Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 475-484

GIOVANNI FERRERO e GIORDANO GALLINA (*)

Funzioni di Steiner con parecchi moltiplicatori (**)

Introduzione.

Fin da $[2]_1$ e [3] avevamo in mente di studiare i sistemi di terne di Steiner regolari con l'idea di trovare in essi ulteriori casi di disegni non simmetrici dotati di moltiplicatori. Qui, dopo costruzioni di carattere generale (1), individuiamo ampie classi di coppie (G, Φ), ove G è un gruppo (additivo), Φ un suo gruppo di automorfismi tali che esistano sistemi di terne di Steiner che ammettono G come gruppo di automorfismi regolare e transitivo e Φ come gruppo di moltiplicatori. I risultati più incisivi sono i due teoremi conclusivi, ma non rinunciamo a segnalare nel corso della trattazione casi particolari che sembrano degni di uno studio più approfondito.

Essendosi recentemente notato che i nostri studi potevano essere condotti (e in parte lo sono stati, da [5] a [7]) con una tecnica solo formalmente diversa, facente capo alla terminologia dei neocorpi (cfr. per es. [7]), si discuteranno in un altro lavoro (2) le relazioni fra la nostra trattazione e quelle dei ricercatori di lingua inglese, in modo da poter applicare il materiale qui presentato a problemi (apparentemente) di tipo diverso.

Allo scopo di cogliere questa opportunità evitando ripetizioni rimandiamo ad allora un più preciso inquadramento del presente lavoro nella letteratura matematica; qui proseguiamo direttamente $[2]_6$, $[4]_2$, $[2]_7$ senza richiamare esplicitamente tutte le definizioni e i risultati precedenti, ed in particolare supponiamo che il lettore conosca le prime parti di $[2]_3$ e $[2]_4$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 29-IX-1978.

(1) Che, riteniamo, descrivono abbastanza bene le situazioni di fronte a cui ci si può trovare nello studio delle funzioni di Steiner che ammettono moltiplicatori.

(2) In questo accenniamo solo, nella prima parte, a un dettaglio che non si avrà occasione di discutere allora.

1. - Moltiplicatori e loro azione.

1.1 – Cominciamo a vedere come un gruppo Φ di moltiplicatori di una funzione di Steiner α definita su un gruppo G possa operare sulle traiettorie del gruppo di Steiner Σ (3) associato ad α.

Ricordando la struttura di Σ (come individuata nelle considerazioni che hanno portato al teorema 1 di $[2]_3$) si nota subito che ogni $\varphi \in \Phi$ è permutabile con tutti gli elementi di Σ. Abbiamo dunque che *ogni* $\varphi \in \Phi$ *manda orbite di* Σ *in orbite di* Σ, e che l'azione di Σ su una sua orbita T individua quella sull'orbita $\varphi(T)$. Questo ispirerà tra poco il Teorema 1, ma ora non crediamo inutile vedere come un $\varphi \in \Phi$ possa operare su una eventuale orbita T di Σ quando $T = \varphi(T)$.

Ad esempio con facili calcoli ripetitivi basati sulla struttura di Σ possiamo vedere che se φ non tiene fermi tutti gli elementi di una tale T *sono possibili al più i seguenti casi.*

(1) Il moltiplicatore φ opera su un $x \in T$ come un elemento di Σ avente ordine 2. Allora φ opera su tutti gli elementi di T come elementi di Σ aventi ordine 2, ed inoltre ciascuno di questi opera come φ su due elementi di T.

(2) Il moltiplicatore φ opera su un $x \in T$ come un elemento di Σ avente ordine tre. Allora φ opera su tutti gli elementi di T come elementi di Σ aventi ordine 3, ed ogni tale elemento opera come φ su tre elementi di T.

In tali condizioni tutti gli elementi di T devono avere la stessa caratteristica (4).

Dalle precedenti osservazioni risulta subito che gli elementi di G tenuti fermi da un moltiplicatore φ di α formano (come era prevedibile) un sottogruppo di G tenuto fermo da α, individuando così un sottosistema del sistema di Steiner associato a G ed α.

---

(3) Di solito scrivevamo Σ_α anzichè Σ: qui vogliamo sottolineare che α serve essenzialmente per individuare le traiettorie di Σ, di modo che le considerazioni di questo numero continuano a valere sostituendo α con una qualunque sua deformazione (nel senso di $[3]_5$, teorema 6). Se avessimo usato tecniche e nomenclatura di [7] avremmo considerato semplicemente una «partizione ammissibile» di G (riservandoci, se mai, di costruire una funzione di Steiner α tale che le traiettorie di Σ_α fossero gli elementi di tale partizione): avremmo però dovuto metterci nel caso abeliano e chiedere esplicitamente che G avesse ordine dispari.

(4) Questo è l'unico caso che si ha effettivamente sul gruppo ciclico di ordine 7. Infatti (come può essere visto con calcoli diretti ricordando l'annotazione (46) di $[2]_4$ od usando le considerazioni di poco sopra) i moltiplicatori delle funzioni di Steiner su tale gruppo sono precisamente i suoi automorfismi di ordine 3. Geometricamente di qui si ha, fra l'altro, che gli automorfismi del piano di Fano che normalizzano un suo gruppo di automorfismi regolare e transitivo hanno necessariamente ordine 3.

Per riassumere e all'occasione richiamare, enunciamo una parte delle precedenti considerazioni nella

Osservazione 1. *Se il moltiplicatore φ fissa la traiettoria T del gruppo di Steiner Σ si ha che la restrizione di φ a T opera su ciascuno degli elementi di T come un elemento di Σ avente lo stesso suo ordine.*

Ricordando la struttura di Σ, ed un poco per valorizzare la costruzione che seguirà, possiamo anche enunciare il

Corollario 2. *Un moltiplicatore di una funzione di Steiner che abbia ordine primo con 6 sposta tutte le traiettorie non banali del relativo gruppo di Steiner*, e dunque è un automorfismo senza coincidenze del gruppo additivo su cui α è definita.

1.2. – Veniamo ora a qualche costruzione, cioè, essenzialmente, ai primi risultati esistenziali.

Teorema 3. *Sia G un gruppo additivo, Φ un suo gruppo di automorfismi e Σ un gruppo di Steiner su G. Supponiamo che ogni $\varphi \in \Phi$ mandi traiettorie di Σ in traiettorie di Σ, e che la sua azione sulle traiettorie tenute fisse sia permutabile con gli elementi di Σ* (5). *Allora G ammette funzioni di Steiner α che ammettono Φ come gruppo di moltiplicatori* (6).

Per la dimostrazione osserviamo anzitutto che Φ permuta le traiettorie di Σ secondo un gruppo Φ', e siano O_i $(i \in I)$ le orbite di Φ'. Scegliamo arbitrariamente in ciascuna O_i una traiettoria T_i di Σ. In ciascuna di queste T_i possiamo (restringendo ad essa una delle funzioni di Steiner di Σ) definire una involuzione α_i tale che $\alpha_i(-x) = \alpha_i(x) - x$, $\forall x \in T_i$ (7).

Per ogni $\varphi \in \Phi$ definiamo ora in $\varphi(T_i)$ una funzione α_i^φ ponendo $\alpha_i^\varphi = \varphi \circ \alpha_i \circ \varphi^{-1}$. Ora nelle nostre ipotesi α_i^φ dipende solo da $\varphi(T_i)$ (e non da φ); se infatti $\varphi(T_i) = \varphi'(T_i)$ $(\varphi, \varphi' \in \Phi)$ è ovvio che $\varphi'' = \varphi^{-1} \circ \varphi'$ è un elemento di Φ che tiene fermo T_i, e allora φ'' è permutabile con α_i, di modo che $\alpha_i^\varphi = \alpha_i^{\varphi'}$.

(5) Le considerazioni del numero precedente mostrano che queste ipotesi sono necessarie se vogliamo che, come avverrà, le funzioni di Steiner ottenute abbiano le stesse traiettorie di Σ.

(6) E come risulta dalla dimostrazione, sono fini quanto le funzioni di Steiner di Σ.

(7) Questo implica in generale una scelta, e contando le scelte si hanno quasi immediatamente risultati numerativi; tuttavia nel caso finito, per avere risultati di tale tipo ci sembra più efficace e comoda la tecnica di [**5**], di modo che per ora soprassediamo a tale tipo di lavoro.

È ormai ovvio che l'unione α delle α_i^φ è una funzione di Steiner definita su G (perchè in particolare

$$\alpha_i^\varphi(-x) = \varphi\circ\alpha_i\circ\varphi^{-1}(-x) = \varphi(\alpha_i(-\varphi^{-1}(x))) =$$
$$= \varphi\big((\alpha_i(\varphi^{-1}(x))) - \varphi^{-1}(x)\big) = \alpha_i^\varphi(x) - x\,, \quad \forall x \in T_i\,, \forall\varphi\in\Phi\,, \forall i\in I)\,.$$

Inoltre α ammette Φ come gruppo di moltiplicatori, come si vede ricordando che per φ, $\psi\in\Phi$, $x\in\varphi(T_i)$ risulta $\psi(x)\in\psi(\varphi(T_i)) = \psi\circ\varphi(T_i)$, di modo che $\alpha\circ\psi(x) = (\psi\circ\varphi)\circ\alpha_i\circ(\varphi^{-1}\circ\psi^{-1})\circ\psi(x) = \psi\circ\alpha(x)$. Con questo la dimostrazione è completa: è chiaro che il gruppo di Steiner Σ_α non coinciderà in generale con Σ (che è servito essenzialmente ad individuare una «partizione ammissibile», cfr. l'annotazione ([3])).

Corollario 4. *Sia Φ un gruppo di automorfismi del gruppo G, e sia Σ un gruppo di Steiner definito su G. Se gli elementi di Φ mutano traiettoria di Σ in traiettorie di Σ senza fissarne alcuna che non sia fine o banale, allora G possiede funzioni di Steiner α che ammettono Φ come gruppo di moltiplicatori* ([8]).

È ovvia conseguenza del Teorema 3 e del fatto che gli elementi di Σ operano come l'identità o come l'inversione sulle traiettorie fini.

1.3. – Nello spirito del Teorema 3 e seguendo la linea della seconda parte di $[\mathbf{2}]_4$ si ha il

Teorema 5. *Siano G un gruppo, R un suo ricoprimento costituito da sottogruppi, Φ un suo gruppo di automorfismi i cui elementi tengono fermo R. Per ogni $H\in R$ esista una funzione di Steiner α_H definita in H, e supponiamo che*

(1) *ogni intersezione di elementi di R sia un elemento di R,*

(2) *per ogni $\varphi\in\Phi$ e per $H\in R$ se $\varphi(H) = H$ la α_H ammetta come moltiplicatore la restrizione di φ ad H* ([9]),

(3) *per ogni $H\in R$ la α_H tenga fermi tutti i sottogruppi di H. Allora G contiene una funzione di Steiner α che ammette Φ come gruppo di moltiplicatori e tiene fermi tutti i sottogruppi di G.*

([8]) Con la nomenclatura di tipo inglese quanto visto può essere enunciato: *Un gruppo Φ di automorfismi del gruppo G di ordine dispari tenga ferma una partizione ammissibile di G spostando tutti i suoi elementi che non siano singoletti o coppie ammissibili. Allora esiste un neocorpo di Steiner il cui gruppo moltiplicativo è G e che ammette un gruppo Φ' di automorfismi che subordina Φ su G.*

([9]) Questa ipotesi è ovviamente anche necessaria; le altre invece possono essere alleggerite (a prezzo di complicazioni) o variate, come in parte vedremo tra poco.

Sia Φ' il gruppo degli automorfismi indotti da Φ su R. Per ogni orbita i di Φ' scegliamo un $H_i \in i$, e per semplicità poniamo $\alpha_i = \alpha_{H_i}$. Per ogni $\varphi \in \Phi$ poniamo poi $\alpha_i^\varphi = \varphi \circ \alpha_i \circ \varphi^{-1}$. In base alla ipotesi (2) si ha subito che α_i^φ dipende soltanto da $\varphi(H_i)$ ([10]), ed è ancora una funzione di Steiner su $\varphi(H_i)$ che tiene fermi tutti i suoi sottogruppi ([11]). Poichè gli elementi di R sono precisamente i $\varphi(H_i)$, per ogni $H = \varphi(H_i)$ di R possiamo ora porre $\alpha'_H = \alpha_i^\varphi$.

Per $x \in G$ sia $r(x)$ l'intersezione degli elementi di R che contengono x (per la ipotesi (1)) è $r(x) \in R$). Imitando per esempio i ragionamenti del teorema 12 di [2]$_1$ ed usando l'ipotesi (3) in luogo dell'ultima ipotesi di tale teorema, notiamo subito che è sempre $r(x) = r(-x)$ e $r(x) = r(\alpha'_{r(x)}(x))$. Come allora poniamo $\alpha(x) = \alpha'_{r(x)}(x)$ e verifichiamo che α è una funzione di Steiner definita su tutto G. Si nota inoltre che, se $x \in G$, $\alpha(x) = \alpha'_{r(x)}(x)$ appartiene al sottogruppo di G generato da x perchè $\alpha'_{r(x)}$ tiene fermi i sottogruppi di $r(x)$ in quanto ottenuta trasformando una α_i che (per la ipotesi (3)) tiene fermi tutti i sottogruppi del gruppo su cui opera. Tanto basta per asserire che α tiene fermi tutti i sottogruppi di G, come richiesto.

Resta da dimostrare che α ammette Φ come gruppo di moltiplicatori, che è cioè permutabile con ogni $\varphi' \in \Phi$. Allo scopo cominciamo con l'osservare che $\forall x \in G$ è $r(x) = \varphi'^{-1} r(\varphi'(x))$: infatti, $\varphi'^{-1} r(\varphi'(x)) \in R$ e dunque, per le posizioni precedenti, $r(x) \subseteq \varphi'^{-1} r(\varphi'(x))$. Per la stessa ragione $r(\varphi'(x)) \subseteq \varphi' r(\varphi'^{-1} \circ \varphi'(x)) = \varphi' r(x)$, da cui l'asserto. Ora se $r(x) = \varphi(H_i)$ è $r(\varphi'(x)) = \varphi' r(x) = (\varphi' \circ \varphi)(H_i)$ e, risalendo la costruzione fatta, si ha che $(\varphi' \circ \alpha)(x) = (\varphi' \circ \alpha_i^\varphi)(x) = (\varphi' \circ \varphi \circ \alpha_i \circ \varphi^{-1})(x)$ mentre $(\alpha \circ \varphi')(x) = \alpha'_{r(\varphi'(x))} \circ \varphi'(x) = (\varphi' \circ \varphi \circ \alpha_i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi'^{-1} \circ \varphi')(x) = (\varphi' \circ \alpha)(x)$, come volevasi dimostrare.

Corollario 6. *Siano G un gruppo additivo, Π una sua partizione* ([12]) *e Φ un suo gruppo di automorfismi che tenga ferma Π. Supponiamo che ogni elemento H di Π ammetta funzioni di Steiner permutabili con tutti gli elementi di Φ che tengono fermo H. Allora esiste in G una funzione di Steiner α che ammette Φ come gruppo di moltiplicatori.*

Si tratta di una variante del Teorema 5, che ammette una dimostrazione immediatamente ottenibile alle considerazioni sopra fatte per dimostrarlo. Infatti ora Π (insieme col sottogruppo banale di G) è un particolare ricoprimento di G, tale che la ipotesi (1) del Teorema è automaticamente soddisfatta; la ipotesi (2) del Teorema compare ancora come ipotesi nel Corollario (sia pure

([10]) Se infatti $x \in \varphi(H_i) = \varphi'(H_i)$ posto $x = \varphi(y)$ è $y \in H_i$ e $\alpha_i^\varphi(x) = (\varphi \circ \alpha_i)(y)$ mentre $\alpha_i^{\varphi'}(x) = (\varphi' \circ \alpha_i \circ \varphi'^{-1} \circ \varphi)(y) = (\varphi' \circ \varphi'^{-1} \circ \varphi \circ \alpha_i)(y) = (\varphi \circ \alpha_i)(y)$ perchè α_i è permutabile con $\varphi'^{-1} \circ \varphi$, che tiene fermo $H_i \in R$.

([11]) Come si vede con facili calcoli.

([12]) Nel senso della teoria dei gruppi.

in forma un poco diversa); la ipotesi (3) non è più necessaria perchè ora la ultima ipotesi del teorema 12 di [**2**]$_4$ è automaticamente soddisfatta, e ripercorrendo la dimostrazione del nostro Teorema 5 ci si accorge che altro non occorre per dimostrare l'enunciato.

Vale anche il

Corollario 7. *Se G è un gruppo di esponente primo ammissibile e Φ un suo gruppo di automorfismi i cui elementi non identici spostino tutti i sottogruppi di G aventi ordine primo, allora esistono funzioni di Steiner α su G che ammettono Φ come gruppo di moltiplicatori ed inoltre tengono fermi tutti i sottogruppi di G.*

Si ottiene immediatamente dal Teorema 5 scegliendo come ricoprimento R di G quello costituito dal sottogruppo banale e dai sottogruppi di ordine p. Le condizioni (1), (2) sono allora automaticamente soddisfatte, e la (3) lo è se appena si ricorda per esempio il teorema di Pelteson richiamato e generalizzato in [**2**]$_4$.

Particolarmente interessanti sembrano i casi in cui tutti gli elementi di Φ spostano tutti i sottogruppi di G. Allora (oss. 1 di [**2**]$_2$):

(a) il gruppo G è abeliano elementare: esempi concreti si ottengono sfruttando le considerazioni di [**2**]$_3$ (lemma 6), ma anche successive più specifiche considerazioni, come il corollario 8; non approfondiamo per non discutere la nomenclatura.

Ancora più notevole è il caso in cui:

(b) il gruppo Φ opera transitivamente sugli elementi non nulli di G; allora $G\Phi$ opera in modo esattamente due volte transitivo sicchè (corollario 1 di [**6**]) i sistemi di terne di Steiner ottenuti dalle funzioni in questione risultano spazi affini su $GF(3)$.

In uno spirito un poco diverso, ma ancora di portata generale è il

Teorema 8. *Sia $\{G_i\}$ $(i \in I)$ un sistema di gruppi, ed ogni G_i contenga funzioni di Steiner α_i ammettenti un gruppo di moltiplicatori Φ_i. Allora il prodotto diretto (completo o ristretto) dei G_i ammette funzioni di Steiner che ammettono un gruppo di moltiplicatori isomorfo al prodotto diretto (completo o indifferentemente ristretto) dei Φ_i.*

Si tratta evidentemente delle composizioni dirette (teorema 7 di [**2**]$_5$) delle α_i.

2. - Costruzioni specifiche.

2.1. – Vogliamo ora applicare le considerazioni precedenti per costruire più concretamente funzioni di Steiner dotate di moltiplicatori. Il primo lemma è una generalizzazione di una ormai nota osservazione di [**1**].

Lemma 9. *Sia G un gruppo additivo abeliano privo di elementi di caratteristica 2 e sia f un suo automorfismo tale che $f^2(x) - f(x) + x = 0$, $\forall x \in G$. Sia inoltre Φ un sottogruppo del normalizzante di f nell'automorfo $A(G)$ di G. Supponiamo che, per ogni $\varphi \in \Phi$, $\varphi(x) = -x$ $(x \in G)$ implichi $f(x) = -x$* (13). *Allora in G esistono funzioni di Steiner che ammettono Φ come gruppo di moltiplicatori e tengono fermi tutti i sottogruppi caratteristici di G.*

Come nel lemma 4 di $[4]_1$, f ha ordine 6, f^2 è l'inversione i e G ammette una funzione di Steiner α che opera sugli elementi delle traiettorie del gruppo F generato da f secondo una permutazione della forma $(a, f(a))(f^2(a), f^3(a))(f^4(a), f^5(a))$. Visto che f^2 non ha coincidenze che non abbiano caratteristica 3, le traiettorie del gruppo Σ_α sono appunto le traiettorie di F, e dunque ogni $\varphi \in \Phi$ (visto che manda traiettorie di F in traiettorie di F) manda traiettorie di Σ_α in traiettorie di Σ_α.

Semplici calcoli ripetitivi mostrano che, in base all'ultima ipotesi, l'azione di ogni $\varphi \in \Phi$ su ogni eventuale traiettoria di Σ_α che φ mutasse in sé, risulta permutabile con quella di tutti gli elementi di Σ_α. Dal Teorema 3 segue subito la prima parte della tesi.

Si osserva ancora che le funzioni di Steiner costruite in base a detto Teorema sono fini quanto la α. Poichè la α (come subito si vede) muta in sè i sottogruppi caratteristici di G, lo stesso faranno le funzioni di cui sopra; questo dimostra completamente la tesi.

Si noti inoltre che f^2 *risulta un moltiplicatore per la α e per tutte le funzioni di Steiner fini come la α*, perchè tiene ferme tutte le traiettorie di Σ_α e su ciascuna di esse è permutabile tanto con α che con l'inversione i.

Ragionando come nel lemma 4 di $[4]_1$ (14) si vede subito che la somma diretta G di due gruppi isomorfi senza elementi di caratteristica 2 possiede un automorfismo f con $f^2(x) - f(x) + x = 0$, $\forall x \in G$, e che dunque il Lemma 9 *può essere applicato direttamente a molti casi infiniti.*

Lemma 10. *Sia p un numero primo congruo ad 1 modulo 6. Un automorfismo f di ordine 6 del gruppo ciclico G di ordine p^n* (15) *soddisfa la $f^2(x) - f(x) + x = 0$, $\forall x \in G$.*

Sia P il sottogruppo di G avente ordine p e $A(P)$ il suo automorfo. L'omomorfismo $\varphi\colon A(G) \to A(P)$ che manda ogni elemento di $A(G)$ nella sua restri-

(13) Questa «strana» condizione è *necessaria* se vogliamo che la α sia costruita al solito modo attraverso la f, anche se vederlo non è del tutto immediato.

(14) Generalizzandolo cioè al caso qui prospettato senza alterare sostanzialmente la dimostrazione: riteniamo per brevità di non riesporre il tutto.

(15) Ricordiamo che G possiede certamente automorfismi di ordine 6 perchè il suo automorfo $A(G)$ è ciclico di ordine $(p-1)p^{n-1}$.

zione a P ha nucleo di ordine p^{n-1}, perchè $A(P)$ ha ordine $p-1$, e dunque $\varphi(f)$ ha ancora ordine 6. Se $f: x \to kx$ (come deve essere per un opportuno k naturale) si ha dunque che k^3-1 e $k+1$ sono primi con p.

Essendo f di ordine 6 risulta $k^6-1=0 \pmod{p^n}$, cioè $(k^3-1)(k+1)\cdot(k^2-k+1)=0 \pmod{p^n}$ e, per quanto sopra osservato, $k^2-k+1=0 \pmod{p^n}$, da cui l'enunciato.

2.2. – Siamo ora in grado di fornire la prima costruzione concreta con il

Lemma 11. *Tutti e soli gli automorfismi di ordine dispari di un gruppo ciclico G di ordine p^n (p congruo ad 1 modulo 6) sono moltiplicatori di qualche funzione di Steiner definita su G che tiene fermi tutti i sottogruppi di G.*

Siano $\varphi: x \to hx$ un automorfismo di G avente ordine dispari, f un automorfismo di G avente ordine 6. Ovviamente φ appartiene al normalizzante di f nell'automorfo di G, e non esistono elementi z non nulli di G tali che $\varphi(z)=-z$ (altrimenti φ avrebbe ordine pari). Ora è $f^2(x)-f(x)+x=0$, $\forall x \in G$, (Lemma 10) e siamo dunque nelle condizioni di applicare il Lemma 9 e di asserire che φ è moltiplicatore di qualche funzione di Steiner definita in G (16). L'ultima clausula è assicurata dal fatto che tutti i sottogruppi di G sono caratteristici. D'altra parte un automorfismo di G che abbia ordine pari genera un gruppo contenente un elemento di ordine 2; esso non può che essere l'inversione i (perchè $A(G)$ è ciclico), la quale ovviamente non può essere permutabile con alcuna funzione di Steiner definita in G, altrimenti tutte le traiettorie del gruppo di Steiner ad essa relativo sarebbero fini e p^n dovrebbe essere una potenza di 3 (cfr. $[\mathbf{2}]_3$).

Corollario 12. *Un gruppo ciclico G di ordine p^n (p primo congruo ad 1 modulo 6) contiene una funzione di Steiner che ammette come moltiplicatori tutti i suoi $3p^{n-1}-1$ automorfismi di ordine dispari e tiene fermi tutti i suoi sottogruppi.*

Segue immediatamente dal Lemma 11, ove solo si ricordi ancora che l'automorfo di G è ciclico.

Teorema 13. *Detto Π l'insieme dei numeri primi congrui ad 1 modulo 6 sia G un Π-gruppo tutti i cui elementi abbiano ordine potenza di un primo, e sia Φ un suo gruppo di automorfismi avente ordine dispari. Allora G possiede una funzione di Steiner che ammette Φ come gruppo di moltiplicatori e tiene fermi tutti i sottogruppi di G.*

Infatti i sottogruppi ciclici di G formano un suo ricoprimento R, ovviamente tenuto fermo da tutti gli elementi di Φ. Per ogni $H \in R$ esiste (Corollario 12)

(16) E anzi conosciamo effettivamente alcune di tali funzioni, sempre per il detto Lemma 9.

una funzione di Steiner α_H che ammette come moltiplicatori tutti gli automorfismi di H che hanno ordine dispari ed inoltre tiene fermi tutti i sottogruppi di H. Si vede ora quasi immediatamente che risultano soddisfatte le condizioni (1), (2), (3) del Teorema 5, il che è sufficiente a dimostrare l'enunciato.

Raccogliendo risultati e considerazioni precedenti concludiamo con il

Teorema 14. *Sia Π l'insieme dei primi congrui ad* 1 *modulo* 6; *il Π-gruppo G sia prodotto diretto* (*completo o ristretto*) *dei suoi sottogruppi di Sylow, e Φ sia un suo gruppo di automorfismi avente ordine dispari. Allora G contiene una funzione di Steiner che ammette G come gruppo di moltiplicatori.*

Per ogni sottogruppo di Sylow G_i di G sia Φ_i la restrizione di Φ a G_i; si tratta ovviamente di un gruppo di automorfismi di ordine dispari. Per il Teorema 13 G_i ammette una funzione di Steiner α_i che ammette Φ_i come gruppo di moltiplicatori. Sia α la composizione diretta delle α_i (Teorema 7 di [2]$_3$). Ogni $\varphi \in \Phi$ risulta permutabile con ciascuna delle α_i e dunque con α. Questo basta a dimostrare l'enunciato.

Bibliografia

[1] R. H. Bruck, *What is a loop?*, M.A.A. Studies in Mathematics **2** (1963), 59-99.

[2] G. Ferrero: [•]$_1$ *Sul concetto di moltiplicatore nel senso di Hall*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **12** (1971), 83-95; [•]$_2$ *Qualche disegno geometrico*, Matematiche (Catania) **26** (1971), 356-367; [•]$_3$ *Gruppi di Steiner e sistemi fini*, Matematiche (Catania) **27** (1972), 167-190; [•]$_4$ *Sui gruppi che ammettono funzioni di Steiner*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **4** (1972), 156-170; [•]$_5$ *Deformazioni, raffinamenti e composizioni di funzioni di Steiner* (I), Riv. Mat. Univ. Parma (3) **1** (1972), 1-14; [•]$_6$ *Deformazioni, raffinamenti e composizioni di funzioni di Steiner* (II), Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977), 151-157; [•]$_7$ *Su un problema relativo ai sistemi di Steiner disgiunti*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **7** (1975), 58-64.

[3] G. Ferrero e A. Suppa, *Sistemi, anelloidi e funzioni di Steiner*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **20** (1971), 279-280.

[4] G. Gallina: [•]$_1$ *Gruppi ammettenti funzioni di Steiner*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **15** A (1978), 225-230; [•]$_2$ *Sull'esistenza di certe funzioni di Steiner*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), ...

[5] E. C. Johnsen and T. Storer, *Combinatorial structures in loops* (II). *Commutative inverse property cyclic neofield of prime-power order*, Pacific J. Math. **52** (1974), 115-127.

[6] H. Lüneburg, *Fahnenhomogene Quadruplesysteme*, Math. Z. **89** (1965), 82-90.

[7] P. Tannenbaum, *Abelian Steiner triple systems*, Canad. J. Math. **28** (1976), 1251-1268.

Summary

We give constructions of Steiner functions with many multipliers; this is equivalent to construct regular Steiner triple systems with many multipliers.

Main result: Let Π be the set of prime numbers p of the form $p = 6k + 1$. Let G be a Π-group with a group of automorphisms Φ of odd order. If the orders of the elements of G are prime-powers, then there exists on G a Steiner function α that fixes each subgroup of G and commute with each element of Φ.

* * *