Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 403-412

FRANCESCA CAGLIARI e MARCELLO CICCHESE (*)

Proprietà di separazione e compattificazioni di spazi topologici non T_0 (**)

Introduzione.

Ad ogni spazio topologico X si può far corrispondere (cfr. per esempio [**7**], p. 155), tramite un opportuno quoziente, un T_0-spazio X^*, che qui si dice essere la T_0-*immagine* di X.

Particolarmente interessanti si sono rivelati quegli spazi topologici le cui T_0-immagini soddisfano a T_1. Tali spazi, detti anche « spazi essenzialmente T_1 » o « R_0-spazi », sono stati infatti esaminati da diversi autori, come N. A. Shanin [**8**], A. S. Davis [**1**], J. M. Worrell e H. H. Wicke [**10**], S. A. Naimpally [**6**] e altri ancora.

In questo lavoro, sfruttando una diversa presentazione delle proprietà delle T_0-immagini, si caratterizzano topologicamente alcune classi di spazi le cui T_0-immagini soddisfano a diverse condizioni di separazione.

Si fa vedere poi come ad ogni compattificazione della T_0-immagine X^* di uno spazio X si può associare, facendo uso della nozione di «spazio aggiunzione» , una compattificazione di X. Si riesce così ad estendere agli spazi completamente regolari (ma non necessariamente T_0) la nozione di compattificazione di Stone-Čech definita per gli spazi di Tychonoff; e si dimostra che tale compattificazione soddisfa a un teorema di estensione simile, ma non del tutto uguale, a quello della classica compattificazione di Stone-Čech.

1. - T_0-identificazione e T_0-sezioni di uno spazio topologico.

Sia X uno spazio topologico. Diremo che un sottoinsieme A di X è *condensato* se la topologia indotta da X in A è quella banale (condensata).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). – Ricevuto: 31-V-1978.

Sono facilmente verificabili le seguenti proposizioni.

Proposizione 1.1. *Sia A un sottoinsieme di uno spazio X. Sono equivalenti le seguenti condizioni*

(a) *A è un sottoinsieme condensato;*

(b) *per ogni aperto (chiuso) U di X, se $U \cap A \neq \emptyset$ allora $A \subset U$.*

Proposizione 1.2. *Sia $\{A_i | i \in I\}$ una famiglia di sottoinsiemi condensati di uno spazio X, tale che $\cap\{A_i | i \in I\} \neq \emptyset$. L'unione $\cup\{A_i | i \in I\}$ è un sottoinsieme condensato di X.*

Introduciamo in X la relazione $\mathcal{R}$ così definita: *$x\mathcal{R}y$ se esiste un sottoinsieme condensato di X contenente x e y.*

$\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza, in virtù della Prop. 1.2. Chiameremo allora *componenti condensate* di X le classi di equivalenza relative a $\mathcal{R}$ e denoteremo con $C[x]$ la componente condensata contenente il punto $x \in X$.

Chiaramente (cfr. Prop. 1.2), $C[x]$ è caratterizzata dall'essere *il più grande sottoinsieme condensato contenente x.*

Ricordiamo che se $x \in X$, si definisce (cfr. [**2**])

$$\ker\{x\} = \{y \in X \,|\, x \in \mathrm{Cl}\{y\}\} = \cap\{U \subset X \,|\, U \text{ aperto}, x \in U\} .$$

Dalla Prop. 1.1 discendono allora le seguenti relazioni

$$U \text{ aperto (chiuso)}, \quad x \in U \Rightarrow C[x] \subset U; \tag{1.1}$$

$$C[x] = \mathrm{Cl}\{x\} \cap \ker\{x\}, \quad \text{per ogni } x \in X . \tag{1.2}$$

Proposizione 1.3. *Sia X uno spazio topologico. Per ogni $x, y \in X$ si ha*

$$C[x] = C[y] \Leftrightarrow \mathrm{Cl}\{x\} = \mathrm{Cl}\{y\} . \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Supponiamo che sia $C[x] = C[y]$ e scegliamo un qualsiasi aperto U contenente x. Per la (1.1) si ha $C[x] = C[y] \subset U$, e quindi $y \in U$. Ne discende che $y \in \mathrm{Cl}\{x\}$. Analogamente si fa vedere che $x \in \mathrm{Cl}\{y\}$. Si ha dunque $\mathrm{Cl}\{x\} = \mathrm{Cl}\{y\}$.

Viceversa, supponiamo che sia $\mathrm{Cl}\{x\} = \mathrm{Cl}\{y\}$. Per la (1.2) si ha $C[x] \cup C[y] \subset \mathrm{Cl}\{x\} = \mathrm{Cl}\{y\}$. Sia U un aperto tale che $U \cap (C[x] \cup C[y]) \neq \emptyset$. Se supponiamo $U \cap C[x] \neq \emptyset$ si ha $C[x] \subset U$ (cfr. (1.1)). Ma poichè $x \in \mathrm{Cl}\{y\}$ e $x \in U$ si ha che $y \in U$, e quindi $C[y] \subset U$. In conclusione si ottiene: $C[x] \cup C[y] \subset U$. Ma allora (cfr. Prop. 1.1) $C[x] \cup C[y]$ è un insieme condensato che, contenendo x e y, deve essere contenuto in $C[x]$ e $C[y]$. È evidente quindi che $C[x] = C[y]$.

Poniamo ora $X^* = X/\mathscr{R}$, dove $\mathscr{R}$ è la relazione di equivalenza definita sopra, e denotiamo con

$$p: X \to X^* \tag{1.4}$$

la proiezione naturale di X su X^*. Si verifica senza difficoltà (cfr. [7], p. 155 e [4], p. 318) la seguente

Proposizione 1.4. *Lo spazio X^* e la proiezione $p: X \to X^*$ godono delle seguenti proprietà:*

(1.5) *se U è un aperto (chiuso) di X, allora $U = p^{-1}(p(U))$;*

(1.6) *p è una funzione aperta e chiusa;*

(1.7) *se U, V sono aperti (chiusi) di X, allora si ha: $p(U \cap V) = p(U) \cap p(V)$;*

(1.8) *X ha la topologia iniziale rispetto a p;*

(1.9) *X^* è un T_0-spazio;*

(1.10) *se X è un T_0-spazio, allora p è un omeomorfismo.*

Nel seguito diremo che X^* è la *T_0-immagine* di X e che p è la sua *T_0-identificazione* (cfr. [9], p. 85).

Diremo poi che un sottospazio S di X è una *T_0-sezione* di X se ogni componente condensata di X ha esattamente un punto in comune con S.

Dalle definizioni date discende che se S è una T_0-sezione di X e p è la T_0-identificazione di X, la restrizione $p|S: S \to X^*$ è un omeomorfismo. È evidente infatti che $p|S$ è biiettiva e che S ha la topologia iniziale rispetto a $p|S$.

Valgono dunque le seguenti proposizioni.

Proposizione 1.5. *Ogni T_0-sezione di uno spazio X è omeomorfa alla T_0-immagine di X.*

Proposizione 1.6. *Un sottoinsieme S di uno spazio X è una T_0-sezione di X se e solo se S è un T_0-sottospazio di X tale che $p(S) = X^*$.*

Poichè p è un'identificazione e $p|S$ è un omeomorfismo, anche la funzione

$$p_S = (p|S)^{-1} \circ p: X \to S \tag{1.11}$$

è un'identificazione.

Tenuto conto di ciò e della (1.2) si verifica senza difficoltà la seguente

Proposizione 1.7. *Sia X uno spazio topologico, S una T_0-sezione di X, $f\colon X \to Y$ una funzione di X in un T_0-spazio Y. Valgono le seguenti proprietà*

(1.12) *la funzione f è continua se e solo se $f|S$ è continua e $f = (f|S)\circ p_S$;*

(1.13) *se la f è continua si ha: $f(X) = f(S)$.*

2. - Caratterizzazioni topologiche degli ET_α-spazi.

Sia P una proprietà topologica. Diremo che uno spazio topologico X gode della proprietà EP se la sua T_0-immagine gode della proprietà P.

Dalla (1.10) discende subito che

$$EP + T_0 \Rightarrow P . \tag{2.1}$$

Nel seguito prenderemo in considerazione i seguenti assiomi di separazione (cfr. [7]): T_0, T_1, T_2, R (= regolarità), CR (= completa regolarità), N (= normalità), $T_3 = R + T_1$, $T_{3,5} = CR + T_1$, $T_4 = N + T_1$.

Uno spazio soddisfacente a T_α o a ET_α ($\alpha = 0, 1, \ldots, 4$) sarà detto, rispettivamente, *T_α-spazio* o *ET_α-spazio*.

La (1.9) mostra che *ogni spazio è un ET_0-spazio.*

Ci proponiamo di individuare proprietà topologiche equivalenti alle ET_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, 4$).

Proposizione 2.1. *Sia X uno spazio topologico. Sono equivalenti le seguenti condizioni*

(a) $C[x] = \mathrm{Cl}\{x\} = \ker\{x\}$, *per ogni $x \in X$;*

(b) *se $x, y \in X$ e $y \notin \mathrm{Cl}\{x\}$, allora esiste un intorno U di x tale che $y \notin U$;*

(c) *X è un ET_1-spazio.*

La dimostrazione è una verifica diretta che non presenta difficoltà (cfr. [**1**], [**2**], [**3**]).

Proposizione 2.2. *Uno spazio topologico X è un ET_2-spazio se e solo se, comunque si scelgano $x, y \in X$ tali che $y \notin \mathrm{Cl}\{x\}$, esistono un intorno di x e un intorno di y tra loro disgiunti.*

Dimostrazione. Sia X un ET_2-spazio e siano $x, y \in X$ tali che $y \notin \mathrm{Cl}\{x\}$. Per la (1.3) si ha: $p(x) \neq p(y)$. Esistono allora due aperti disgiunti U^*, V^* di X^* tali che $p(x) \in U^*$, $p(y) \in V^*$. Gli insiemi $p^{-1}(U^*)$, $p^{-1}(V^*)$ sono aperti disgiunti di X contenenti rispettivamente x e y.

Viceversa, siano x^*, y^* punti distinti di X^* e siano $x, y \in X$ tali che $p(x) = x^*$, $p(y) = y^*$. Essendo $p(x) \neq p(y)$, necessariamente si deve avere o $x \notin \mathrm{Cl}\{y\}$ o $y \notin \mathrm{Cl}\{x\}$ (cfr. (1.3)). In entrambi i casi esistono, per le ipotesi fatte, due aperti disgiunti U, V di X contenenti rispettivamente x e y. Gli aperti $p(U)$, $p(V)$ sono allora aperti disgiunti (cfr. (1.6), (1.7)) contenenti rispettivamente x^* e y^*.

Proposizione 1.3. *Tra gli assiomi di separazione sopra considerati valgono le seguenti relazioni*

(2.2) $ER = R$;

(2.3) $ECR = CR$;

(2.4) $EN = N$;

(2.5) $ET_3 = R$;

(2.6) $ET_{3,5} = CR$;

(2.7) $ET_4 = N + ET_1$.

Dimostrazione. Le (2.2) (2.3) (2.4) sono una immediata conseguenza delle definizioni (cfr. [7], p. 157). Per dimostrare le (2.5) (2.6) (2.7) basta tenere presente che, come è dimostrato in [3], $R \Rightarrow ET_1$; da ciò discende infatti che

$$ET_3 = E(R + T_1) = ER + ET_1 = R + ET_1 = R;$$

$$ET_{3,5} = E(CR + T_1) = ECR + ET_1 = CR + ET_1 = CR;$$

$$ET_4 = E(N + T_1) = EN + ET_1 = N + ET_1.$$

Da quest'ultima proposizione discende subito che

$$T_3 = R + T_0; \qquad T_{3,5} = CR + T_0.$$

Osservazione. La particolarità dell'assioma ET_4 dipende dal fatto che, al contrario di R e CR, l'assioma N non implica ET_1 (cfr. [3]) (1). Come conseguenza della (2.2) e della Prop. 2.3 si ottiene invece che

$$ET_4 = N + CR = N + R.$$

(1) Come esempio si può considerare anche lo spazio di Sierpinski (cfr. [9], p. 24) che è un T_0-spazio normale ma non T_1, e quindi nemmeno ET_1 (cfr. (2.1)).

3. - Una « compattificazione di Stone-Čech » degli spazi completamente regolari e non T_0.

Siano X e Y spazi topologici, S un sottospazio di X, $f: S \to Y$ una funzione continua.

Denotiamo con $Z = X \cup_f Y$ lo « spazio aggiunzione » (cfr. per esempio [**5**], p. 19) ottenuto « aggiungendo » X ad Y mediante la funzione f; e consideriamo il seguente diagramma

(3.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "F"'] & X+Y \arrow[d, "\pi"] & y \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "G"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

dove $F = \pi \circ i$, $G = \pi \circ j$, $X + Y$ è la somma topologica disgiunta di X e Y, i e j sono le immersioni in $X + Y$ di X e Y rispettivamente, π e l'identificazione che determina la topologia di Z.

Dalla definizione di spazio aggiunzione discendono subito le seguenti proprietà

(3.2) G è un'immersione;

(3.3) se f è un'immersione anche F è un'immersione;

(3.4) se S è denso in X e $f(S)$ è denso in Y, allora $F(S)$ è denso in Z.

Supponiamo d'ora in poi che S sia una T_0-sezione di X. In questa ipotesi si dimostra la seguente

Proposizione 3.1. *Relativamente al diagramma* (3.1) *si ha che*

(3.5) *se Y è compatto anche Z è compatto*;

(3.6) *se Y è un T_0-spazio, allora $G(Y)$ è una T_0-sezione di Z.*

Dimostrazione. Sia $q: Z \to Z^*$ la T_0-identificazione di Z. Dalla definizione di spazio aggiunzione discende che

(3.7) $$F(S) = G(f(S)) .$$

La (1.13) mostra inoltre che

$$(q\circ F)(X) = (q\circ F)(S) = q(G(f(S))) . \tag{3.8}$$

Tenendo presente che $Z^* = q(F(X)) \cup q(G(Y))$ si riconosce che la funzione $q\circ G$ è suriettiva. Ma allora, se Y è compatto tale è anche Z^*, e quindi, per le proprietà delle T_0-identificazioni (cfr. Prop. 1.4), anche Z è compatto. Vale dunque la (3.5). Inoltre, poichè $q\circ G$ è suriettiva e G è un'immersione, se Y è un T_0-spazio $G(Y)$ è una T_0-sezione di Z, in virtù della Prop. 1.6. Vale dunque la (3.6).

Si può osservare inoltre che l'identificazione $P\colon Z \to G(Y)$ analoga alla (1.11) risulta così definita: per ogni $z \in Z$

$$P(z) = \begin{cases} F(p_S(x)) & \text{se } z = F(x), \text{ con } x \in X; \\ z & \text{se } z = G(y), \text{ con } y \in Y\setminus f(S) . \end{cases} \tag{3.9}$$

Dalle (3.2) (3.3) (3.4) e dalla Prop. 3.1 discende la seguente

Proposizione 3.2. *Se S è una T_0-sezione di uno spazio topologico X e $f\colon S \to Y$ è una compattificazione di S, allora la $F\colon X \to X \cup_f Y$ definita dal diagramma* (3.1) *è una compattificazione di X.*

Sia X uno spazio completamente regolare. Poichè X è un $ET_{3,5}$-spazio (cfr. (2.7)), una sua T_0-sezione è un $T_{3,5}$-spazio (cfr. Prop. 1.5). Indichiamo con $f\colon S \to \beta S$ la compattificazione di Stone-Čech di S e poniamo $\beta X = X \cup_f \beta S$. L'immersione

$$F\colon X \to \beta X \tag{3.10}$$

definita dal diagramma (3.1) è, per la Prop. 3.2, una compattificazione di X. Diciamo che essa è la *compattificazione di Stone-Čech* dello spazio completamente regolare X.

Si osserva facilmente che βX non dipende da S, nel senso che se invece di S si sceglie un'altra T_0-sezione si ottiene uno spazio omeomorfo a βX. È evidente inoltre che se X è un $T_{3,5}$-spazio, S coincide con X e la (3.10) risulta essere l'ordinaria compattificazione di Stone-Čech di X.

In virtù della (3.6), $G(\beta S)$ è una T_0-sezione di βX; e poichè βS è un T_2-spazio compatto, βX risulta essere un ET_2-spazio compatto.

P r o p o s i z i o n e 3.3. *Sia W un ET_2-spazio compatto e sia $h\colon X \to W$ una funzione continua. Esiste una funzione continua $H\colon \beta X \to W$ tale che risulta commutativo il seguente diagramma*

(3.11)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "F"'] & W \\ \beta X \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

D i m o s t r a z i o n e. Sia T una T_0-sezione di W e $q_T\colon W \to T$ l'identificazione analoga alla (1.11). Poichè T è un T_2-spazio compatto, la funzione $q_T \circ (h|S)\colon S \to T$ è estendibile a βS. È possibile cioè trovare una funzione $h^*\colon \beta S \to T$ tale che il diagramma

(3.12)
$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "q_T\circ(h/S)"] \arrow[d, "f"'] & T \\ \beta S \arrow[ur, "h^*"'] & \end{tikzcd}$$

risulti commutativo. Usando le notazioni del diagramma (3.1), si riconosce che $\beta X = F(X) \cup G(\beta S \setminus f(S))$. Consideriamo la funzione $H\colon \beta X \to W$ così definita: per ogni $z \in \beta X$,

$$(3.13) \qquad H(z) = \begin{cases} h(x) & \text{se } z = F(x), \text{ con } \quad x \in X; \\ h^*(t) & \text{se } z = G(t), \text{ con } \quad t \in \beta S \setminus f(S)\,. \end{cases}$$

Poichè F e G sono immersioni, la funzione H è ben definita; è evidente inoltre che H rende commutativo il diagramma (3.11). Dimostriamo che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \beta X \arrow[r, "H"] & W \arrow[d, "q_T"] \\ \beta S \arrow[u, "G"] \arrow[r, "h^*"'] & T \end{tikzcd}$$

è commutativo. Infatti, per le (3.12) (3.13) e per le proprietà dello spazio aggiunzione si ha: per ogni $s \in S$, $(q_T \circ H \circ G)(f(s)) = (q_T \circ H)(F(s)) = q_T(h(s)) = h^*(f(s))$; per ogni $t \in \beta S \setminus f(S)$, $(q_T \circ H \circ G)(t) = q_T(h^*(t)) = h^*(t)$.

Da ciò discende che la restrizione della funzione $q_T \circ H$ alla T_0-sezione $G(\beta S)$ è continua. Inoltre, tenuto conto delle (3.9) (3.13) si riconosce che $H = (H\,|\,G(Y)) \circ P$. Applicando la (1.12) si ottiene che la funzione $q_T \circ H$ è continua. Ma q_T è una identificazione, e quindi anche H è continua.

Contrariamente a quanto accade per la compattificazione di Stone-Čech di un $T_{3,5}$-spazio, l'estensione di h a βX non è unica. La costruzione di H dipende infatti, in modo essenziale, dalla scelta della T_0-sezione T. Tenendo presente che W ammette un'unica T_0-sezione se e solo se W soddisfa a T_0 (e quindi, in questo caso ,anche a T_2), e osservando che se due funzioni H, $H' : \beta X \to W$ rendono commutativo il diagramma (3.11) esse coincidono nel sottoinsieme denso $F(X)$, si riconosce che, se X non è compatto vale la seguente

Proposizione 3.4. *Sia $h: X \to W$ una funzione continua. L'estensione di h a βX è unica per ogni h se e solo se lo spazio compatto W è un T_2-spazio.*

Bibliografia

[1] A. S. Davis, *Indexed system of neighbourhoods for general topological spaces*, Amer. Math. Monthly **68** (1961), 886-893.

[2] K. K. Dube, *A note on R_0-topological spaces*, Mat. Vesnik (26) **11** (1974), 203-208.

[3] D. W. Hall, S. K. Murphy and J. Rozycki, *On spaces wich are essentially T_1*, J. Austr. Math. Soc. **12** (1971), 451-455.

[4] R. E. Hoffman, *Topological functor admitting generalized Cauchy-Completion*, Mannheim Conf., 1975. Lecture Notes in Math. Vol. 540, Springer-Verlag, Berlin-New York 1976.

[5] C. R. F. Maunder, *Algebraic Topology*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1972.

[6] S. A. Naimpally, *On R_0-topological spaces*, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. **10** (1967), 53-54.

[7] W. J. Pervin, *Foundations of general topology*, Academic Press, New York 1964.

[8] N. A. Shanin, *On separation in topological spaces*, Doklady URSS **38** (1943), 110-113.

[9] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading Mass. 1970.

[**10**] J. M. Worrell and H. H. Wicke, *Characterizations of developable topological spaces*, Canad. J. Math. **17** (1965), 820-830.

Summary

We introduce ET_α-spaces (topological spaces which satisfy separation axioms which are more general than the usual ones) by means of which it is then possible to extend the notion of Stone-Čech compactification to completely regular spaces which are not Tychonoff.

* * *