Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 449-458

VITTORIO E. BONONCINI (*)

Soluzioni periodiche di equazioni differenziali della forma $x^{(n)} = f(t, x)$ (**)

Introduzione.

In questo lavoro consideriamo l'equazione differenziale ordinaria $x^{(n)} = f(t, x)$, ove f è continua in E^2, periodica di periodo $\tau = 2\pi/\omega$ in t e verificante la condizione di simmetria: $f(-t, -x) = -f(t, x)$ se n è pari, $f(-t, x) = -f(t, x)$ se n è dispari.

Nel n. **2** dimostriamo due teoremi di esistenza di almeno una soluzione $x(t)$ periodica di periodo τ, a media nulla, dispari se n è pari, pari se n è dispari, e inoltre diamo una stima $|x(t)| \leqslant R$ per il valore assoluto delle soluzioni periodiche delle quali dimostriamo l'esistenza.

Il presente lavoro estende all'equazione di cui sopra risultati ottenuti in uno precedente [**1**] per $n = 2$.

Come in [**1**] usiamo il teorema del punto unito di Schauder, un procedimento indicato da Cesari e valutazioni delle norme di certi operatori lineari $H^n(I - P)$. Queste valutazioni sono presentate qui per la prima volta (n. **4**), insieme al procedimento con cui esse sono state ottenute. Tali valutazioni delle norme degli operatori indicati possono essere di interesse in altri problemi.

1. – Consideriamo l'equazione differenziale di ordine n

$$x^{(n)} = f(t, x) \,, \tag{1}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Generale e Finanziaria, Università, 40126 Bologna, Italy.

(**) Ricevuto: 21-IX-1978.

ove $f(t, x)$ è una funzione continua in E^2 e periodica in t di periodo $\tau = 2\pi/\omega$. Segue che ogni possibile soluzione $x(t)$ della (1) di periodo τ appartiene allo spazio S di tutte le funzioni $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, continue e periodiche di periodo τ. Penseremo S come uno spazio di Banach con la norma usuale $\|x(t)\| = \sup_t |x(t)|$. Ogni elemento $x(t)$ di S ha la serie di Fourier

$$x(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\,\omega t + b_k \operatorname{sen} k\,\omega t)\,.$$

Se f denota l'operazione definita da $fx = f[t, x(t)]$ con $x \in S$, allora $f\colon S \to S$. Come in [1] indichiamo con P l'operazione definita da $Px = \tau^{-1}\int_0^\tau x(t)\,dt$, il valore medio di x, e pertanto $P\colon S \to S$, $PP = P$ (cioè P è idempotente). Inoltre, se I è l'operazione identica, $S_0 = PS$, $S_1 = (I - P)S$, si ha che S ha la decomposizione $S = S_0 + S_1$ (somma diretta). Ogni elemento x di S_1 ha la serie di Fourier

$$x(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\,\omega t + b_k \operatorname{sen} k\,\omega t)\,.$$

Se indichiamo con $y = Hx$ l'unica primitiva di x periodica di periodo τ a media nulla, allora y ha la serie di Fourier che si ottiene da quella di x integrando formalmente e questa operazione può essere iterata quante volte si vuole, ottenendosi

$$H^n x \sim (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} [(k\omega)^{-n} a_k \cos k\,\omega t + (k\omega)^{-n} b_k \operatorname{sen} k\,\omega t] \qquad \text{se } n = 2m\,,$$

cioè se n è pari,

$$H^n x \sim (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} [-(k\omega)^{-n} b_k \cos k\,\omega t + (k\omega)^{-n} a_k \operatorname{sen} k\,\omega t] \qquad \text{se } n = 2m - 1,$$

cioè se n è dispari, essendo in enbrambi i casi $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Pertanto $H^n\colon S_1 \to S_1$, per ogni n, è un operatore lineare e continuo in S_1. Analogamente gli operatori $H^n(I - P)\colon S_1 \to S_1$ sono anch'essi lineari e continui e ne indichiamo la norma con k_n, ossia $k_n = \|H^n(I - P)\|$.

Se x è una soluzione della (1), allora $x^{(n)} = fx$, $n \geqslant 1$, e necessariamente $x^{(n)} \in S_1$. Applicando l'operatore $H^n(I - P)$ risulta $H^n(I - P)x^{(n)} = H^n(I - P)fx$, onde $(I - P)x = H^n(I - P)fx$ e quindi

$$x = Px + H^n(I - P)fx\,, \tag{2}$$

ossia $x = Tx$ ove T è l'operatore definito da $Tx = Px + H^n(I-P)fx$. Questa è l'equazione ausiliaria [**2**]$_3$. Segue che x è un punto unito di T. Inversamente, se $x = Tx$ è un punto unito di T, si ha $x = a_0 + H^n(I-P)fx$ con $a_0 = Px$, quindi $x^{(n)} = (d^n/dt^n)H^n(I-P)fx$, ossia $x^{(n)} - f[t, x(t)] = -Pf[t, x(t)]$. Segue che se $x = Tx$ è una soluzione dell'equazione ausiliaria (2), allora x è una soluzione dell'equazione (1) se e soltanto se $Pfx = 0$, vale a dire se

$$\tau^{-1}\int_0^\tau f[t, x(t)]\,dt = 0\,. \tag{3}$$

Questa è l'equazione di biforcazione o equazione determinante [**2**]$_3$.
A questo punto è necessario premettere che

$$\begin{aligned}
k_1 &= \|H(I-P)\| = 4^{-1}(2\pi/\omega) &&= 1{,}5707963\omega^{-1}\,,\\
k_2 &= \|H^2(I-P)\| = (\sqrt{3}/54)(2\pi/\omega)^2 &&= 1{,}26627\omega^{-2}\,,\\
k_3 &= \|H^3(I-P)\| = (1/192)(2\pi/\omega)^3 &&= 1{,}2919\omega^{-3}\,,\\
k_4 &= \|H^4(I-P)\| = 0{,}0008148(2\pi/\omega)^4 &&= 1{,}2699\omega^{-4}\,,\\
k_5 &= \|H^5(I-P)\| = 0{,}0001302(2\pi/\omega)^5 &&= 1{,}2750\omega^{-5}\,,\\
k_6 &= \|H^6(I-P)\| = 0{,}00001995(2\pi/\omega)^6 &&= 1{,}2275\omega^{-6}\,.
\end{aligned}$$

In [**1**] abbiamo determinato k_1 e k_2; determineremo k_3, k_4, k_5, k_6 nel n. 4 del presente lavoro.

2. - L'esistenza di soluzioni periodiche.

Denotiamo con S_d il sottospazio di tutti gli elementi $x \in S$ con $x(t)$ periodica di periodo $2\pi/\omega$, continua, dispari, ossia $x(-t) = -x(t)$, e pertanto $Px = 0$, cioè $S_d \in S_1$. Denotiamo con S_p il sottospazio di tutti gli elementi $x \in S$ con $x(t)$ periodica di periodo $2\pi/\omega$, continua, a media nulla, pari, ossia $x(-t) = x(t)$, e $Px = 0$, e pertanto con questa definizione abbiamo pure $S_p \in S_1$.

Dimostriamo i due seguenti teoremi di esistenza.

Teorema I. *Se n è pari, se $f(t, x)$ è continua in E^2 con $f(t+\tau, x) = f(t, x)$, $\tau = 2\pi/\omega$, $f(-t, -x) = -f(t, x)$ e se, infine, R ed R' sono due costanti positive tali che $k_n R' \leqslant R$ e $|f(t, x)| \leqslant R'$ per ogni t e per tutti gli $|x| \leqslant R$, allora l'equazione $x^{(n)} = f(t, x)$ ha almeno una soluzione $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, continua, periodica di periodo τ, dispari, con $|x(t)| \leqslant R$.*

Teorema II. *Se n è dispari, se $f(t, x)$ è continua in E^2 con $f(t+\tau, x) = f(t, x)$, $\tau = 2\pi/\omega$, $f(-t, x) = -f(t, x)$ e se, infine, R ed R' sono due costanti positive tali che $k_n R' \leqslant R$ e $|f(t, x)| \leqslant R'$ per ogni t e per tutti gli $|x| \leqslant R$, allora l'equazione $x^{(n)} = f(t, x)$ ha almeno una soluzione $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, continua, periodica di periodo τ, pari e a media nulla, con $|x(t)| \leqslant R$.*

Dimostrazione. Sia n pari. Per $x \in S_d$ è $f[-t, x(-t)] = f[-t, -x(t)] = -f[t, x(t)]$, ossia $f[t, x(t)] \in S_d$ e $Pfx = 0$, cioè l'equazione di biforcazione (3) è identicamente soddisfatta. Per $x \in S_d$, $\|x\| \leqslant R$, si ha $fx \in S_d$, $\|fx\| \leqslant R'$, $\|H^n(I-P)fx\| \leqslant k_n R' \leqslant R$, $H^n(I-P)fx \in S_d$ essendo n pari, e quindi la sfera $\Sigma = [x \in S_d | \|x\| \leqslant R]$ è trasformata in se stessa dalla trasformazione T, ossia $T\colon \Sigma \to \Sigma$. La sfera Σ è certamente un insieme chiuso e convesso in S_d, la chiusura essendo presa nella topologia dello spazio di Banach S, cioè la topologia della convergenza uniforme. Dimostriamo che T è una trasformazione compatta. Invero, se $\{x_s\}$ è una successione in Σ, allora, per le ipotesi fatte, si ha $\|x_s\| \leqslant R$, $\|fx_s\| \leqslant R'$, e se $y_s = H^n(I-P)fx_s$ si ha $y_s' = H^{n-1}(I-P)fx_s$ e le funzioni periodiche e continue $y_s(t), y_s'(t)$ sono equilimitate e pertanto le funzioni $y_s(t)$ sono equilimitate e equilipschitziane, quindi equiassolutamente continue. In base al teorema di Ascoli la successione $\{y_s\}$ possiede una sottosuccessione che è uniformemente convergente. Per il teorema di Schauder la trasformazione $T\colon \Sigma \to \Sigma$ possiede almeno un punto unito $x = Tx \in \Sigma \subset S_d$ e come si è detto l'equazione di biforcazione (3) è identicamente soddisfatta.

Sia n dispari. Per $x \in S_p$, e pertanto $Px = 0$, si ha $f[-t, x(-t)] = f[-t, x(t)] = -f[t, x(t)]$, ossia $f[t, x(t)] \in S_d$ e dunque $Pfx = 0$ come sopra. Per $x \in S_p$ (e dunque $Px = 0$), $\|x\| \leqslant R$, si ha $fx \in S_d$, $\|fx\| \leqslant R'$ $\|H^n(I-P)fx\| \leqslant k_n R' \leqslant R$, $H^n(I-P)fx \in S_p$ essendo n dispari, e quindi la sfera $\Sigma = [x \in S_p | \|x\| \leqslant R]$ è trasformata in se stessa dalla trasformazione T, ossia $T\colon \Sigma \to \Sigma$. Il ragionamento a questo punto procede come sopra, facendo attenzione che di nuovo $y_s = H^n(I-P)fx_s$ e $y_s' = H^{n-1}(I-P)fx_s$ sono limitate, e questo vale anche per $n = 1$ nel quale caso l'ultima relazione diviene $y_s' = (I-P)fx_s$. Come nel caso di n pari si conclude che $T\colon \Sigma \to \Sigma$ possiede almeno un punto unito $x = Tx \in \Sigma \subset S_p$.

I Teoremi I e II sono pertanto dimostrati.

Il teorema del n. **2** di [**1**] rientra, come caso particolare, nel Teorema I.

Osservazione. Si noti che le proprietà delle soluzioni, indicate nei Teoremi I e II, si riferiscono solo alle soluzioni delle quali viene dimostrata l'esistenza. Per esempio l'equazione $x' = 0$ ha le soluzioni periodiche $x(t) = c$, di cui solo quella corrispondente a $c = 0$ è a media nulla. Analogamente l'equazione $x' = -\operatorname{sen} t$ ha le soluzioni periodiche $x(t) = \cos t + c$ delle quali solo quella con $c = 0$ è a media nulla.

3. - Esempi.

(a) Consideriamo l'equazione

$$x^{(4)} = ax^3 + b\,\mathrm{sen}\,t\,,$$

con a, b reali. Si ha

$$|f(t,\,x)| = |ax^3 + b\,\mathrm{sen}\,t| \leqslant |a|\,|x^3| + |b|$$

e quindi l'equazione possiede almeno una soluzione continua, periodica di periodo 2π, dispari, se si può determinare una costante $R > 0$ tale che risulti, per $|x| \leqslant R$,

$$k_4 R' = k_4\bigl(|a|R^3 + |b|\bigr) \leqslant R\,,$$

ossia, per essere $\omega = 1$, $k_4 = 1{,}2699$,

$$1{,}2699\ \bigl(|a|R^3 + |b|\bigr) \leqslant R\,.$$

Questa condizione è per esempio verificata se si assume $a = 1/3$, $b = 1/4$, $R = 1$ e conseguentemente l'equazione

$$x^{(4)} = (1/3)x^3 + (1/4)\,\mathrm{sen}\,t$$

ha almeno una soluzione $x(t)$ dispari, periodica di periodo 2π e con $|x(t)| \leqslant 1$.

(b) Sia l'equazione

$$x^{(5)} = F(x)\,\mathrm{sen}\,t + G(x)\,\mathrm{sen}\,3t$$

con $F(x)$, $G(x)$ funzioni continue arbitrarie e $|F(x)| \leqslant a$, $|G(x)| \leqslant b$, a, b reali.

In questa ipotesi l'equazione ha almeno una soluzione continua periodica di periodo 2π, pari e a media nulla. Infatti

$$|f(t,\,x)| = |F(x)\,\mathrm{sen}\,t + G(x)\,\mathrm{sen}\,3t| \leqslant a + b$$

e posto $a + b = R'$, l'equazione data ammette almeno una soluzione $x(t)$ del tipo suddetto se si può determinare una costante $R > 0$ tale che risulti

$$k_5 R' = 1{,}2750\ (a + b) \leqslant R\,.$$

Questa condizione è verificata se si prende, ad esempio, $R = 1{,}2750(a + b)$ e quindi esiste almeno una soluzione del tipo su indicato ed è $|x(t)| \leqslant \leqslant 1{,}2750(a + b)$.

(c) L'equazione

$$x' = ax \operatorname{sen} t + b \operatorname{sen} 3t\,,$$

a, b reali, ha almeno una soluzione $x(t)$ continua, periodica di periodo 2π, pari e a media nulla, se si può trovare una costante $R > 0$ tale che sia

$$1{,}5707963(|a|R + |b|) \leqslant R\,.$$

Questa condizione è certamente verificata se si assume, per esempio, $R = 1{,}5707963|b|(1-s)^{-1}$, $s = 1{,}5707963|a| < 1$, b arbitrario. Se si prende $a = 1/2$, $b = 1$, $R = 7{,}3196$, si ha l'equazione

$$x' = (1/2)x \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 3t$$

che ammette almeno una soluzione $x(t)$ del tipo indicato con $|x(t)| \leqslant 7{,}3196$.

(d) Consideriamo l'equazione

$$x' = ax^2 \operatorname{sen} 2t + b \operatorname{sen} 4t\,,$$

a, b reali. In questo caso è $\omega = 2$, quindi l'equazione data ammette almeno una soluzione $x(t)$ continua, periodica di periodo π, pari e a media nulla, se si può trovare una costante $R > 0$ tale che si abbia

$$k_1 R' = 0{,}7853981(|a|R^2 + |b|) \leqslant R\,.$$

Se si prende, ad esempio, $a = 1/4$, $b = 1/4$, $R = 1$ questa condizione è verificata e così l'equazione

$$x' = (1/4)x^2 \operatorname{sen} 2t + (1/4) \operatorname{sen} 4t$$

ammette una soluzione $x(t)$ del tipo suddetto con $|x(t)| \leqslant 1$.

4. – Calcoliamo le costanti

$$k_n = \|H^n(I - P)\| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^T |K_n(t, s)|\,\mathrm{d}s\,, \qquad n = 3, 4, 5, 6\,.$$

Come in [1] assumiamo $\tau = 1$. Le espressioni dei nuclei $K_1(t, s)$, $K_2(t, s)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, sono già state ottenute in [1] e così pure i valori di k_1 e k_2.

(1) Per $n = 3$ si ha

$$K_3(t, s) = \begin{cases} -12^{-1}(t-s) + 4^{-1}(t-s)^2 - 6^{-1}(t-s)^3 & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ 12^{-1}(s-t) - 4^{-1}(s-t)^2 + 6^{-1}(s-t)^3 & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 . \end{cases}$$

Considerata la funzione

$$v(u) = -12^{-1}u + 4^{-1}u^2 - 6^{-1}u^3 , \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1 ,$$

si prova che

$$\int_0^1 |K_3(t, s)| \mathrm{d}s = \int_0^1 |v(u)| \mathrm{d}u , \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 .$$

La funzione $v(u) = 6^{-1}u(1-u)(u-1/2)$ si annulla per $u = 0$, $u = 1/2$, $u = 1$, é emisimmetrica rispetto a $u = 1/2$ e inoltre è $v(u) \leqslant 0$ per $0 \leqslant u \leqslant 1/2$, quindi

$$k_3 = \int_0^1 |v(u)| \mathrm{d}u = -2 \int_0^{1/2} v(u) \mathrm{d}u = 192^{-1} = 0{,}0052083 .$$

(2) Per $n = 4$ risulta

$$K_4(t, s) = \begin{cases} 720^{-1} - 24^{-1}(t-s)^2 + 12^{-1}(t-s)^3 - 24^{-1}(t-s)^4 & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ 720^{-1} - 24^{-1}(s-t)^2 + 12^{-1}(s-t)^3 - 24^{-1}(s-t)^4 & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 . \end{cases}$$

Considerata la funzione

$$v(u) = 720^{-1} - 24^{-1}u^2 + 12^{-1}u^3 - 24^{-1}u^4 , \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1 ,$$

si verifica che $v(u) = v(1-u)$, $\int_0^1 v(u) \mathrm{d}u = 0$ e inoltre si dimostra che

$$\int_0^1 |K_4(t, s)| \mathrm{d}s = \int_0^1 |v(u)| \mathrm{d}u , \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 .$$

Posto $u = x + 1/2$, si ottiene

$$\psi(x) = v(x + 1/2) = -(1/24)[x^4 - (1/2)x^2 + 7/240] , \qquad -1/2 \leqslant x \leqslant 1/2 .$$

Dei quattro zeri di $\psi(x)$ e precisamente $\pm 0{,}657703$ e $\pm 0{,}259665$, due soli e cioè $\pm 0{,}259665$ si trovano nell'intervallo di estremi $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$. Poichè $\int_0^{1/2} \psi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ risulta, ponendo $\xi = 0{,}259665$ e notato che per $0 \leqslant x \leqslant \xi$ è $\psi(x) \leqslant 0$,

$$k_4 = \int_0^1 |v(u)|\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{1/2} |\psi(x)|\,\mathrm{d}x = -4\int_0^{\xi} \psi(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}0008148\,.$$

(3) Per $n = 5$ si ha

$$K_5(t, s) = \begin{cases} 720^{-1}(t-s) - 72^{-1}(t-s)^3 + 48^{-1}(t-s)^4 - 120^{-1}(t-s)^5 & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1\,, \\ -720^{-1}(s-t) + 72^{-1}(s-t)^3 - 48^{-1}(s-t)^4 + 120^{-1}(s-t)^5 & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Considerata la funzione

$$v(u) = 720^{-1}u - 72^{-1}u^3 + 48^{-1}u^4 - 120^{-1}u^5\,, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1\,,$$

si ha $v(u) = -v(1-u)$, $\int_0^1 v(u)\,\mathrm{d}u = 0$ e inoltre si prova che

$$\int_0^1 |K_5(t, s)|\,\mathrm{d}s = \int_0^1 |v(u)|\,\mathrm{d}u\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1\,.$$

Se si pone $u = x + \frac{1}{2}$, si ottiene

$$\psi(x) = v(x + 1/2) = -(1/120)x[x^4 - (5/6)x^2 + 7/48]\,, \qquad -1/2 \leqslant x \leqslant 1/2\,,$$

e dei cinque zeri di $\psi(x)$ e precisamente 0, $\pm 1/2$, $\pm 0{,}7637625$ uno solo e cioè $x = 0$ si trova fra $-1/2$ e $1/2$ e quindi, per essere $\psi(x) = -\psi(-x)$ e $\psi(x) \leqslant 0$ per $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, si ottiene

$$k_5 = \int_0^1 |v(u)|\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{1/2} |\psi(x)|\,\mathrm{d}x = -2\int_0^{1/2} \psi(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}0001302\,.$$

(4) Per $n = 6$ risulta

$$K_6(t, s) = \begin{cases} -30240^{-1} + 1440^{-1}(t-s)^2 - 288^{-1}(t-s)^4 + 240^{-1}(t-s)^5 - 720^{-1}(t-s)^6 & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ -30240^{-1} + 1440^{-1}(s-t)^2 - 288^{-1}(s-t)^4 + 240^{-1}(s-t)^5 - 720^{-1}(s-t)^6 & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Considerata la funzione

$$v(u) = -30240^{-1} + 1440^{-1}u^2 - 288^{-1}u^4 + 240^{-1}u^5 - 720^{-1}u^6\,, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1\,,$$

si ha $v(u) = v(1-u)$, $\int_0^1 v(u)\,du = 0$ e inoltre si dimostra che

$$\int_0^1 |K_6(t, s)|\,ds = \int_0^1 |v(u)|\,du\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1\,.$$

Con la posizione $u = x + 1/2$, risulta

$$\psi(x) = v(x + 1/2) = -(1/720)[x^6 - (5/4)x^4 + (7/16)x^2 - 31/1344]\,,$$
$$-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2\,.$$

Posto $F(y) = y^3 - (5/4)y^2 + (7/16)y - 31/1344$, $y = x^2$, si ha $F'(y) = 3y^2 - (5/2)y + 7/16$, con $0 \leqslant y \leqslant 1/4$. È $F(0) < 0$, $F(1/4) > 0$, $F'(y) \geqslant 0$ per $0 \leqslant y \leqslant 1/4$, quindi $F(y)$ ha un solo zero tra 0 e 1/4 e precisamente 0,063735 e di conseguenza $\psi(x)$ ha un solo zero ξ fra 0 e 1/2 ed è $\xi = 0{,}252458$ e inoltre per $0 \leqslant x \leqslant \xi$ è $\psi(x) \geqslant 0$. Segue

$$k_6 = \int_0^1 |v(u)|\,du = 2\int_0^{1/2} |\psi(x)|\,dx = 4\int_0^{\xi} \psi(x)\,dx = 0{,}00001994724\,.$$

Notiamo che i valori delle costanti k_4, k_6, dedotti per via diretta, sono in pieno accordo con quelli ottenuti mediante l'uso del calcolatore (Olivetti P 6060).

Osservazione. I valori delle costanti k_n sopra determinati corrispondono a $\tau = 1$. Se è $\tau = 2\pi/\omega$ le stesse costanti debbono essere moltiplicate per $(2\pi/\omega)^n$, come si è visto in [**1**].

Per quanto riguarda i valori di k_n per $\tau = 1$, si vede facilmente, notando che $H^n = H(H^{n-1})$, che $k_n \leqslant (1/4)k_{n-1}$ per ogni n. Dai risultati ottenuti per $n = 3, 4, 5, 6$ appare che i numeri k_n decrescono molto più rapidamente rispetto a quanto è indicato dalla precedente relazione.

Bibliografia

[**1**] V. E. Bononcini, *Soluzioni periodiche di equazioni differenziali del secondo ordine*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977), 391-399.

[2] L. CESARI: [•]$_1$ *Existence theorems for periodic solutions of nonlinear lipschitzian differential systems and fixed point theorems*, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Ann. Math. Stud. Princeton **5** (1960), 115-172; [•]$_2$ *Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations*, Contributions to differential equations, Ed. Wiley **1** (1963), 149-187; [•]$_3$ *Functional analysis, nonlinear differential equations and the alternative method*, 1-197 (dal libro: L. CESARI, R. KANNAN, J. D. SCHUUR, *Nonlinear functional analysis and differential equations*, Ed. Dekker, New York 1976).

Summary

This paper is devoted to the proof, under suitable conditions, of the existence of at least one periodic solution of differential equations of the kind $x^{(n)} = f(t, x)$.

* * *