2)p_2 t^{n-3} + \dots + 2p_{n-2}t + p_{n-1}.$$

La funzione razionale intera contenuta nella terza parentesi quadra, nella precedente espressione di $f(t+h)$, è esattamente $\sigma_t^2 f(t)$, e si indica con il simbolo $f''(t)$, che si legge « effe secondo di t » e si chiama la *derivata seconda* di $f(t)$. È dunque:

$$\sigma_t^2 f(t) = f''(t) \equiv n(n-1)t^{n-2} + (n-1)(n-2)p_1 t^{n-3} + (n-2)(n-3)p_2 t^{n-4} + \dots + 2\cdot 1\, p_{n-2},$$

E così via. Infine, la funzione razionale intera contenuta nella n^{esima} parentesi quadra è esattamente $\sigma_t^{n-1} f(t)$ e si indica con il simbolo $f^{(n-1)}(t)$, che si legge « effe $(n-1)^{\text{esima}}$ di t » e si chiama la *derivata* $(n-1)^{\text{esima}}$ di $f(t)$. Si ha dunque:

$$\sigma_t^{n-1} f(t) = f^{(n-1)}(t) \equiv n(n-1)\dots 3\cdot 2\, t + (n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1\cdot p_1 .$$

Vi è poi un ultimo termine da considerare (in cui non figura una parentesi quadra), dato da $n(n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1 = n! = \sigma_t^n f(t)$, da indicarsi con il simbolo $f^{(n)}(t)$, che si legge « effe n^{esima} di t » e si chiama la *derivata* n^{esima} di $f(t)$. Si ha dunque:

$$\sigma_t^n f(t) = f^{(n)}(t) \equiv n!.$$

Segue poi:

$$f^{(n+1)}(t) = f^{(n+2)}(t) = \dots \equiv 0.$$

Concludiamo che la precedente espressione di $f(t+h)$ si può scrivere concisamente così:

$$(6)_3 \qquad f(t+h) \equiv f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2!}f''(t) + \dots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(t) + \\ + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(t),$$

identità detta la *formula di* TAYLOR *per le funzioni razionali intere* (cfr., ad esempio, l'opera [**2**]).

6.2. – Passiamo ora a la deralgebra $A_{1,1}$ e cerchiamo di sviluppare la parte in parallelismo al richiamo di algebra A_1 argomento del n. **6.1.**

Riprendiamo la « derfunzione razionale intera semplice » $(\mathbf{5})_2$ e diamo in essa a la variabile $x = x(t)$ un incremento arbitrario $h_t \in \boldsymbol{F}_1^{(n-1)}$ [cfr. la $(4)_1$ di *Parte* **I**]. Abbiamo:

$$(6)_4 \qquad {}_{\mathrm{D}}\varphi(x+h_t) \equiv (x+h_t)^{\overline{n|}} + p_{1,t}\cdot(x+h_t)^{\overline{n-1|}} + p_{2,t}\cdot(x+h_t)^{\overline{n-2|}} + \dots +$$
$$+ p_{n-2,t}\cdot(x+h_t)^{\overline{2|}} + p_{n-1,t}\cdot(x+h_t) + p_{n,t}\,.$$

Qui, sviluppando le varie derpotenze del binomio $x + h_t$ mediante la formula $(5)_{10}$ di *Parte* **I**, si ha:

$$\begin{aligned}
&{}_{\mathrm{D}}\varphi(x+h_t) \equiv \\
&\equiv \{x^{\overline{n|}} + n x^{\overline{n-1|}}\,h_t + \binom{n}{2} x^{\overline{n-2|}}\,h_t{}^{\overline{2|}} + \dots + \binom{n}{n-2} x^{\overline{2|}}\,h_t{}^{\overline{n-2|}} + \binom{n}{n-1} x h_t{}^{\overline{n-1|}} + h_t{}^{\overline{n|}}\} + \\
&+ p_{1,t}\cdot\{x^{\overline{n-1|}} + (n-1)\,x^{\overline{n-2|}}\,h_t + \binom{n-1}{2} x^{\overline{n-3|}}\,h_t{}^{\overline{2|}} + \dots + \binom{n-1}{n-2} x h_t{}^{\overline{n-2|}} + h_t{}^{\overline{n-2|}}\} + \\
&+ p_{2,t}\cdot\{x^{\overline{n-2|}} + (n-2)\,x^{\overline{n-3|}}\,h_t + \binom{n-2}{2} x^{\overline{n-4|}}\,h_t{}^{\overline{2|}} + \dots + h_t{}^{\overline{n-2|}}\} + \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ p_{n-2,t}\cdot\{x^{\overline{2|}} + 2\,x\,h_t + h_t{}^{\overline{2|}}\} + \\
&+ p_{n-1,t}\cdot\{x + h_t\} + \\
&+ p_{n,t}\,,
\end{aligned}$$

dove risultano incolonnati i vari termini aventi una stessa derpotenza di h_t.

Ed ora, ordiniamo i termini di ${}_{\mathrm{D}}\varphi(x+h_t)$ secondo le successive derpotenze di h_t, precisamente:

nella riga iniziale (o riga zero) mettiamo i termini con il fattore $h_t{}^{\overline{0|}} = 1$ (cioè i termini non contenenti h_t);

nella riga seguente (o riga 1) mettiamo i termini con il fattore $h_t{}^{\overline{1|}} = h_t$;

nella riga successiva (o riga 2) mettiamo i termini con il fattore $h_t{}^{\overline{2|}}/2\,!$;

. . . .

nella riga $n-2$ mettiamo i termini con il fattore $h_t{}^{\overline{n-2|}}/(n-2)\,!$;

nella riga $n-1$ mettiamo i termini con il fattore $h_t{}^{\overline{n-1|}}/(n-1)\,!$;

infine, nella ultima riga (o riga n) mettiamo l'ultimo termine rimasto, con il fattore $h_t{}^{\overline{n|}}/n\,!$.

Abbiamo così, in perfetta analogia con quanto richiamato al n. **6.1**,

$$
\begin{array}{llll}
{}_{\mathrm{D}}\varphi(x+h_t) \equiv & & & \\
\equiv & [x^{\overline{n}|} & +\, p_{1,t}x^{\overline{n-1}|} & +\, p_{2,t}x^{\overline{n-2}|} + \\
 & & & +\ldots+p_{n-2,t}x^{\overline{2}|}+p_{n-1,t}x+p_{n,t}] \\
+\, h_t & \cdot[nx^{\overline{n-1}|} & +\,(n-1)p_{1,t}x^{\overline{n-2}|} & +\,(n-2)p_{2,t}x^{\overline{n-3}|} + \\
 & & & +\ldots+2p_{n-2,t}x\ +1\cdot p_{n-1,t}] \\
+\, \dfrac{h_t^{\overline{2}|}}{2!} & \cdot[n(n-1)x^{\overline{n-2}|} & +\,(n-1)(n-2)p_{1,t}x^{\overline{n-3}|} & +\,(n-2)(n-3)p_{2,t}x^{\overline{n-4}|} + \\
 & & & +\ldots+2\cdot 1p_{n-2,t}] \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
+\, \dfrac{h_t^{\overline{n-2}|}}{(n-2)!} & \cdot[n(n-1)\ldots 3\,x^{\overline{2}|} & +\,(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\,p_{1,t}x & +\,(n-2)(n-3)\ldots 2\cdot 1p_{2,t}] \\
+\, \dfrac{h_t^{\overline{n-1}|}}{(n-1)!} & [n(n-1)\ldots 3\cdot 2\,x+(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1\,p_{1,t}] & & \\
+\, \dfrac{h_t^{\overline{n}|}}{n!} & \cdot n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\,. & &
\end{array}
$$

Le parentesi quadre che figurano in ${}_{\mathrm{D}}\varphi(x+h_t)$ sono n: nella prima parentesi quadra vi è proprio l'espressione di ${}_{\mathrm{D}}\varphi(x)$, nelle altre successive parentesi quadre vi sono invece derfunzioni che discendono da ${}_{\mathrm{D}}\varphi(x)$ applicando la regola espressa da la sostituzione seguente:

$$
(6)_5 \qquad \mathrm{S}_x = \begin{bmatrix} x^{\overline{n}|}\ , & x^{\overline{n-1}|}\ , & x^{\overline{n-2}|}\ , & \ldots, & x^{\overline{2}|}, & x, & 1 \\ nx^{\overline{n-1}|}, & (n-1)x^{\overline{n-2}|}, & (n-2)x^{\overline{n-3}|}, & \ldots, & 2x, & 1, & 0 \end{bmatrix},
$$

la quale a la derpotenza $x^{\overline{n}|}$ sostituisce $nx^{\overline{n-1}|}$, a la derpotenza $x^{\overline{n-1}|}$ sostituisce $(n-1)x^{\overline{n-2}|}$, ecc..

La derfunzione contenuta nella seconda parentesi quadra della ultima espressione di ${}_{\mathrm{D}}\varphi(x+h)$ è esattamente $\mathrm{S}_{x\,\mathrm{D}}\varphi(x)$ e si indicherà con il simbolo ${}_{\mathrm{D}}\varphi^{[1]}(x)$, che si leggerà « der fi primo di x » e si chiamerà

la **derderivata prima** di ${}_{\mathrm{D}}\varphi(x)$.

È dunque:

$$
\mathrm{S}_{x\,\mathrm{D}}\varphi(x) = {}_{\mathrm{D}}\varphi^{[1]}(x) \equiv
$$
$$
\equiv nx^{\overline{n-1}|}+(n-1)p_{1,t}x^{\overline{n-2}|}+(n-2)p_{2,t}x^{\overline{n-3}|}+\ldots+2p_{n-2,t}x+1\cdot p_{n,t}.
$$

La derfunzione contenuta nella terza parentesi quadra è esattamente $S_x\,{}_D\varphi(x)$ e si indicherà con il simbolo ${}_D\varphi^{[2]}(x)$, che si leggerà « der fi secondo di x » e si chiamerà la **derderivata seconda** di ${}_D\varphi(x)$. Si ha dunque:

$$S_x\,{}_D\varphi(x) = {}_D\varphi^{[2]}(x) \equiv$$
$$\equiv n(n-1)x^{\overline{n-2|}} + (n-1)(n-2)p_{1,t}x^{\overline{n-3|}} + (n-2)(n-3)p_{2,t}x^{\overline{n-4|}} + \ldots + 2\cdot 1 p_{n-2,t}\,.$$

E così via. La derfunzione contenuta nella $(n-1)^{\text{esima}}$ parentesi quadra è esattamente $S_x^{n-2}\,{}_D\varphi(x)$ e si indicherà con il simbolo ${}_D\varphi^{[n-2]}(x)$, che si leggerà « der fi $(n-2)^{\text{esimo}}$ di x » e si chiamerà la **derderivata** $(n-2)^{\text{esima}}$ di ${}_D\varphi(x)$. Si ha quindi:

$$S_x^{n-2}\,{}_D\varphi(x) = {}_D\varphi^{[n-2]}(x) \equiv$$
$$\equiv n(n-1)\ldots 3x^{\overline{2|}} + (n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2p_{1,t}x + (n-2)(n-3)\ldots 2\cdot 1p_{2,t}\,.$$

Infine, la derfunzione contenuta nella n^{esima} parentesi quadra è esattamente $S_x^{n-1}\,{}_D\varphi(x)$ e si indicherà con il simbolo ${}_D\varphi^{[n-1]}(x)$, che si leggerà « der fi $(n-1)^{\text{esimo}}$ di x » e si chiamerà la **derderivata** $(n-1)^{\text{esima}}$ di ${}_D\varphi(x)$. Si ha dunque:

$$S_x^{n-1}\,{}_D\varphi^{[n-1]}(x) \equiv n(n-1)\ldots 3\cdot 2x + (n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\cdot p_{1,t}\,.$$

Vi è poi un ultimo termine da considerare (in cui non compare una parentesi quadra) dato da $n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n! = S_x^n\,{}_D\varphi(x)$, da indicarsi con il simbolo ${}_D\varphi^{[n]}(x)$. Si ha dunque:

$$S_x^n\,{}_D\varphi(x) = {}_D\varphi^{[n]}(x) \equiv n!\,.$$

Segue poi:

$${}_D\varphi^{[n+1]}(x) = {}_D\varphi^{[n+2]}(x) = \ldots \equiv 0\,.$$

In luogo dei simboli ${}_D\varphi^{[1]}(x)$, ${}_D\varphi^{[2]}(x)$, ... useremo anche, ordinatamente, i simboli

$${}_D D\,{}_D\varphi(x),\ {}_D D^2\,{}_D\varphi(x),\ \ldots,$$

dove ${}_D D$ sarà il simbolo dell'*operatore di derderivazione.*

Concludendo, l'ultimo sviluppo precedente di ${}_{\mathrm{D}}\varphi(x + h_t)$ si scriverà concisamente nella forma:

$$(6)_6 \qquad \begin{cases} {}_{\mathrm{D}}\varphi(x + h_t) \equiv {}_{\mathrm{D}}\varphi(x) + h_t\, {}_{\mathrm{D}}\varphi^{[1]}(x) + \dfrac{h_t^{\overline{2}|}}{2!}\, {}_{\mathrm{D}}\varphi^{[2]}(x) + \ldots + \\ \qquad + \dfrac{h_t^{\overline{n-2}|}}{(n-2)!}\, {}_{\mathrm{D}}\varphi^{[n-2]}(x) + \dfrac{h_t^{\overline{n-1}|}}{(n-1)!}\, {}_{\mathrm{D}}\varphi^{[n-1]}(x) + \dfrac{h_t^{\overline{n}|}}{n!}\, {}_{\mathrm{D}}\varphi^{[n]}(x)\,, \end{cases}$$

identità che chiameremo la *formula tayloriana per le « derfunzioni razionali intere semplici »*.

6.3. – Osserviamo subito che questa *operazione di derderivazione*, che nel precedente n. **6.2** si è applicata soltanto a « derfunzioni razionali intere semplici », nel seguito sarà applicata anche a derfunzioni di tipo molto più generale, come si vedrà più avanti sviluppando ulteriormente la $A_{1,1}$.

7. - Decomposizione di una « derfunzione razionale intera semplice » in un derprodotto di fattori lineari nella variabile x.

7.1. – Sviluppando, ora, la parte di « deralgebra $A_{1,1}$ » che è in completo parallelismo a la parte di « algebra A_1 » sviluppata nel n. **2.1** di *Parte* **I**.

Ai binomi elementari [indicati nella $(2)_0$ di *Parte* **I**]

$$(7)_0 \qquad t + a_1, \quad t + a_2, \quad t + a_3, \quad \ldots,$$

dove t è la variabile numerica di A_1, ed $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sono prefissati numeri dell'insieme numerico $\boldsymbol{N}$, facciamo corrispondere in $A_{1,1}$ i binomi

$$(7)'_0 \qquad x + \lambda_1, \quad x + \lambda_2, \quad x + \lambda_3, \quad \ldots,$$

dove $x = x(t)$ è la funzione variabile di $A_{1,1}$ e $\lambda_1 = \lambda_1(t)$, $\lambda_2 = \lambda_2(t)$, $\lambda_3 = \lambda_3(t)$, ... sono prefissate funzioni delle famiglie $\boldsymbol{F}_1$ del n. **4** di *Parte* **I**.

Ed ora, a gli infiniti prodotti di A_1 [cfr. la $(2)_1$ di *Parte* **I**], cioè:

$$(7)_1 \qquad (t + a_2)(t + a_1), \quad (t + a_3)(t + a_2)(t + a_1), \\ (t + a_4)(t + a_3)(t + a_2)(t + a_1), \ldots,$$

facciamo corrispondere, in $A_{1,1}$, ordinatamente gli infiniti derprodotti seguenti:

$$(7)'_1 \qquad (x + \lambda_2) \neg (x + \lambda_1), \quad (x + \lambda_3) \neg (x + \lambda_2) \neg (x + \lambda_1), \\ (x + \lambda_4) \neg (x + \lambda_3) \neg (x + \lambda_2)(x + \lambda_1), \ldots$$

Si nota subito la notevole diversità fra i prodotti $(7)_1$ e i derprodotti $(7)_2$. Precisamente, mentre i prodotti $(7)_1$ hanno sempre senso e godono sempre della proprietà commutativa, i derprodotti $(7)_1'$ possono anche non avere senso e, se hanno senso, assai raramente godono della proprietà commutativa. Nei derprodotti l'ordine dei fattori è sempre quello *da destra verso sinistra* (ossia, $x + \lambda_1$ è il primo fattore, $x + \lambda_2$ è il secondo fattore, $x + \lambda_3$ è il terzo fattore, ecc.). Inoltre:

nel *primo* derprodotto la x deve avere la derivata prima (finita) ed ancora la λ_1 deve avere la derivata prima finita;

nel *secondo* derprodotto la x deve avere le prime due derivate (finite), ed ancora la λ_1 deve pure avere le prime due derivate (finite), mentre la λ_2 deve avere la derivata prima finita, e così via.

I derprodotti *non hanno senso* quando manca qualcuna delle dette derivate, ed ancora quando, esistendo tali derivate, esse non sono tutte finite.

Come *esempio*, nei seguenti n. **7.2**, n. **7.3**, n. **7.4** calcoleremo per esteso i primi tre derprodotti $(7)_2$ (nell'ipotesi che abbiano senso). Gli sviluppi che così otterremo si diranno delle *identità deralgebriche* [mentre gli sviluppi dei prodotti $(2)_2$, $(2)_3$, $(2)_4$, di *Parte* **I**, si chiamano delle *identità algebriche*].

7.2. – Per la definizione di derprodotto (cfr. l'inizio di pag. 8 della *Parte* **I**) abbiamo subito:

$$(x + \lambda_2) \urcorner (x + \lambda_1) = (x + \lambda_2)(x + \lambda_1) + (x + \lambda_1)' ,$$

da cui si constata (come si affermò verso la fine del precedente n. **7.1**) che affinchè il derprodotto precedente abbia senso è necessario e basta che esistano e siano finite le derivate x', λ_1'. Abbiamo:

$$\begin{aligned}(x + \lambda_2) \urcorner (x + \lambda_1) &= [x^2 + (\lambda_2 + \lambda_1)x + \lambda_2\lambda_1] + (x' + \lambda_1') , \\ &= (x^2 + x') + (\lambda_2 + \lambda_1)x + (\lambda_2\lambda_1 + \lambda_1') ,\end{aligned}$$

ossia

$$(7)_2 \qquad (x + \lambda_2) \urcorner (x + \lambda_1) = x^{\overline{2}|} + (\lambda_2 + \lambda_1)x + (\lambda_2 \urcorner \lambda_1) .$$

7.3. – Abbiamo poi, in virtù di $(7)_2$,

$$\begin{aligned}&(x + \lambda_3) \urcorner (x + \lambda_2) \urcorner (x + \lambda_1) = (x + \lambda_3) \urcorner [x^{\overline{2}|} + (\lambda_2 + \lambda_1)x + (\lambda_2 \urcorner \lambda_1)] = \\ &= (x + \lambda_3)[x^{\overline{2}|} + (\lambda_2 + \lambda_1)x + (\lambda_2 \urcorner \lambda_1)] + [x^{\overline{2}|} + (\lambda_2 + \lambda_1)x\,(\lambda_2 \urcorner \lambda_1)]' .\end{aligned}$$

Eseguendo questi ultimi calcoli, si ottiene:

$$(7)_3 \quad \left[\begin{aligned} &(x+\lambda_3)\urcorner(x+\lambda_2)\urcorner(x+\lambda_1) = \\ &= x^{\overline{3|}} + (\lambda_3+\lambda_2+\lambda_1)x^{\overline{2|}} + (\lambda_3\urcorner\lambda_2 + \lambda_3\urcorner\lambda_1 + \lambda_2\urcorner\lambda_1)x + (\lambda_3\urcorner\lambda_2\urcorner\lambda_1). \end{aligned}\right.$$

7.4. – Procedendo analogamente si trova:

$$(7)_4 \quad \left[\begin{aligned} &(x+\lambda_4)\urcorner(x+\lambda_3)\urcorner(x+\lambda_2)\urcorner(x+\lambda_1) = \\ &= x^{\overline{4|}} + (\lambda_4+\lambda_3+\lambda_2+\lambda_1)x^{\overline{3|}} + \\ &\qquad + (\lambda_4\urcorner\lambda_3 + \lambda_4\urcorner\lambda_2 + \lambda_4\urcorner\lambda_1 + \lambda_3\urcorner\lambda_2 + \lambda_3\urcorner\lambda_1 + \lambda_2\urcorner\lambda_1)x^{\overline{2|}} + \\ &\qquad + (\lambda_4\urcorner\lambda_3\urcorner\lambda_2 + \lambda_4\urcorner\lambda_3\urcorner\lambda_1 + \lambda_3\urcorner\lambda_2\urcorner\lambda_1)x + (\lambda_4\urcorner\lambda_3\urcorner\lambda_2\urcorner\lambda_1)\,. \end{aligned}\right.$$

7.5. – Applicando il procedimento induttivo, si perviene a la conclusione generale seguente:

$$(7)_n \quad \left[\begin{aligned} &(x+\lambda_n)\urcorner(x+\lambda_{n-1})\urcorner\ldots\urcorner(x+\lambda_2)\urcorner(x+\lambda_1) = \\ &\qquad = x^{\overline{n|}} + p_{1,t}x^{\overline{n-1|}} + p_{2,t}x^{\overline{n-2|}} + \ldots + p_{n-2,t}x^{\overline{2|}} + p_{n-1,t}x + p_{n,t}\,, \end{aligned}\right.$$

dove i coefficienti $p_{1,t}$, $p_{2,t}$, ..., $p_{n-2,t}$, $p_{n-1,t}$, $p_{n,t}$ si esprimono mediante le funzioni λ_1, λ_2, ..., λ_n come è indicato nella prima metà di pagina 2 (dalla riga 5 alla riga 14).

La *derfunzione razionale intera semplice* [cfr. la $(2)_8$], a secondo membro di $(7)_n$, risulta dunque decomposta dal primo membro di $(7)_n$ in un derprodotto di fattori tutti lineari nella x.

Interessa osservare che l'affermazione deralgebrica di $A_{1,1}$, data da $(7)_n$, è in completo parallelismo, in algebra A_1, con l'affermazione algebrica che « una funzione razionale intera (semplice) di grado n si può sempre spezzare in un prodotto di n fattori tutti lineari (in t) ».

8. - Il « teorema fondamentale » della deralgebra $A_{1,1}$.

8.1. – Eguagliando a zero il secondo membro di $(7)_n$, si ottiene l'equazione deralgebrica

$$(8)_1 \qquad x^{\overline{n|}} + p_{1,t}x^{\overline{n-1|}} + p_{2,t}x^{\overline{n-2|}} + \ldots + p_{n-2,t}x^{\overline{2|}} + p_{n-1,t}x + p_{n,t} = 0\,,$$

che è esattamente la precedente $(2)_8$. D'altra parte, in virtù della $(7)_n$, la $(8)^1$ equivale a scrivere:

$$(8)_2 \qquad (x+\lambda_n)\neg(x+\lambda_{n-1})\neg\ldots\neg(x+\lambda_2)\neg(x+\lambda_1)=0\,.$$

Tenendo ora presente che *un derprodotto è nullo quando il suo primo fattore è nullo* (cfr. su ciò il n. **4.2** di *Parte* **I**), poichè nel primo membro di $(8)_2$ il primo fattore è $x+\lambda_1$, abbiamo: *a l'equazione* $(8)_2$, *e conseguentemente a l'equivalente equazione* $(8)_1$, *si soddisfa ponendo*

$$x+\lambda_1=0\,.$$

Quindi: *l'equazione deralgebrica* $(8)_1$ *ha almeno la radice*

$$x=-\lambda_1\,,$$

affermazione che dà proprio, esattamente, **il teorema fondamentale della deralgebra** $A_{1,1}$.

8.2. – La decomposizione in fattori, in algebra A_1, di una funzione razionale intera di grado n (cfr. la $(2)_n$ di *Parte* **I**), si esprime tramite le n radici della corrispondente equazione di grado n. Un risultato analogo, in deralgebra $A_{1,1}$, si otterrà qui di seguito, esprimendo le n funzioni $\lambda_k(t)$ dell'equazione $(8)_2$ per mezzo delle sue n radici $x_k(t)$. Consideriamo la nota decomposizione (*):

$$(8)_3 \qquad y^{(n)}+p_{1,t}y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1,t}y'+p_{n,t}y=$$

$$=\left[D+\left(\log_e\frac{W_{n-1}}{W_n}\right)'\right]\left[D+\left(\log_e\frac{W_{n-2}}{W_{n-1}}\right)'\right]\ldots\left[D+\left(\log_e\frac{W_1}{W_2}\right)'\right]\left[D+\left(\log_e\frac{W_0}{W_1}\right)'\right]y\,,$$

dove $W_0=1$, $W_1=y_1$ ($\neq 0$ in N^*) e $W_r=W_r[y_1, y_2, \ldots, y_r]$ $(r=2, 3, \ldots, n)$, sono i Wronskiani delle funzioni $y_s(t)$ $(s=1, 2, \ldots, r)$ soluzioni dell'equazione differenziale $(2)_6$. Supporremo ora che le funzioni y_s siano *linearmente indipendenti in senso forte* in N^* (cfr. n. **3.2**), assicurando così che tutti i Wronskiani siano non nulli in N^*. Il secondo membro della $(8)_3$ può essere

(*) Questa decomposizione, data sostanzialmente per la prima volta dal FROBENIUS [**3**], fu ottenuta in questa forma in [**4**] e poi riottenuta con metodo più semplice in [**5**]; cfr. anche [**6**].

riscritto utilizzando la definizione di Vandermondiano ${}_{\mathrm{D}}\mathrm{V}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, che indicheremo brevemente con ${}_{\mathrm{D}}\mathrm{V}_n$, [cfr. n. **4.1**, ed in particolare la relazione $(4)''_2$, dove al posto delle η_k vanno sostituite le y_k]. A tale scopo osserviamo che si ha:

$$(8)_4 \qquad \mathrm{W}_{r-1}/\mathrm{W}_r = e^{-\int x_r \mathrm{d}t}\,({}_{\mathrm{D}}\mathrm{V}_{r-1}/{}_{\mathrm{D}}\mathrm{V}_r)\,,$$

dove ${}_{\mathrm{D}}\mathrm{V}_r = {}_{\mathrm{D}}\mathrm{V}_r[x_1, x_2, \dots, x_r]$ è il Vandermondiano delle funzioni $x_s(t)$ $(s = 1, 2, \dots, r)$ radici della equazione deralgebrica $(2)_8$ [ovvero $(8)_1$ o $(8)_2$], corrispondente alla equazione differenziale $(2)_6$. Le precedenti convenzioni $\mathrm{W}_0 = 1$ e $\mathrm{W}_1 = y_1$ conducono a porre, tenendo presente la $(4)''_2$, ${}_{\mathrm{D}}\mathrm{V}_0 = 1$ e ${}_{\mathrm{D}}\mathrm{V}_1 = 1$. Supporremo le radici x_s *distinte in senso forte in* $\boldsymbol{N}^*$ (cfr. n. **4.2**), assicurando con ciò che tutti i Vandermondiani siano non nulli in $\boldsymbol{N}^*$. Dalla $(8)_4$ si ottiene:

$$(8)_5 \qquad \left(\log_e \frac{\mathrm{W}_{r-1}}{\mathrm{W}_r}\right)' = -x_r - \left(\frac{{}_{\mathrm{D}}\mathrm{V}'_r}{{}_{\mathrm{D}}\mathrm{V}_r} - \frac{{}_{\mathrm{D}}\mathrm{V}'_{r-1}}{{}_{\mathrm{D}}\mathrm{V}_{r-1}}\right).$$

Indicando con H_r la espressione in parentesi del secondo membro di $(8)_5$, al secondo membro di $(8)_3$ si può dare anche la forma:

$$(8)_6 \qquad (\underleftarrow{\mathrm{D}} - x_n - \mathrm{H}_n)(\underleftarrow{\mathrm{D}} - x_{n-1} - \mathrm{H}_{n-1}) \dots (\underleftarrow{\mathrm{D}} - x_2 - \mathrm{H}_2)(\underleftarrow{\mathrm{D}} - x_1 - \mathrm{H}_1)\, e^{\int x \mathrm{d}t}\,,$$

dove si è posto $y = \exp \int x\,\mathrm{d}t$ (cfr. n. **2.2**). Non è difficile mostrare che eseguendo l'applicazione dell'operatore, indicata in $(8)_6$, si ottiene:

$$(8)_7 \qquad e^{\int x \mathrm{d}t}(x - x_n - \mathrm{H}_n) \urcorner (x - x_{n-1} - \mathrm{H}_{n-1}) \urcorner \dots$$
$$\dots \urcorner (x - x_2 - \mathrm{H}_2) \urcorner (x - x_1 - \mathrm{H}_1)\,.$$

Essendo, poi, $\mathrm{H}_1 = 0$, $\mathrm{H}_2 = (x'_2 - x'_1)/(x_2 - x_1)$, come segue dalla $(8)_5$, eguagliando a zero l'espressione $(8)_7$, si ottiene:

$$(8)_8 \qquad (x - x_n - \mathrm{H}_n) \urcorner (x - x_{n-1} - \mathrm{H}_{n-1}) \urcorner \dots$$
$$\dots \urcorner (x - x_3 - \mathrm{H}_3) \urcorner \left(x - x_2 - \frac{x'_2 - x'_1}{x_2 - x_1}\right) \urcorner (x - x_1) = 0\,.$$

La $(8)_8$ non è altro che l'equazione deralgebrica $(8)_2$ dove al posto delle funzioni $\lambda_k(t)$ vi sono delle espressioni esplicite in cui figurano soltanto le radici $x_k(t)$ dell'equazione deralgebrica stessa.

Bibliografia

[1] L. TONELLI, *Lezioni di Analisi Matematica*, Vol. II, Litografia Tacchi, Pisa 1940. Precisamente, vedasi tutto il n. **124** (da pag. 237 a pag. 242).

[2] S. PINCHERLE, *Lezioni di Algebra complementare. Parte I: Analisi algebrica*, N. Zanichelli, Bologna 1906. Precisamente, vedasi da pag. 252 a pag. 258.

[3] G. FROBENIUS, *Ueber die Determinante mehrere Functionen einer Variabeln*, Journal für Mathematik, Bd. LXXVII (1874), pp. 245-257.

[4] G. MAMMANA, *La decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in fattori simbolici di primo ordine*, Rend. R. Acc. Lincei, S. VI, Vol. IX, pp. 538-544.

[5] A. MAMBRIANI, *Sulla risoluzione delle equazioni differenziali lineari*, Atti 1° Congr. U.M.I. (1937), pp. 231-237.

[6] E. KAMKE, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, (New York, 1959). Precisamente vedasi pag. 73.

* * *