Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 459-474

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Su alcune generalizzazioni di una formula di Levi-Civita per deformazioni impulsive (**)

1. - Premessa.

1.1. – Il Levi-Civita [7]$_1$ dava, nel 1906, per la resistenza w alla penetrazione di un proiettile in un mezzo solido la seguente formula

$$w = S \cdot (c_0 + c_2 v^2)(1 + k v_0) , \tag{1.1}$$

dove S è l'area della massima sezione trasversale del proiettile prima dell'urto, c_0, c_2, k sono costanti positive, v è il modulo della velocità del proiettile nel mezzo e v_0 è il modulo della velocità di impatto.

Le formule classiche per la resistenza w erano le seguenti:

$$w = c_0 S \qquad \text{(Eulero, 1753)}, \tag{1.2}$$

$$w = S \cdot (c_0 + c_2 v^2) \qquad \text{(Poncelet, 1839)}, \tag{1.3}$$

$$w = S \cdot (c_1 v + c_2 v^2) \qquad \text{(Résal, 1895) (1)}. \tag{1.4}$$

Il contributo (1.1) era stato originato, come il Levi-Civita dichiarava, dall'intento di dare una spiegazione rigorosa di un « apparente paradosso » che gli era stato segnalato: e cioè che all'aumentare della velocità di impatto non

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Ricevuto: 26-IX-1978.

(1) La diversità di queste formule può essere, « a posteriori », sostanzialmente motivata dal fatto che le velocità iniziali dei proiettili (delle armi da fuoco) erano, dalla metà del '700 alla fine dell' '800, andate notevolmente aumentando: dai circa 200 m/s

sempre la penetrazione totale aumentava, ma per certi proiettili e/o per certi mezzi si era constatata sperimentalmente l'esistenza di una determinata *velocità critica di impatto* alla quale corrispondeva la massima penetrazione totale (tale fatto era intuitivamente spiegato dalla deformazione che il proiettile subiva nell'impatto col mezzo, più o meno accentuata a seconda della velocità di impatto). Ad avvalorare ciò il Levi-Civita citava poi una « istruttiva tabella », compilata nel 1900 e riportata in un articolo del Cranz sull'Enciclopedia matematica tedesca (2).

Applicando la teoria dell'elasticità, il Levi-Civita dava, partendo da convenienti ipotesi semplificatrici, per la *deformazione impulsiva* subita dal proiettile nell'urto contro il mezzo, la formula

$$S' = S\cdot(1 + kv_0)\,, \tag{1.5}$$

dove S' è l'area della massima sezione trasversale ottenuta nell'impatto e k è un coefficiente numerico (positivo) indipendente dalla velocità di impatto v_0 (3).

---

dei proiettili sferici che, a distanze relativamente modeste, alle quali corrispondeva una velocità pressoché costante, rendevano sufficientemente valida la formula (1.2), nella quale il valore della costante c_0 « teneva conto » di tale velocità (e che rendevano altresì valida la legge monomia quadratica per la resistenza dell'aria, $F(v) = av^2$, che risaliva a Newton e che Eulero aveva usato per costruire, col primo « metodo numerico per archi successivi », a lui dovuto, la traiettoria di un proiettile nell'aria), ai 300-350 m/s della metà dell' '800, raggiunti da proiettili di forma, oltre che sferica, cilindro-ogivale o cilindro-conica (che cominciavano allora ad imporsi come conseguenza della rigatura elicoidale delle canne), che consentivano più forti gittate ed un più grande intervallo di valori della velocità (con la conseguenza di imporre l'uso di altre leggi per la resistenza dell'aria), ai 600-800 m/s della fine dell' '800, resi possibili dall'invenzione della « polvere senza fumo » (da parte del chimico francese Vieille, 1884), che aveva determinato, nel giro di pochi anni, una notevole diminuzione dei calibri delle armi (ossia della sezione S alla quale la resistenza del mezzo è proporzionale) e l'uso di proiettili « allungati » per lo più nei tipi cosiddetti blindati (o mantellati), con profili longitudinali studiati per offrire scarsa resistenza all'aria e notevole potere di penetrazione.

(2) Si veda [**4**]$_1$, p. 238. Secondo tale tabella, che si riferiva alla penetrazione in vari mezzi (sabbia, terra, legno di abete e di quercia) del proiettile del fucile francese Lebel, del calibro di 8 mm e dotato di velocità iniziale di 700 m/s, la penetrazione risultava crescente con la velocità nel caso delle due varietà di legno, mentre presentava un massimo (in corrispondenza a certe velocità critiche) per ciascuno degli altri due mezzi. Va osservato che questa tabella non è, però, molto esauriente, poiché non riporta le varie velocità di impatto, ma solo le relative distanze, ossia dà le distanze critiche, cui corrisponde la massima penetrazione, invece delle corrispondenti velocità critiche.

(3) Nel seguito diremo, per ragioni di brevità (e con abuso di linguaggio assai diffuso), *velocità* anziché *modulo della velocità*.

Sostituita questa espressione di S' al posto di S nella (1.3) otteneva così la nuova formula (1.1) per la resistenza w (4). Il calcolo della penetrazione veniva poi ricondotto alla risoluzione di una semplice equazione differenziale, che forniva per la penetrazione totale X la seguente espressione

$$X = h\,\frac{\log(1+\beta v_0^2)}{1+kv_0} \qquad \text{(Levi-Civita, 1906)}\,, \tag{1.6}$$

dove h, k, β sono costanti positive dipendenti dal proiettile e dal mezzo. La formula classica della penetrazione totale, proveniente dalla legge di resistenza di Poncelet (1.3), risultava invece la seguente

$$X = h\log(1+\beta v_0^2)\ (^5)\,. \tag{1.7}$$

La considerazione della deformazione impulsiva del proiettile introduceva nella (1.6) il divisore $1+kv_0$: la funzione di v_0 che figura a secondo membro di (1.6) assume, come è facile constatare, il suo valore massimo in corrispondenza ad un certo valore v_0^* (velocità critica di impatto), mentre invece la funzione a secondo membro di (1.7) non presenta massimo, poiché risulta crescente con v_0. Ciò dava spiegazione di quell'apparente «paradosso di balistica terminale» (6) al quale si è accennato (e che indicheremo come «paradosso di Levi-Civita»).

1.2. – Questo lavoro di Levi-Civita, a quanto mi consta, è assai poco noto e citato, tanto che quasi tutti i trattati e le monografie di Balistica comparsi

---

(4) Il Levi-Civita osservava, in $[7]_1$, che l'uso, anziché della (1.3), della forma di resistenza (1.4) di Résal (di cui citava il lavoro [**10**]), non avrebbe arrecato alcuna modificazione *qualitativa* ai risultati da lui trovati.

(5) Che il Levi-Civita riportava citando il trattato di F. Siacci [**11**]. Abbiamo qui conservato, per i coefficienti β, h, k, le stesse notazioni usate in $[7]_1$; è però opportuno osservare (come viene anche accennato in $[7]_1$) che nelle (1.6) e (1.7) il coefficiente β non ha lo stesso significato: fissato il valore di β nella (1.7) (tale valore dipende dal mezzo ed è dato da apposite tabelle: si veda, ad esempio, [**11**], $[\mathbf{4}]_2$, [**6**], ecc.), nella (1.6) al posto di β andrebbe sostituito βc^2, dove c (coefficiente di restituzione, cfr. n. **2.2**) dipende sia dal proiettile che dal mezzo. Per $k=0$, $c=1$, la (1.6) si riduce alla (1.7).

(6) La *balistica terminale* (o *balistica d'effetto*) è quella parte della balistica esterna che studia il comportamento del proiettile e gli effetti da esso provocati a partire dall'istante dell'impatto; essa trova applicazioni, anche, nella *balistica forense* e in molte questioni di medicina legale.

dopo il 1906 (7) ignorano la formula (1.6) e riportano (8) la sola formula (1.7), magari in forme (anche posteriori al 1906) particolarmente comode per l'uso pratico, come, fra le più citate, la seguente

$$X = \frac{\alpha p}{\pi r^2} \mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{2} 10^{-4} v_0^2\right) \qquad \text{(Vallier, 1913)}, \tag{1.8}$$

dove Log indica il logaritmo decimale, p ed r indicano rispettivamente (con appropriate unità di misura) il peso del proiettile e il raggio della sua massima sezione trasversale, α è una costante positiva dipendente dal proiettile e dal mezzo, mentre al posto del coefficiente β della (1.7) (il quale non ha grande influenza sul valore di X) è stato preso un valore medio $\beta = 10^{-4}/2$, sufficientemente valido per certi mezzi.

I soli Autori a me noti che citano il lavoro [**7**]$_1$ sono il Cranz (1925) e il Bruno (1934). Il Cranz, nel primo volume del suo grande trattato [**4**]$_2$ riporta, a p. 458, la sola formula di resistenza (1.1) e cita inoltre il Levi-Civita, nel fare osservazioni critiche su «particolari fenomeni», a p. 461, dove riporta anche la stessa tabella che già aveva dato in [**4**]$_1$, mentre, a p. 462, fornisce una seconda, più recente, tabella (9); cita poi il lavoro [**7**]$_1$ fra la bibliografia, a p. 562. Il Bruno, in [**2**], vol. I, dopo avere trattato il problema della penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi (pp. 325-332), si limita a dare notizia di [**7**]$_1$ in una breve annotazione a piè di p. 332 (10).

Osserviamo che sia la prima tabella del Cranz (che era servita da spunto al Levi-Civita) che la seconda, si riferivano, ciascuna, ad un *unico tipo* di proiettile: si trattava, nei due casi, di proiettili del tipo blindato, il primo di forma

---

(7) Fra questi si vedano, ad esempio, [**1**] (1910-1922), [**3**] (1921-1927), [**4**]$_2$ (1925-1936), [**2**] (1934), [**6**] (1943-1956), [**5**] (1955), [**9**] (1963).

(8) Salvo il trattato [**3**], che non considera questi particolari problemi.

(9) Questa seconda tabella, che si riferisce alla penetrazione (nella sabbia e nel legno di faggio) del proiettile del fucile tedesco Mauser, pure del calibro di 8 *mm* e dotato della velocità iniziale di 870 *m/s*, mette in risalto, per ciascuno dei due mezzi, una velocità critica cui corrisponde la massima penetrazione. Se si confrontano le due tabelle si constata, anche, la diversità di comportamento dei due proiettili che, pur essendo dello stesso calibro e all'incirca dello stesso peso, hanno velocità iniziali diverse e anche «profili longitudinali» (e quindi coefficienti di forma e coefficienti balistici) diversi.

(10) Riportiamo da tale annotazione: «... pare che in qualche esperienza, forse col fucile, sia risultato che la penetrazione avrebbe un massimo, dopo del quale diminuirebbe col crescere della velocità. Basandosi su questo fatto ... il professor Levi-Civita ha modificato la formula [di penetrazione] nella seguente ...», e qui è citata la (1.6) e viene data l'indicazione del lavoro [**7**]$_1$.

cilindro-ogivale e dotato di uno scarso coefficiente balistico, il secondo cosiddetto « di tipo S » (dove S sta per *spitz*, cioè appuntito, affusolato), più veloce e di coefficiente balistico più elevato. Entrambi i proiettili sono « debolmente espansivi » (ossia poco deformabili), costruiti per subire scarse deformazioni nell'urto contro mezzi non eccessivamente resistenti. Esistono attualmente molti altri tipi di proiettili, in particolare, fra la vasta gamma di quelli cosiddetti *deformabili* (11), quelli denominati *ad espansione controllata*, progettati per mutare la massima sezione trasversale non solo *nell'impatto*, ma anche *durante la penetrazione* nel mezzo, in modo cioè che l'aumento di tale sezione avvenga *progressivamente* al procedere del proiettile nel mezzo (anche « piuttosto debolmente resistente », come avviene per certi mezzi solidi o per mezzi semi-fluidi o fluidi). Tali proiettili, a parità di altri dati (quali calibro, peso, velocità, profilo longitudinale) hanno un potere di penetrazione minore di quelli interamente blindati.

Lo studio della penetrazione (che verrà anche qui indicata, come abitualmente, con x) di tali proiettili non può essere, evidentemente, basato sulla legge di resistenza (1.1) di Levi-Civita, ossia sulla formula (1.5) di deformazione, poiché tale formula esprime il fatto che la massima deformazione trasversale S' non dipende da x, ma ha un valore costante provocato (per così dire, « una tantum »), nell'impatto proiettile-mezzo, ossia ottenuto con deformazione impulsiva, che è messa in risalto dal coefficiente $k > 0$ (oltre che, ovviamente, dalla velocità di impatto v_0). *Supporremo pertanto che l'area della massima sezione trasversale sia una funzione*, $\bar{S}(x)$, *crescente con la* x (oltre anche a tenere preliminarmente conto, in generale, della deformazione impulsiva, ossia di ciò che potremmo chiamare « effetto Levi-Civita », non contemplato nel caso classico): ciò permetterà di pervenire a formule per la penetrazione totale che generalizzano, in vari modi, la (1.6) e si adattano ad una grande varietà di casi diversi.

1.3. – Il presente studio ha avuto origine, alcuni anni fa, da un quesito di medicina legale (riguardante un caso di balistica forense) che mi era stato proposto per spiegare un « comportamento atipico » in balistica terminale (12). La successiva lettura e la consultazione di svariate monografie e trattati di balistica razionale ed applicata (che

(11) Essi presentano generalmente, nella parte anteriore, una porzione del nucleo di piombo non protetta dalla blindatura, oppure questa appositamente indebolita. Esempi tipici sono quelli « a punta molle » (*solf nose* o *solf point*) e quelli « ad ogiva cava » (*hollow nose* o *hollow point*). Una esauriente descrizione dei vari tipi si trova, ad esempio, nel recentissimo volume [**13**], pp. 138-165.

(12) Quel caso non riguardava, però, il « paradosso di Levi-Civita ». La risposta era stata allora prevalentemente fornita attraverso l'elaborazione di molte prove di carattere sperimentale.

mi è stata indispensabile per compiere un recente studio, [**12**]) mi ha fornito l'occasione di leggere la nota $[7]_1$ del Levi-Civita ([13]) che, ad una analisi più approfondita del risultato ivi trovato, seguita inoltre da un esame comparativo di numerose prove sperimentali, mi ha fatto comprendere la possibilità di generalizzare tale risultato a casi ancora analiticamente non considerati. È bene infatti tener presente che, oltre alla grande varietà di casi proiettile-mezzo che si presentano ora all'esame dello studioso di balistica, le velocità iniziali attuali arrivano fino a superare i $1200\,m/s$ (con punte vicine ai $1500\,m/s$), ossia sono quasi il doppio di quelle «standard» dell'inizio del secolo. In particolare, nel caso delle cosiddette *ipervelocità di impatto*, dell'ordine di $1000\,m/s$ ed oltre, lo studio si presenta estremamente complesso: è ben noto che in certi mezzi (anche a velocità assai inferiori) i proiettili (specie se di particolari tipi) provocano fenomeni cosiddetti «esplosivi», o la formazione di cavità «ad ampolla» o «imbutiformi». L'esame della penetrazione è allora strettamente legato a quello degli effetti operati sul mezzo; in mezzi con particolari caratteristiche l'impatto può provocare «crateri» più o meno profondi e di diametro eguale a molte volte il calibro del proiettile ([14]).

È altresì noto, d'altra parte, che lo studio di alcuni di questi ultimi tipi di problemi, e di numerosi altri analoghi, può farsi, oggi, con metodi (sperimentali e teorici) spesso assai più proficui di quelli, forniti dall'Analisi classica, che possono essere qui usati.

2. - Alcune generalizzazioni della (1.6).

2.1. - Generalità.

Supporremo dunque che la legge con la quale l'area $\bar{S}$ della massima sezione trasversale del proiettile aumenta all'aumentare della penetrazione x sia del tipo

$$\bar{S}(x) = S\cdot(1 + kv_0)\sigma(x)\,, \tag{2.1}$$

con $\sigma(x)\geqslant 1$ funzione (continua e) crescente della x. Chiameremo $\sigma(x)$ *funzione di deformazione progressiva*. L'espressione della resistenza w risulterà allora del tipo

$$w = aS\cdot(1 + kv_0)(1 + bv^2)\sigma(x)\,, \tag{2.2}$$

([13]) Alla quale accennavo in [**12**], p. 385, annotazione ([50]). Della «nuova formula» di balistica terminale contenuta in $[7]_1$ avevo precedentemente avuto notizia da una commemorazione del Levi-Civita, letta da D. Graffi, in cui veniva anche accennato a quel particolare tipo di problema [si veda: *Tullio Levi-Civita, Convegno Internazionale celebrativo nel centenario della nascita* (*Roma,* 17-19 *dicembre* 1973), Atti dei Convegni Lincei, **8** (1975), 197-203].

([14]) Lo studio delle deformazioni a cratere provocate da impatti iperveloci ha un particolare interesse in astronomia per spiegare, ad esempio, la formazione dei crateri lunari generati da impatti con meteoriti (*impatti astrobalistici*); il problema ha presentato e presenta grande interesse anche per la protezione dei veicoli spaziali e dei satelliti artificiali dai micrometeoriti.

che generalizza la (1.1) di Levi-Civita (qui, per comodità di notazioni nei calcoli e per uniformare successivamente le notazioni a quelle abitualmente usate, è stato posto, rispetto alla (1.1), $a = c_0$, $b = c_2/c_0$).

Considereremo preliminarmente per $\sigma(x)$ i seguenti tre casi, che risultano particolarmente espressivi e che sono tipici in molte applicazioni:

$$\sigma_1(x) = 1 + \lambda x \qquad \text{(caso lineare)}, \tag{2.3}$$

$$\sigma_2(x) = \exp \lambda x \qquad \text{(caso esponenziale)}, \tag{2.4}$$

$$\sigma_3(x) = 1 + \log(1 + \lambda x) \qquad \text{(caso logaritmico)}, \tag{2.5}$$

dove λ è un coefficiente positivo che, fissata nella (2.1) la velocità di impatto v_0 e fissato il coefficiente di Levi-Civita $k > 0$, dipenderà in generale dal sistema proiettile-mezzo. Si avranno, corrispondentemente, tre forme, $\bar{S}_1(x)$, $\bar{S}_2(x)$, $\bar{S}_3(x)$, per la legge di deformazione (2.1) e, conseguentemente, tre forme per la penetrazione totale, che indicheremo rispettivamente con X_1, X_2, X_3 (e che confronteremo, successivamente, con la X data dalla (1.6)).

Per le tre funzioni $\sigma(x)$ considerate risulta $\sigma(0) = 1$ ed è inoltre $\sigma'(0) = \lambda > 0$, ossia le tre funzioni presentano, per $x = 0$, la stessa derivata positiva λ. Una altra interessante categoria di funzioni $\sigma(x)$ è costituita da quelle che soddisfano alle condizioni $\sigma(0) = 1$, $\sigma'(0) = 0$, ossia che presentano, per $x = 0$, derivata nulla: la più semplice di queste è la funzione

$$\sigma_4(x) = 1 + \lambda x^2 \tag{2.6}$$

(caso quadratico a derivata iniziale nulla).

Osserviamo che le prime tre funzioni considerate sono casi particolari (la terza nell'ipotesi $\lambda x \leqslant 1$) di una serie di potenze del tipo

$$\sigma(x) = 1 + \lambda x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \qquad \big(a_n = a_n(\lambda)\big), \tag{2.7}$$

mentre la quarta è un caso particolare della serie

$$\sigma(x) = 1 + \lambda x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n \qquad \big(a_n = a_n(\lambda)\big), \tag{2.8}$$

e che le precedenti sono tutte generalizzate dalla serie

$$\sigma(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad \big(a_n = a_n(\lambda)\big). \tag{2.9}$$

È pertanto evidente che, in questo ordine di idee, la formula (1.6) di Levi-Civita potrà essere generalizzata in vari modi, ottenuti col moltiplicare il secondo membro della (1.5) per funzioni $\sigma(x)$ del tipo (2.9) (o, eventualmente, di tipi che non rientrano fra questi, come accade ad esempio per la (2.5) nel caso $\lambda x > 1$) e, successivamente, con l'integrare una certa equazione differenziale, come si è già accennato al n. **1.1** (15).

2.2. - Il caso lineare.

La (2.1) assume la forma

$$\bar{S}_1(x) = S \cdot (1 + kv_0)(1 + \lambda x) \,. \tag{2.1$_1$}$$

Tenendo presente la (1.1), la resistenza w, che possiamo supporre riferita all'unità di massa del proiettile, sarà allora rappresentabile sotto la forma

$$w = aS \cdot (1 + kv_0)(1 + bv^2)(1 + \lambda x) \text{ (16)}; \tag{2.2$_1$}$$

l'equazione differenziale che descrive la legge di penetrazione è la seguente

$$v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -w \,, \tag{2.10}$$

che, considerata per l'espressione $(2.2)_1$ di w e integrata da $x = 0$, cui corrisponde, a causa dell'urto proiettile-mezzo, la velocità $v_1 = cv_0$ (avendo indi-cato con c, $0 < c < 1$, il coefficiente di restituzione, che dipende dalla natura dei due corpi che si urtano (17)), fino ad un x generico, fornisce, ponendo per semplicità $1/(2abS) = h$, $bc^2 = \beta$,

$$h \log \frac{1 + \beta v_0^2}{1 + (\beta/c^2)v^2} = (1 + kv_0)\left(x + \frac{\lambda}{2} x^2\right) . \tag{2.11}$$

Per $v = 0$, $x = X_1$, si ha

$$h \log (1 + \beta v_0^2) = (1 + kv_0)\left(X_1 + \frac{\lambda}{2} X_1^2\right) , \tag{2.12$_1$}$$

---

(15) Si veda [7]$_2$, p. 508, oppure [**8**], p. 54.

(16) Si veda [**8**], p. 54, dove le notazioni per le numerose costanti che intervengono sono state semplificate rispetto a quelle usate in [**7**]$_1$.

(17) Si veda [7]$_2$, p. 506, oppure [**8**], p. 53.

ossia, tenuto conto dell'espressione (1.6) di X,

$$X = X_1 + \frac{\lambda}{2} X_1^2 . \tag{2.12$)_1'$}$$

Considerate queste come equazioni di secondo grado in X_1 e indicando ancora con X_1 l'unica radice positiva, si ottiene, rispettivamente,

$$X_1 = \frac{1}{\lambda} \left\{ \sqrt{1 + 2h\lambda \frac{\log(1+\beta v_0^2)}{1+kv_0}} - 1 \right\} , \tag{1.6$)_1$}$$

$$X_1 = \frac{1}{\lambda} \{ \sqrt{1 + 2\lambda X} - 1 \} . \tag{1.6$)_1'$}$$

2.3. - Il caso esponenziale e il caso logaritmico.

Procedendo in analogia col caso precedente, nel caso esponenziale si ottiene, successivamente,

$$h\lambda \log(1+\beta v_0^2) = (1+kv_0)(\exp \lambda X_2 - 1) , \tag{2.12$)_2$}$$

$$X = \frac{1}{\lambda} (\exp \lambda X_2 - 1) , \tag{2.12$)_2'$}$$

$$X_2 = \frac{1}{\lambda} \log \left[1 + h\lambda \frac{\log(1+\beta v_0^2)}{1+kv_0} \right] , \tag{1.6$)_2$}$$

$$X_2 = \frac{1}{\lambda} \log(1 + \lambda X) . \tag{1.6$)_2'$}$$

Nel caso logaritmico risulta

$$h\lambda \log(1+\beta v_0^2) = (1+kv_0)(1+\lambda X_3)\log(1+\lambda X_3) , \tag{2.12$)_3$}$$

$$X = \frac{1}{\lambda} (1+\lambda X_3)\log(1+\lambda X_3) . \tag{2.12$)_3'$}$$

Osserviamo che in questo caso non è possibile dare X_3 in forma esplicita. È chiaro però che la $(2.12)_3'$ definisce X_3 come funzione (crescente) continua e derivabile di X; il valore numerico di X_3 potrà poi essere facilmente calcolato con tutta l'approssimazione desiderata.

3. - Confronto tra le varie formule.

3.1. - Confronto delle formule trovate con la (1.6).

La $(2.12)'_1$ dà $X_1 < X$ (come era ovviamente prevedibile per essere $\sigma_1(x) \geqslant 1$) e $X_1 \to X$ per $\lambda \to 0$. La $(2.12)'_2$, facendo uso della serie esponenziale, si scrive

$$(2.12)''_2 \qquad X = X_2 + \frac{\lambda}{2!} X_2^2 + \frac{\lambda^2}{3!} X_2^3 + \dots + \frac{\lambda^n}{(n+1)!} X_2^{n+1} + \dots ,$$

e dà $X_2 < X$, $X_2 \to X$ per $\lambda \to 0$. La $(2.12)'_3$ mostra che è $X_3 < X$ e, con un calcolo elementare, che $X_3 \to X$ per $\lambda \to 0$. Per $\lambda X_3 \leqslant 1$ si ha poi, facendo uso della serie logaritmica,

$$(2.12)''_3 \qquad X = X_3 + \frac{\lambda}{1 \cdot 2} X_3^2 - \frac{\lambda^2}{2 \cdot 3} X_3^3 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\lambda^n}{n(n+1)} X_3^{n+1} + \dots .$$

Osserviamo che le formule $(2.12)'_1$, $(2.12)''_2$, $(2.12)''_3$ presentano, a secondo membro, i primi due termini dello stesso tipo, $X_i + (\lambda/2) X_i^2$ $(i = 1, 2, 3)$: ciò mostra, come è ovvio, che per «piccoli valori» di λ (per i quali, d'altronde, X_1, X_2, X_3 hanno valori vicini al valore di X) le ultime due formule sono «abbastanza bene rappresentate» dalla $(2.12)'_1$, ossia dal caso lineare per la funzione di deformazione $\sigma(x)$.

Il confronto fra $(2.12)'_1$, $(2.12)''_2$, $(2.12)''_3$ dà poi il prevedibile risultato

$$(3.1) \qquad X_2 < X_1 < X_3 < X .$$

L'ipotesi $\lambda X_3 \leqslant 1$, che ha condotto alla $(2.12)''_3$, era qui assai naturale, poichè X si ottiene dalle formule trovate per $\lambda \to 0$. Se invece fosse $\lambda X_3 > 1$, avendosi (posto $\lambda X_3 = t$)

$$\log(1+t) = \log t + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{nt^n} + \dots \qquad (t > 1),$$

la $(2.12)'_3$ risulterebbe della forma

$$(2.12)'''_3 \qquad X = \frac{1}{\lambda} \left\{ (1 + \lambda X_3) \log \lambda X_3 + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1) \lambda^n X_3^n} \right\} .$$

3.2. - Esistenza del massimo per X_1, X_2, X_3.

Un esame, anche solo « visivo », delle formule che legano X a X_1, X_2, X_3, in particolare delle $(1.6)_1'$, $(1.6)_2'$ e della $(2.12)_3'$, mostra già che l'esistenza del massimo di X (dovuto alla presenza, in X, del coefficiente k di Levi-Civita) in corrispondenza ad una certa velocità critica v_0^*, porta come conseguenza l'esistenza del massimo per ciascuna delle tre funzioni X_1, X_2, X_3 e, ciò che è particolarmente interessante, mostra che *tale massimo si ottiene per la stessa velocità critica* v_0^* *che dà il massimo di* X. Le $(1.6)_1'$ e $(1.6)_2'$ indicano infatti che X_1 e X_2 sono funzioni crescenti di X, e lo stesso indica per X_3 l'equazione $(2.12)_3'$ che definisce implicitamente X_3 come funzione di X.

Indipendentemente da queste osservazioni, ritroviamo ciò coi calcoli, ai quali accenniamo brevemente per dedurre l'equazione che dà il coefficiente k.

(a) Nella $(1.6)_1$ consideriamo $X_1 = X_1(v_0)$ e studiamo il comportamento di X_1 al crescere di v_0. È $X_1(0) = 0$ e risulta $X_1 \to 0$ per $v_0 \to +\infty$: la X_1 ammette pertanto (almeno) un massimo relativo nell'intervallo $0 < v_0 < +\infty$. Dall'esame dell'equazione $X_1'(v_0) = 0$, che ammette una sola radice (positiva) v_0^*, segue poi che il massimo $X_1^* = X_1(v_0^*)$, si ottiene per il valore v_0^* radice dell'equazione

$$(3.2) \qquad 2\beta v_0(1 + kv_0) - k(1 + \beta v_0^2)\log(1 + \beta v_0^2) = 0 \, ,$$

il cui calcolo numerico approssimato non presenta difficoltà, una volta noti i valori di β e di k. La (3.2), che *è la stessa ottenuta dal Levi-Civita* in $[7]_1$, può, d'altra parte, riguardarsi, noto il valore di β, come *definizione della costante* k, desunta dalla misura diretta della velocità critica v_0^* ([18]).

(b) Considerata, nella $(1.6)_2$, $X_2 = X_2(v_0)$, si trova, in analogia a quanto accennato in (a), la stessa (3.2), ossia la stessa velocità critica v_0^*, che dà il massimo $X_2^* = X_2(v_0^*)$.

(c) Considerata l'equazione $(2.12)_3$, che definisce implicitamente X_3 come funzione di v_0, si ritrova la (3.2) e quindi il massimo $X_3^* = X_3(v_0^*)$.

([18]) Si veda $[7]_2$, pp. 508-509. Il Levi-Civita forniva inoltre per k l'espressione approssimata $(2/v_0^*)[\log(\beta v_0^{*2}) - 2]^{-1}$, semplicemente ottenuta dalla (3.2) per $v_0 = v_0^*$ quando si possa trascurare $1/(\beta v_0^{*2})$ rispetto all'unità.

4. - Altri casi. Osservazioni.

4.1. - I casi $\sigma(x)$ a derivata iniziale nulla.

(a) Riprendendo l'espressione (2.6) di $\sigma_4(x)$ (caso quadratico) e procedendo come al n. **2.2**, si trova, come analoga della $(2.12)'_1$, indicando qui con X_4 la penetrazione totale,

$$X = X_4 + \frac{\lambda}{3} X_4^3 \qquad (2.12)'_4$$

($X_4 < X$, $X_4 \to X$ per $\lambda \to 0$). La $(2.12)'_4$ definisce X_4 come funzione crescente (continua e derivabile) di X; risolvendo l'equazione cubica $(2.12)'_4$, che ha una sola radice reale (positiva), risulta poi

$$X_4 = \left(\frac{3X}{2\lambda} + \sqrt{\frac{4 + 9\lambda X^2}{4\lambda^3}}\right)^{1/3} + \left(\frac{3X}{2\lambda} - \sqrt{\frac{4 + 9\lambda X^2}{4\lambda^3}}\right)^{1/3}. \qquad (1.6)'_4$$

Si trova, anche qui, che il massimo di X_4 si ottiene per il valore v_0^* radice dell'equazione (3.2), ossia che tale massimo è $X_4^* = X_4(v_0^*)$.

(b) Consideriamo infine

$$\sigma_5(x) = \cosh(\sqrt{2\lambda}x) \text{ [19]} \qquad (4.1)$$

(caso del coseno iperbolico). In analogia coi casi precedenti, indicando con X_5 la penetrazione totale, risulta

$$X = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \operatorname{senh}(\sqrt{2\lambda}X_5)\ , \qquad (2.12)'_5$$

che dà

$$X_5 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \log(\sqrt{2\lambda}X + \sqrt{1 + 2\lambda X^2}) \qquad (1.6)'_5$$

---

[19] Qui consideriamo $\cosh(\sqrt{2\lambda}x)$, anziché $\cosh \lambda x$, per non «cambiare significato» al coefficiente λ rispetto al caso precedente: infatti risulta

$$\sigma_5(x) = 1 + \frac{2\lambda}{2!}x^2 + \frac{(2\lambda)^2}{4!}x^4 + \ldots = \sigma_4(x) + o(\lambda^2) \quad (\text{per } \lambda \to 0)\ ,$$

mentre lo sviluppo di $\cosh \lambda x$ avrebbe dato $1 + (\lambda^2/2)x^2 + o(\lambda^4)$, dove i primi due termini non coincidono con $\sigma_4(x)$.

($X_5 < X$, $X_5 \to X$ per $\lambda \to 0$). Il calcolo del massimo, X_5^*, di X_5 è ancora ricondotto alla risoluzione dell'equazione (3.2), è cioè $X_5^* = X_5(v_0^*)$. Dalla $(2.12)_5'$ si ha

$$(2.12)_5'' \qquad X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)^n}{(2n+1)!} X_5^{2n+1} = X_5 + \frac{\lambda}{3} X_5^3 + o(\lambda^2)\,.$$

Il confronto con la $(2.12)_4'$ mostra che $X_5 < X_4 (< X)$, come era prevedibile per essere $\sigma_5(x) \geqslant \sigma_4(x)$ $(\geqslant 1)$.

Tenuto anche conto dei confronti precedenti appare che, mentre nei primi tre casi considerati, ossia in quelli a derivata iniziale *positiva*, i primi due termini a secondo membro delle $(2.12)_i'$ erano del tipo

$$(4.2) \qquad X_i + \frac{\lambda}{2} X_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3)\,,$$

nei due casi a derivata iniziale *nulla* i primi due termini delle formule analoghe sono invece del tipo

$$(4.3) \qquad X_i + \frac{\lambda}{3} X_i^3 \qquad (i = 4, 5)\,,$$

e ciò segnala la diversità sostanziale dei due tipi di casi, ossia dei due tipi di funzioni di deformazione $\sigma(x)$ relative ([20]).

4.2. - Osservazioni su casi più generali.

Concludiamo osservando che casi più generali, del tipo (2.7)-(2.9), non darebbero, rispetto ai cinque casi trattati (e tenuto conto dei due tipi di funzioni $\sigma(x)$ considerate), risultati qualitativamente diversi: infatti, anche volendo considerare la (2.9) nella sua generalità, nell'ipotesi che la serie di potenze che in essa figura sia convergente nell'intervallo di integrazione (nel qual caso il teorema di Abel sulle serie di potenze assicura, nello stesso intervallo, la convergenza uniforme della serie, che risulta pertanto integrabile termine a termine), il suo contributo, ad integrazione effettuata, sarebbe costituito da una serie di potenze convergente (e di somma X), che sostituirebbe le analoghe funzioni che figurano ai secondi membri delle $(2.12)_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$, trovate

([20]) Ad esempio, basandoci sul secondo caso riportato nella tabella in $[4]_2$, Bd. I, p. 462, si abbia $v_0^* = 760\ m/s$, $X^* = 80\ cm$. Con $\lambda = 10^{-2}$ le prime tre formule considerate danno i valori $X_1^* = 61\ cm$, $X_2^* = 59\ cm$, $X_3^* = 63\ cm$, mentre le ultime due formule, con lo stesso valore di λ (che ha ora però un diverso significato), danno i valori notevolmente inferiori $X_4^* = 25\ cm$, $X_5^* = 22\ cm$ (e ciò mette in risalto il diverso comportamento dei due tipi di formule, ossia dei due tipi di funzioni $\sigma(x)$ considerate).

nei vari casi trattati: la conclusione circa la velocità critica v_0^* sarebbe la stessa.

I risultati trovati contribuiscono, dunque, a mettere maggiormente in risalto l'eleganza della formula (1.6) del Levi-Civita, nella quale il coefficiente k di deformazione impulsiva ha un ruolo essenziale rispetto alla formula (1.7): tale coefficiente è, come si è visto, quello stesso che determina la velocità critica nelle varie formule che qui generalizzano la (1.6); velocità critica che, a parità del coefficiente β che figura nella (3.2), indipendentemente dal coefficiente h (che non vi figura), e inoltre *indipendentemente dal coefficiente* λ qui introdotto, conserva lo stesso valore, che aveva nella (1.6), anche nelle nuove formule, nelle quali invece il coefficiente di deformazione progressiva λ ha la funzione di «attenuare la penetrazione totale» rispetto a quella fornita dalla formula di Levi-Civita, secondo le leggi date, caso per caso, dalle varie espressioni ottenute per le funzioni X_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ (o da quelle che si potrebbero ottenere dallo studio dei casi più generali accennati).

4.3. - Il caso limite $k = 0$, $\lambda > 0$.

Nel caso $k = 0$ la formula (1.6) si riduce alla formula classica (1.7); la (2.1) assume allora la forma $\bar{S}(x) = S\sigma(x)$. Procedendo in analogia con quanto è stato fatto ai nn. **2.2**, **2.3**, **4.1**, si trovano, per i cinque casi ivi trattati, le stesse formule $(1.6)_1'$, $(1.6)_2'$, $(2.12)_3'$, $(1.6)_4'$, $(1.6)_5'$, nelle quali, però, all'espressione di X che era allora data dalla (1.6) si deve intendere sostituita quella data dalla (1.7); valgono ancora la relazione (3.1) e la $X_5 < X_4 < X$.

È ovvio che non si ha, in questo caso, velocità critica, poichè $X_1, X_2, \ldots, X_5$ risultano funzioni crescenti della velocità di impatto (manca cioè il «paradosso di Levi-Civita»). Questo caso riguarda la penetrazione di proiettili di tipo espansivo in mezzi che offrono piuttosto scarsa resistenza: la deformazione è solo progressiva, manca (o è, di fatto, trascurabile) la componente impulsiva. Ovviamente, a parità di proiettili e di velocità di impatto, ci si devono aspettare valori piuttosto piccoli per il coefficiente λ e forti valori per la penetrazione (a causa della scarsa resitenza del mezzo), ma, in ogni caso, minori, a parità degli altri elementi, dei valori forniti dalla (1.7) [21]. Tale formula «non pre-

---

[21] Ad esempio, supponendo $v_0 = 700\ m/s$, con $X = 90\ cm$, $k = 0$; $\lambda = 10^{-3}$, si ha dalla $(1.6)_1'$ $X_1 = 86\ cm$, cui corrisponde $\bar{S}_1(X_1) = 1{,}04^2 S$ (ossia il calibro del proiettile deformato è di assai poco superiore al calibro iniziale e la penetrazione X_1 è di poco inferiore alla X della formula classica); la $(1.6)_5'$ dà invece $X_5 = 47\ cm$, cui corrisponde $\bar{S}_5(X_5) = 2{,}04^2 S$ (ossia in questo secondo caso, pur con lo stesso valore di λ ma con una diversa legge di deformazione progressiva, il calibro del proiettile deformato è circa il doppio del calibro iniziale, mentre la penetrazione è assai minore di quella data dalla formula classica).

vedeva » proiettili di tipo espansivo e, per così dire, « si autocorreggeva » con valori empiricamente calcolati per il coefficiente h, variando convenientemente il quale « alcuni errori », dovuti ad abuso della formula, potevano essere « riassorbiti » (alcuni, ma non tutti: tipico è il caso del « paradosso balistico » che l'abuso della formula aveva provocato). Osserviamo, a chiarimento, che il coefficiente h dipende, oltre che dal mezzo, anche da certi dati del proiettile (calibro, peso, coefficiente di forma e coefficiente balistico): si veda, ad esempio, [**5**], p. 346, [**6**], vol. I, p. 354. Abbiamo anche già accennato (al n. **1.1**) che la formula (1.7) era originariamente usata per velocità piuttosto basse e per proiettili sferici.

4.4. - Sul calcolo del coefficiente λ. Osservazioni conclusive.

Poiché il coefficiente λ è legato alle varie leggi $\sigma(x)$ di deformazione progressiva, occorrerà fissare l'attenzione su tali leggi. Accenneremo a due casi tipici, fra quelli trattati. Nel caso lineare (2.3) consideriamo la $(2.12)_1'$ come equazione nell'incognita λ: fissati v_0, β, h, k, il coefficiente λ può venire dedotto, per misura diretta di X_1, dalla $(2.12)_1'$, che dà

$$\lambda = 2(X - X_1)/X_1^2\,. \tag{4.4}$$

Analogamente, nel caso quadratico (2.6) si ottiene

$$\lambda = 3(X - X_4)/X_4^3\,. \tag{4.5}$$

Tenuto conto delle espressioni di X, X_1, X_4, il coefficiente λ dipende, in generale, oltre che da β e da h (ossia dal mezzo e da certe caratteristiche del proiettile), anche dalla velocità di impatto v_0 e dal coefficiente k (il quale non dipende né da h, né da v_0).

Fra le formule che generalizzano la (1.6), qui trovate, risultano particolarmente espressive le $(1.6)_1'$, $(1.6)_2'$, $(1.6)_4'$, $(1.6)_5'$ che danno la penetrazione totale in funzione della X data dalla (1.6). In esse figurano entrambi i coefficienti k e λ, sui quali ci sembra utile riassumere brevemente i vari casi: 1°) se è $k > 0$, $\lambda > 0$, ad una deformazione impulsiva ($k > 0$) si accompagna una deformazione progressiva ($\lambda > 0$): in questo caso le formule trovate generalizzano la (1.6) di Levi-Civita; 2°) se è $k > 0$, $\lambda = 0$, si ha solo deformazione impulsiva (manca o è, di fatto, trascurabile la deformazione progressiva), in questo caso vale la (1.6); 3°) se è $k = 0$, $\lambda > 0$, si ha solo deformazione progressiva (manca o è, di fatto, trascurabile la deformazione impulsiva): le formule trovate generalizzano la (1.7), ma non la (1.6); 4°) se è $k = 0$, $\lambda = 0$, si ha il caso classico (1.7).

Osserviamo, a conclusione, che i due coefficienti k (di Levi-Civita) e λ (qui introdotto) svolgono funzioni, in certo senso, complementari: il primo è legato alla deformazione implulsiva e, conseguentemente, caratterizza la velocità critica (di massima penetrazione totale), che manca nella (1.7); il secondo è legato alla deformazione progressiva, che manca nella (1.6), e che attenua la penetrazione totale sia rispetto a quella data dalla formula di Levi-Civita, sia rispetto a quella data dalla formula classica di Poncelet.

Bibliografia

[1] G. Bianchi, *Corso teorico-pratico di Balistica esterna* (*con Tavole numeriche*), Pasta, Torino 1910 (2^a ediz. 1922).

[2] G. Bruno, *Balistica esterna*, vol. I (*Balistica razionale*), vol. II (*Balistica applicata*), Roggero e Tortia, Torino 1934.

[3] P. Charbonnier, *Traité de Balistique extérieure*, t. I, II (*Balistique extérieure rationnelle*), Doin et Gauthier-Villars, Paris 1921, 1927.

[4] C. Cranz: $[\bullet]_1$ *Ballistik*, Enc. der Math. Wiss., Bd. IV, **3**, Heft 2 (1903), pp. 185-279; $[\bullet]_2$ *Lehrbuch der Ballistik*, Bd. I (1925), II (1926), III (1927), Ergänzungsband (1936), Julius Springer, Berlin.

[5] E. Della Valle, *Balistica esterna* (*sperimentale ed applicata*), Castello, Torino 1955.

[6] F. Galanzino, *Balistica esterna*, vol. I, II, III, Libreria dello Stato, Roma 1943-1956.

[7] T. Levi-Civita: $[\bullet]_1$ *Sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi*, Ist. Veneto Sci. Lett. Arti Atti Cl. Sci. Mat. Natur. **65**, parte II (1906), 1149-1158; (lo stesso lavoro si trova in: $[\bullet]_2$ *Opere matematiche*, vol. II (1901-1907), Zanichelli, Bologna 1956; pp. 505-513).

[8] T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Nozioni di Balistica esterna*, Zanichelli, Bologna 1935.

[9] H. Molitz und R. Strobel, *Äussere Ballistik*, Springer-Verlag, Berlin 1963.

[10] A. H. Résal, *Sur la pénétration d'un projectile dans les semi-fluides et les solides*, C. R. Acad. Sci. Paris **130** (1895), 397-406.

[11] F. Siacci, *Balistica*, 2° ediz., Casanova, Torino 1888.

[12] L. Tanzi Cattabianchi, *I contributi di Mauro Picone alla Balistica razionale*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977), 357-389.

[13] A. Ugolini, *L'esperto balistico*, vol. I, Edit. Olimpia, Firenze 1978.

Summary

Here are presented some generalizations of a formula by Levi-Civita concerning impulsive deformations (characterized by a coefficient « of impulsive deformation »), through the introduction of a coefficient « of progressive deformation ». On the vanishing of the two coefficients we get a classical formula by Poncelet.

* * *