Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 369-384

GIUSEPPE ROSOLINI (*)

Semireticoli e cornici in un topos (**)

Introduzione.

Dopo aver dato la definizione di semireticolo inferiore dotato di minimo e massimo in un topos elementare ho affrontato lo studio di alcuni tipi particolarmente interessanti di tali oggetti. Sono, poi, passato alla considerazione di cornici (= frame) ed ho completato lo studio aggiungendo alcune osservazioni sui filtri definibili in tali strutture, generalizzando le definizioni date in [**6**].

In tutto lo scritto, $\underline{E}$ indicherà un fissato topos elementare. Sfrutterò i risultati sui topos elementari di [**1**] e di [**3**]; userò le notazioni ivi introdotte, distaccandomene nei casi seguenti:

— se φ è una mappa caratteristica, $r(\varphi)$ indicherà un rappresentante del sottoggetto classificato da φ, cioè $r(\varphi) = \varphi^*(true)$ (¹);

— per ogni oggetto A, t_A ed f_A indicheranno, rispettivamente, i morfismi *true* ter_A e *false* ter_A (²);

— per indicare il morfismo identità dell'oggetto A, scriverò ancora A.

Farò uso del linguaggio L(Set) (cfr. [**3**]), nei n. **4** e seguenti, per evidenziare l'analogia tra quanto espongo ed il caso insiemistico. Sfrutterò anche alcuni risultati sulle algebre astratte esposti in [**5**].

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 5-V-1978.

(¹) È più corretto scrivere $[r(\varphi)] = \varphi^*(true)$, dove $[r(\varphi)]$ indica la classe dei monomorfismi isomorfi a $r(\varphi)$; però, qui e nel seguito, quando scrivo che due monomorfismi sono uguali, intendo uguali a meno di isomorfismo.

(²) Tralascerò qualunque indice se, così facendo, non genererò confusione.

1. - Semireticoli.

Sia Θ un dominio di operatori costituito da un operatore binario $\underline{i}$ e da due operatori zeroari $\underline{0}$ e $\underline{1}$.

Definizione 1. (a) Un'algebra di tipo Θ, $\boldsymbol{P}$, nel topos $\underline{\mathrm{E}}$, è un *semireticolo* (s.r.) (*inferiore dotato di minimo e massimo*) se $\underline{i}(\underline{i}\times P) = \underline{i}(P\times \underline{i})$; $\underline{i}\tau = \underline{i}$ (3); $\underline{i}\Delta = P$; $\underline{i}\langle P, \underline{0}\, ter\rangle = \underline{0}\ ter$; $\underline{i}\langle P, \underline{1}\, ter\rangle = P$.

(b) Se $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ sono s.r. e $g\colon P\to Q$ è un omomorfismo di tipo Θ, dirò che g è un *morfismo di semireticoli* (m.s.r.) e scriverò $g\colon \boldsymbol{P}\to \boldsymbol{Q}$.

Esempi. 1. $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega, \wedge, \mathit{false}, \mathit{true})$ è un s.r. (cfr. [**1**]).

2. Sia I un oggetto, $\boldsymbol{\Omega}^I = (\Omega^I, \wedge^I, f^{\wedge}, t^{\wedge})$ è un s.r. (cfr. [**3**]).

3. Siano $\underline{0}$ ed $\underline{1}$ le due inclusioni di 1 nel coprodotto $1+1$ ed $\underline{i} = \begin{pmatrix}\underline{0}\ ter_{1+1}\\ 1+1\end{pmatrix}\colon (1+1)\times(1+1)\to 1+1$ (4). $\boldsymbol{2} = (1+1, \underline{i}, \underline{0}, \underline{1})$ è un s.r.

4. $\begin{pmatrix}\underline{0}\\ \underline{1}\end{pmatrix}\colon 1+1\to P$ è un m.s.r..

Notazione. Sia $\boldsymbol{P}$ un s.r.: m_P è l'egualizzatore di $\underline{i}$ e p_1; m'_P è l'egualizzatore di $\underline{i}$ e p_2.

Osservazione 1. (a) m è una relazione d'ordine per la quale $\underline{i}$ esprime l'infimo (cfr. [**5**]). (b) $m' = \tau m$.

Proposizione 1. *Sia $g\colon \boldsymbol{P}\rightarrowtail \boldsymbol{Q}$ un m.s.r.. Allora g è un omomorfismo forte per le strutture relazionali (P, m_P) e (Q, m_Q).*

Dimostrazione. Poichè g è mono, m_P è l'egualizzatore di $g\underline{i}_P$ e gp_1. Dato che g è un m.s.r., $g\underline{i}_P = \underline{i}_Q g^2$; inoltre $gp_1 = p_1 g^2$. Perciò, m_P è l'egualizzatore di $\underline{i}_Q g^2$ e $p_1 g^2$; per note proprietà dei limiti, dunque, m_P è la controimmagine lungo g^2 di m_Q.

---

(3) Nel seguito, seguendo [**5**], indicherò con τ il morfismo (naturale) $\langle p_2, p_1\rangle\colon P\times P\to P\times P$, dove p_1 e p_2 sono le proiezioni.

(4) Identifico i due oggetti isomorfi $(1+1)\times(1+1)$ e $(1+1)+(1+1)$.

Osservazione 2. Sia $\boldsymbol{P}$ un s.r.. Sono equivalenti

(i) il morfismo $\binom{\underline{0}}{\underline{1}}: 1+1 \to P$ è mono;

(ii) $\underline{0}$ ed $\underline{1}$ sono disgiunti;

(iii) $\boldsymbol{2}$ è sottosemireticolo di $\boldsymbol{P}$.

Tale risultato si ottiene utilizzando note proprietà dei topos e l'Esempio 4.

Definizione 2. Dirò che $\boldsymbol{P}$ è un $\boldsymbol{2}$-*s.r.* se $\binom{\underline{0}}{\underline{1}}: \boldsymbol{2} \rightarrowtail \boldsymbol{P}$.

Esempio 5. $\boldsymbol{\Omega}$ è un $\boldsymbol{2}$-s.r..

Notazione. Particolare interesse riveste il morfismo caratteristico di $\underline{1}: 1 \rightarrowtail P$. Indicherò con $\chi_P: P \to \Omega$ tale mappa caratteristica.

Proposizione 2. (a) *Il morfismo* $\chi: P \to \Omega$ *è tale che* $\chi\underline{1} = true$ *e* $\chi\underline{i} = \wedge\chi^2$.

(b) *Qualora esista un monomorfismo* $\lambda: P \to \Omega$ *tale che* $\lambda\underline{1} = true$, *allora* χ *è mono e, precisamente,* $\chi = \lambda$.

(c) $\chi: \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{\Omega}$ *se e solo se* $\boldsymbol{P}$ *è un* $\boldsymbol{2}$-*s.r.*.

Dimostrazione. (a) È ovvio che $\chi\underline{1} = true$, per definizione di χ. Per mostrare che $\chi\underline{i} = \wedge\chi^2$, noto che $\wedge\chi^2 = ch(\langle\underline{1}, \underline{1}\rangle)$. Devo, dunque, provare che $\chi\underline{i} = ch(\langle\underline{1}, \underline{1}\rangle)$, cioè che $\underline{i}^*\chi^*(true) = \langle\underline{1}, \underline{1}\rangle$; ma, poichè $\chi^*(true) = \underline{1}$, sarà sufficiente dimostrare che $\underline{i}^*(\underline{1}) = \langle\underline{1}, \underline{1}\rangle$.

Chiaramente $\underline{i}\langle\underline{1}, \underline{1}\rangle = \underline{1}$. Ora, se $\langle x, y\rangle: X \to P \times P$ è tale che $\underline{i}\langle x, y\rangle = \underline{1}\,ter$, allora $x = \underline{i}\langle x, \underline{1}\,ter\rangle = \underline{i}\langle x, \underline{i}\langle x, y\rangle\rangle = \underline{i}\langle \underline{i}\langle x, x\rangle, y\rangle = \underline{i}\langle x, y\rangle = \underline{1}\,ter$.

(b) Poichè λ è mono, $\lambda x = t$ se e solo se $x = \underline{1}\,ter$.

(c) Poichè χ è la mappa caratteristica di $\underline{1}$, $\chi\underline{0} = false$ se e solo se $\underline{0}$ ed $\underline{1}$ sono monomorfismi disgiunti. Dall'Osservazione 2 discende l'asserto.

Vale, inoltre, la seguente

Proposizione 3. *Se* χ *è epi, allora* $\chi: \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{\Omega}$.

Dimostrazione. Sia $y: Y \rightarrowtail P$ la controimmagine di *false* lungo χ. Poichè χ è epi, ter_y è epi. Dato che $\underline{0}$ è stabile (quarta uguaglianza della Definizione 1 (a)), è $\underline{i}\langle y, \underline{0}\,ter\rangle = \underline{0}\,ter$ e $\chi\underline{0}\,ter = \chi\underline{i}\langle y, \underline{0}\,ter\rangle = \wedge\langle\chi y, \chi\underline{0}\,ter\rangle$; ma

$\chi y = false\ ter$, dunque $\chi \underline{0} = \wedge \langle false, \chi \underline{0} \rangle$, poichè ter_y è epi: il secondo membro di questa ultima uguaglianza è *false*, perchè *false* è il minimo dell'algebra di Heyting $Mor(1, \Omega)$.

Corollario 4. *Se χ è epi, $\boldsymbol{P}$ è un $\boldsymbol{2}$-s.r.*.

Osservazione 3. In Set χ è sempre un epimorfismo, se $\underline{0}$ ed $\underline{1}$ sono diversi; questo non vale in un generico topos $\underline{\mathrm{E}}$. Infatti, se $\underline{\mathrm{E}}$ non è booleano, $\begin{pmatrix} false \\ true \end{pmatrix} : \boldsymbol{2} \to \boldsymbol{\Omega}$, che è mono, non può essere epi.

2. - Filtri di semireticoli.

La seguente definizione estende ai s.r. la definizione di filtro data da Volger [6] per le algebre della forma Ω^I.

Definizione 3. (a) Un *filtro* del s.r. $\boldsymbol{P}$ è un morfismo $\lambda : P \to \Omega$ tale che $\lambda \underline{i} = \wedge \lambda^2$ e $\lambda \underline{1} = true$.

(b) Un filtro λ di $\boldsymbol{P}$ è *debolmente proprio* o, più semplicemente, *debole*, se $\lambda \neq t$.

(c) Un filtro λ di $\boldsymbol{P}$ è *proprio* se λ è un m.s.r..

(d) Un filtro proprio λ di $\boldsymbol{P}$ è *p-massimale* se, per ogni filtro proprio ν di $\boldsymbol{P}$, $\lambda \leqslant \nu$ implica $\lambda = \nu$.

Osservazione 4. Se λ è un filtro proprio di $\boldsymbol{P}$, allora λ è debole.

Esempi. 6. $t : P \to \Omega$ è un filtro.

7. $\chi : P \to \Omega$ è un filtro, proprio se e solo se $\boldsymbol{P}$ è un $\boldsymbol{2}$-s.r..

8. In particolare, $\Omega : \Omega \to \Omega$ è un filtro proprio.

9. $\sim\sim : \Omega \to \Omega$ è un filtro proprio.

10. Se λ e ν sono filtri, $\lambda \wedge \nu$ è un filtro; $\lambda \wedge \nu$ è debole (proprio) se uno dei due lo è (vedi Teorema 5 successivo).

11. Se $g : P \to \boldsymbol{Q}$ e λ è un filtro di $\boldsymbol{Q}$, λg è un filtro di $\boldsymbol{P}$.

Teorema 5. *Siano λ e ν due filtri di $\boldsymbol{P}$.*

(a) $\chi \leqslant \lambda$.

(b) *Se $\nu \leqslant \lambda$, allora, se λ è debole (proprio), ν è debole (proprio).*

(c) *Se λ è proprio, allora $\boldsymbol{P}$ è un $\boldsymbol{2}$-s.r.*.

Dimostrazione. (a) Banale, da $\lambda\underline{1} = true$.

(b) Sia $\nu \leqslant \lambda$. È sempre $\lambda \leqslant t$; se $\lambda \neq t$, allora anche $\nu \neq t$; dunque se λ è debole, ν è debole. Se $\lambda\colon \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{\Omega}$ allora $\lambda\underline{0} = false$. Ma è $\nu\underline{0} \leqslant \lambda\underline{0} = false$, perciò $\nu\colon \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{\Omega}$.

(c) Ovvio, dai punti (a) e (b), per l'Esempio 7).

La seguente proposizione permette di costruire filtri di $\boldsymbol{P}$.

Proposizione 6. *Sia $a\colon 1 \to P$ un elemento globale di P. Posto $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle = ch(a)\underline{i}\langle a\, ter, P\rangle$, valgono le seguenti affermazioni:*

(a) *$\langle\!\langle a \rangle\!\rangle$ è un filtro di $\boldsymbol{P}$ e $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle a = true$.*

(b) *Se λ è un filtro di $\boldsymbol{P}$ e $\lambda a = true$, allora $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle \leqslant \lambda$.*

(c) *$\langle\!\langle a \rangle\!\rangle$ è debole se e solo se $a \neq \underline{0}$.*

(d) *$\langle\!\langle a \rangle\!\rangle$ è proprio se e solo se a e $\underline{0}$ sono disgiunti.*

Dimostrazione. (a) Sia $x\colon X \to P$; per note proprietà delle mappe caratteristiche, $ch(a)\underline{i}\langle a\, ter, x\rangle = t$ se e solo se $a\, ter = \underline{i}\langle a\, ter, x\rangle$. Per l'Osservazione 1, sono, quindi, equivalenti le eguaglianze $(x_1, x_2\colon X \to P) \wedge \langle\!\langle a \rangle\!\rangle^2 \langle x_1, x_2\rangle = t$, $ch(a)\underline{i}\langle a\,\mathrm{ter}, \underline{i}\langle x_1, x_2\rangle\rangle = t$; ma la seconda è, per definizione, $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle \underline{i}\langle x_1, x_2\rangle = t$. Utilizzando la proposizione 1.6 di [**1**], ottengo che $\wedge \langle\!\langle a \rangle\!\rangle^2 = \langle\!\langle a \rangle\!\rangle \underline{i}$. Si ottiene, poi, con semplici calcoli, che $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle \underline{1} = true$ (quindi $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle$ è un filtro) e $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle a = true$.

(b) Sia λ un filtro tale che $\lambda a = true$. Ciò comporta $ch(a) \leqslant \lambda$; è allora, $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle = ch(a) i\langle a\, ter, P\rangle \leqslant \lambda\underline{i}\langle a\, ter, P\rangle = \wedge \lambda^2 \langle a\, ter, P\rangle = \wedge\langle t, \lambda\rangle = \lambda$.

Per provare le restanti affermazioni, osservo che $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle\, \underline{0} = ch(a)\underline{0}$; infatti

$$\langle\!\langle a \rangle\!\rangle \underline{0} = ch(a)\underline{i}\langle a\, ter, P\rangle\underline{0} = ch(a) i\langle a, \underline{0}\rangle = ch(a)\underline{0}\,.$$

(c) $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle \underline{0} = t$ se e solo se $a = \underline{0}$; perciò $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle \neq t$ se e solo se $a \neq 0$.

(d) $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle \underline{0} = false$ se e solo se a è disgiunto da $\underline{0}$. Dal punto (a) discende, ora, l'asserto.

Osservazione 5. $\chi = \langle\!\langle \underline{1} \rangle\!\rangle$.

La Proposizione 6 suggerisce di chiamare $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle$ il filtro *generato* da a.

Corollario 7. *Se esiste un elemento $a\colon 1 \to P$ disgiunto da $\underline{0}$, allora $\boldsymbol{P}$ è un $\boldsymbol{2}$-s.r..*

Dimostrazione. Banale, dalla Proposizione 6 e dal Teorema 5 (c).

Osservazione 6. Dal punto (b) della Proposizione 2 segue che $\Omega:\Omega\to\Omega$ è l'unico filtro di $\mathbf{\Omega}$ che sia mono.

3. - $\mathbf{\Omega}$-semireticoli.

La Definizione 2 individua una classe interessante di s.r. in $\underline{E}$, cioè s.r. in cui $\underline{0}$ ed $\underline{1}$ sono monomorfismi disgiunti. Osservo che non ogni s.r. non degenere è un $\mathbf{2}$-s.r.. Infatti è facile verificare che, in $\underline{\mathrm{Set}}^{\cdot\to\cdot}$, è possibile definire, in modo semplice, una struttura di s.r. sull'oggetto $A:\{0, 1\}\to\{0\}$ tale che $\boldsymbol{A}$ non sia un $\mathbf{2}$-s.r.. In $\underline{\mathrm{Set}}$ ogni semireticolo non degenere è un $\mathbf{2}$-s.r.; anzi, se si riguarda 2 come il classificatore di $\underline{\mathrm{Set}}$, si ha che $\mathbf{\Omega}$ è sottosemireticolo di ogni s.r. non degenere. Tale proprietà del classificatore non vale in generale per un qualunque topos $\underline{E}$. Vale, a questo proposito, la seguente

Proposizione 8. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè $\mathbf{\Omega}$ si immerga in $\mathbf{2}$ è che il topos $\underline{E}$ sia booleano.*

Dimostrazione. La sufficienza è evidente.

Per mostrare che la condizione è necessaria, sia $\omega:\mathbf{\Omega}\rightarrowtail\mathbf{2}$. Allora $\omega^*(\underline{1}) = true$, perchè $\omega\underline{1} = true$ ed ω è mono. Dunque $\begin{pmatrix} false \\ true \end{pmatrix}\omega = \Omega$, poichè $\begin{pmatrix} false \\ true \end{pmatrix}\omega$ classifica *true*. Perciò $\begin{pmatrix} false \\ true \end{pmatrix}$, avendo una inversa destra, è un iso.

Definizione 4. $(\boldsymbol{P}, \omega)$ è un $\mathbf{\Omega}$-*semireticolo* ($\mathbf{\Omega}$-s.r.) con supporto $\boldsymbol{P}$ se $\omega:\mathbf{\Omega}\rightarrowtail\boldsymbol{P}$.

Esempi. 12. $(\mathbf{\Omega}, \Omega)$ è un $\mathbf{\Omega}$-s.r. con supporto $\mathbf{\Omega}$, anzi, è l'unico tale, per l'Osservazione 6.

13. Sia $ter: I\to 1$ epi, sia $p_1: \Omega\times I\to\Omega$. Allora $(\mathbf{\Omega}^I, p_1\hat{\ })$ è un $\mathbf{\Omega}$-s.r. con supporto $\mathbf{\Omega}^I$.

Osservazione 7. $\omega:\Omega\rightarrowtail\boldsymbol{P}$ non è unica, in generale (a differenza dell'immersione $\mathbf{2}\rightarrowtail\boldsymbol{P}$ per i $\mathbf{2}$-s.r.). Infatti, si consideri, in $\underline{\mathrm{Set}}^{\cdot\to\cdot}$, l'oggetto $B: \{a_0, a_1, a_2, a_3\}\to\{b_0, b_1\}$ con le condizioni $B(a_j) = b_1$ per $j\neq 0$. Chiamo $\underline{0}$ la mappa da 1 a B determinata da $\langle a_0, b_0\rangle$, $\underline{1}$ la mappa da 1 a B determinata da $\langle a_3, b_1\rangle$ ed $\underline{i}$ l'operazione binaria su B individuata dalla condizione

$$\underline{i}(x_m, x_n) = x_p\,, \qquad \text{dove } p = \min(m, n) \text{ ed } x = a, b\,.$$

È facile verificare l'esistenza di due diversi mono m.s.r. da $\mathbf{\Omega}$ a $\boldsymbol{B}$.

Teorema 9. *Sia* $(\boldsymbol{P}, \omega)$ *un* $\mathbf{\Omega}$-s.r.. *Allora* $\chi\omega = \Omega$.

Dimostrazione. Come alla Proposizione 8, $\omega^*(\underline{1}) = true$; perciò $\chi\omega$ è la mappa caratteristica di *true* e $\chi\omega = \Omega$.

Osservazione 8. Se $(\boldsymbol{P}, \omega)$ è un $\mathbf{\Omega}$-s.r., allora $\boldsymbol{P}$ è un $\mathbf{2}$-s.r..

Ho precedentemente introdotto la nozione di filtro di un s.r.; nel caso particolare di un $\mathbf{\Omega}$-s.r. posso dare la seguente

Definizione 5. Sia $(\boldsymbol{P}, \omega)$ un $\mathbf{\Omega}$-s.r., sia λ un filtro di $\boldsymbol{P}$.

(a) λ è *fortemente proprio* o, più brevemente, *forte*, se $\lambda\omega = \Omega$.

(b) λ è *f-massimale* se, per ogni filtro forte ν di $\boldsymbol{P}$, $\lambda \leqslant \nu$ implica $\lambda = \nu$.

Esempi. 14. Sia $(\boldsymbol{P}, \omega)$ un $\mathbf{\Omega}$-s.r.. χ è forte.

15. $\Omega\colon \Omega \to \Omega$ è l'unico filtro forte di $\mathbf{\Omega}$.

Osservazione 9. Se λ è un filtro forte, allora è proprio. Deriva dal fatto che $\underline{0} = \omega\; false$.

Vale, per i filtri forti, un teorema analogo al Teorema 5:

Teorema 10. *Sia* $(\boldsymbol{P}, \omega)$ *un* $\mathbf{\Omega}$-s.r., *siano* λ *e* ν *due filtri di* $\boldsymbol{P}$. *Se* $\nu \leqslant \lambda$ *e* λ *è forte, allora* ν *è forte.*

Dimostrazione. Dall'esempio 11, per il Teorema 5 (a), $\Omega \leqslant \nu\omega$. Dall'ipotesi, $\nu\omega \leqslant \lambda\omega = \Omega$. Dalle due diseguaglianze discende la tesi.

Osservazione 10. Nel caso particolare del $\mathbf{\Omega}$-s.r. $(\mathbf{\Omega}^I, p_1\hat{\ })$, descritto nell'Esempio 13, la definizione di filtro (forte) coincide con quella di filtro (proprio) data da [**6**]. Nella notazione di Volger, $p_1\hat{\ }$ è $\Omega^{!_I}$; l'affermazione discende dal teorema 1 (a) di [**6**].

4. - Mappa dei maggioranti ed estremo superiore.

Per tutto il paragrafo, $\boldsymbol{P}$ indicherà un fissato s.r..

Notazione. Considero la mappa caratteristica

$$\gamma = \forall_{q_3}(ev\langle p_1, p_3\rangle \Rightarrow ch(m)\langle p_3, p_2\rangle) : \Omega^P \times P \to \Omega ,$$

dove p_1, p_2, p_3 sono le proiezioni da $\Omega^P \times P \times P$ e $q_3 = \langle p_1, p_2\rangle$. Usando il linguaggio L(Set) di [3], la mappa γ altro non è che $\{\langle X, x\rangle \mid \forall z \,\varepsilon\, P(z \in X \Rightarrow \Rightarrow z \leq x)\}$ (5) con $X \,\varepsilon\, \Omega^P$ ed $x \,\varepsilon\, P$. Sia $G_P : \Omega^P \to \Omega^P$ il suo morfismo aggiunto, cioè

$$G_P = \{x \mapsto \{x \,\varepsilon\, P \mid \langle X, x\rangle \in \gamma^0\}\} .$$

Il teorema seguente presenta alcune proprietà della mappa G « dei maggioranti ».

Teorema 11. (a) $ev(G\{\cdot\} \times P) = ch(m)$. (b) $ev\langle G\{\cdot\}, P\rangle = t$. (c) $G\{\cdot\}$ *è mono.* (d) *Sia* $\mu : M \rightarrowtail \Omega \times \Omega$ $(\mu = m_\Omega)$; *allora* $G^2 \tau \mu^P$ *fattorizza attraverso* μ^P.

Dimostrazione. (a) Per definizione di G, $ev(G\{\cdot\} \times P) = ev(G \times P) \circ \circ (\{\cdot\} \times P) = (\forall_{q_3}(ev\langle p_1, p_3\rangle \Rightarrow ch(m)\langle p_3, p_2\rangle))(\{\cdot\} \times P)$. Osservo, ora, che la famiglia $(q_3 : P \times P \times P \to P \times P;\ \{\cdot\} \times P \times P : P \times P \times P \to \Omega^P \times P \times P)$ è un limite per il diagramma di pullback costituito dalle frecce $\{\cdot\} \times P : P \times P \to \to \Omega^P \times P$ e $q_3 : \Omega^P \times P \times P \to \Omega^P \times P$. Applicando l'analogo universale della condizione di Beck (cfr. [2]) e sfruttando il fatto che $\varphi \Rightarrow \psi = \Rightarrow \langle \varphi, \psi\rangle$ ed $ev(\{\cdot\} \times P) = \delta$, ottengo che $ev(G\{\cdot\} \times P) = \forall_{q_3}(\delta\langle p_1, p_3\rangle \Rightarrow ch(m)\langle p_3, p_2\rangle)$. Il secondo membro di questa ultima uguaglianza, per la 3.22 (3) di [3], è uguale a $ch(m)$. È così provato l'asserto.

(b) Si ottiene dal punto (a) per l'Osservazione 1 (a), dopo aver notato che $ev\langle G\{\cdot\}, P\rangle = ev(G\{\cdot\} \times P)\,\Delta$.

(c) Siano $x, y : X \to P$ tali che $G\{\cdot\}x = G\{\cdot\}y$. Allora, dai punti (a) e (b), $ch(m)\langle x, y\rangle = t$ e $ch(m)\langle y, x\rangle = t$. Dall'Osservazione 1 (a) si ottiene, perciò, $x = y$.

(d) Devo provare che $\exists_{G^2\tau}(\mu^P) \leq \mu^P$, o, equivalentemente, che

$$(1) \qquad \models X \subseteq Y \Rightarrow G(Y) \subseteq G(X) \qquad (X, Y \,\varepsilon\, \Omega^P) .$$

È

$$\models (x \in X \Rightarrow x \in Y) \Rightarrow ((x \in Y \Rightarrow x \leq z) \Rightarrow (x \in X \Rightarrow x \leq z)) ,$$

(5) $z \leq x$ sta per $\langle z, x\rangle \in m^0$.

poichè la formula scritta è una tautologia intuizionista. Dunque, per il teorema 3.21 di [**3**]

$$\models \forall x\,\varepsilon\, P(x \in X \Rightarrow x \in Y) \Rightarrow (\forall z\,\varepsilon\, P(\forall x\,\varepsilon\, P(x \in Y \Rightarrow x < z) \Rightarrow \forall x\,\varepsilon\, P(x \in X \Rightarrow x < z)))\ .$$

Ciò equivale alla (1), per definizione di G, dalla 4.20 di [**3**].

Definizione 6. Sia $S\colon \Omega^P \to P$; dirò che S è un *estremo superiore* per $\boldsymbol{P}$ se $G = G\{\cdot\}S$.

Notazione. D indicherà il morfismo

$$\{\langle X, Y\rangle \mapsto \{z\,\varepsilon\, P \mid \exists x, y\,\varepsilon\, P(x \in X \wedge y \in Y \wedge z = \underline{i}(x, y))\}\}\colon \Omega^P \times \Omega^P \to \Omega^P\ .$$

Definizione 7. Un estremo superiore S è *distributivo* se $SD = \underline{i}S^2$.

Esempi. 16. $\bigcup = ev\langle \Omega^\Omega, t\rangle\colon \Omega^\Omega \to \Omega$ è un estremo superiore distributivo per $\boldsymbol{\Omega}$.

17. Sia I un oggetto di $\underline{\mathrm{E}}$; allora $(\exists_{q_3}(ev\langle p_1, p_3\rangle \wedge ev\langle p_3, p_2\rangle))^\wedge\colon \Omega^{(\Omega^I)} \to \Omega^I$ è un estremo superiore distributivo per $\boldsymbol{\Omega}^I$ (6); la dimostrazione ricalca quella classica, tenendo presente che il morfismo considerato si può anche scrivere

$$\{\mathfrak{X} \mapsto \{x\,\varepsilon\, I \mid \exists X\,\varepsilon\, \Omega^I(X \in \mathfrak{X} \wedge x \in X)\}\}\ .$$

Corollario al Teorema 11 ed alla Definizione 6 è il seguente

Teorema 12. *Sia S un estremo superiore per $\boldsymbol{P}$.*

(a) $S\{\cdot\} = P$. (b) *Se S' è un estremo superiore per $\boldsymbol{P}$, allora $S' = S$.* (c) $ev\langle G, S\rangle = t$. (d) *Comunque presi $x\colon X \to P$ ed $y\colon X \to \Omega^P$; $ev\langle Gy, x\rangle = t$ se e solo se $\langle Sy, x\rangle$ fattorizza attraverso m.* (e) *$S^2\,\mu^P$ fattorizza attraverso m.*

Dimostrazione. (a) Per definizione di estremo superiore, $G = G\{\cdot\}S$; perciò $G\{\cdot\} = G\{\cdot\}S\{\cdot\}$. Sfruttando il Teorema 11 (c), ottengo l'uguaglianza cercata.

(b) È $G\{\cdot\}S' = G = G\{\cdot\}S$ per definizione; allora, procedendo come in (a), ottengo l'asserto.

---

(6) L'esempio 16 è un caso particolare, con $I = 1$.

(c) Per la definizione di estremo superiore e per note proprietà dei prodotti è $ev\langle G, S\rangle = ev\langle G\{\cdot\}, P\rangle S$. Ma il secondo membro, in virtù del Teorema 11 (b), è uguale a t.

(d) Per provare quanto richiesto, utilizzo ancora la definizione di estremo superiore ed il Teorema 11 (a). Ottengo così $ev\langle Gy, x\rangle = ev(G\{\cdot\}\times P)\ \langle Sy, x\rangle = ch(m)\langle Sy, x\rangle$. Da questa catena di uguaglianze è immediata la tesi.

(e) Per provare l'asserto, sfrutto la 4.20 di [**3**], la definizione di validità interna e le aggiunzioni $g^{-1} \dashv \forall g$ e $- \wedge \varphi \dashv \varphi \Rightarrow -$, ottenendo la seguente proprietà di μ^P:

$$ev\langle p_1\mu^P p_1, p_2\rangle \leqslant ev\langle p_2\mu^P p_1, p_2\rangle\,. \tag{2}$$

Per il Teorema 11 (d) esiste $s\colon M \to M$ tale che $G^2\ \tau\mu^P = \mu^P s$; per il punto (c),

$$ev\langle Gp_2\mu^P, Sp_2\mu^P\rangle = t\,.$$

Ma $Gp_2\mu^P = p_1\mu^P s$; perciò

$$ev\langle p_1\mu^P p_1, p_2\rangle\langle s, Sp_2\mu^P\rangle = t\,.$$

Quindi, dalla (2),

$$ev\langle p_2\mu^P p_1, p_2\rangle\langle s, Sp_2\mu^P\rangle = t\,,$$

cioè

$$ev\langle Gp_1\mu^P, Sp_2\mu^P\rangle = t\,.$$

Perciò, per il punto (d), $S\mu^P = \langle Sp_1\mu^P, Sp_2\mu^P\rangle$ fattorizza attraverso m.

Si osservi che il punto (b) del Teorema 12 afferma che un s.r. determina univocamente un estremo superiore, se questo esiste.

5. - Cornici.

Definizione 8. (a) Una *cornice* in $\underline{\mathrm{E}}$ è un s.r. $\boldsymbol{F}$ dotato di un estremo superiore distributivo.

(b) Siano $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{G}$ due cornici e sia $g\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ un m.s.r.: dirò che g è un *morfismo di cornici* (m.c.) e scriverò ancora $g\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$, se $gS_F = S_G\exists g$ (7).

È ovvio che le identità sono m.c. e le composizioni di m.c. sono m.c..

(7) Ricordo che $\exists\, g = \{X \mapsto \{y \in G | \exists\, x \in F(x \in X \wedge y = g(x))\}\}\colon \Omega^F \to \Omega^G$:

Notazione. $C_{\underline{E}}$ indicherà la categoria che ha come oggetti le cornici in $\underline{E}$ e come mappe i morfismi di cornici.

Nel seguito, $\boldsymbol{F}$ indicherà una fissata cornice. Per le cornici si può dedurre, dal Teorema 12, il seguente

Teorema 13. *$S\xi$ fattorizza attraverso m, dove $\xi = \langle p_1, D\rangle^{-1}(\mu^F)$* [8].

Dimostrazione. Al punto (e) del Teorema 12, ho dimostrato che $\exists_{S^2}(\mu^F) \leqslant m$, o, equivalentemente, che

$$\mu^F \leqslant (S^2)^{-1}(m) . \tag{3}$$

Con semplici calcoli, si può stabilire la seguente uguaglianza

$$ch(m)S^2 = ch(m)\langle Sp_1, iS^2\rangle ; \tag{4}$$

poichè S è distributivo, passando dalla (4) all'uguaglianza tra i corrispondenti monomorfismi, è $(S^2)^{-1}(m) = \langle p_1, D\rangle^{-1}(S^2)^{-1}(m)$. Perciò, dalla (3),

$$\xi = \langle p_1, D\rangle^{-1}(\mu^F) \leqslant \langle p_1, D\rangle^{-1}(S^2)^{-1}(m) = (S^2)^{-1}(m) .$$

Confrontando il primo e l'ultimo membro di questa catena, si ottiene subito la tesi.

È da notare che molte proprietà esposte sono simili alle proprietà delle cornici concrete; un'altra caratteristica delle cornici in $\underline{E}$ è che esse si possono dotare di una struttura di algebra di Heyting completa.

Notazione. Pongo

$$\pi = \{\langle x, y\rangle \mapsto \{z \in F \,|\, i(x, z) \lessdot y\}\} : F \times F \to \Omega^F , \qquad \underline{p} = S\pi ;$$

$$\eta = \{\langle X, x\rangle \,|\, \forall z \in F(z \in X \Rightarrow x \lessdot z)\} : \Omega^F \times F \to \Omega , \qquad L_F = \eta\hat{\ } : \Omega^F \to \Omega^F ,$$

cioè $L_F = \{X \mapsto \{x \in F \,|\, \langle X, x\rangle \in \eta^0\}\}$ (si veda la definizione di G_P data nel § 4). Pongo inoltre, $I = SL$ ed $u = S\vee^F\{\cdot\}^2$.

---

[8] Il teorema vale anche senza l'ipotesi che S sia distributivo, ma, per quel che segue, è sufficiente questo risultato.

Vale il seguente

Lemma 14. (a) $p: F \times F \to F$ *è uno pseudo complemento relativo per* $\boldsymbol{F}$.

(b) $I: \Omega^F \to F$ *è un estremo inferiore per* $\boldsymbol{F}$ ([9]).

(c) $u: F \times F \to F$ *esprime il supremo per* m, *secondo la definizione data in* [5].

Tralascio la dimostrazione, chè si esprime, nel linguaggio L(Set), essenzialmente come quella insiemistica.

Dal Lemma 14 si deduce il

Teorema 15. $(F, \underline{u}, \underline{i}, \underline{p}, \underline{0}, \underline{1}, S, I)$ *è un'algebra di Heyting completa in* $\underline{\mathrm{E}}$.

Infine, nel seguente teorema, elenco alcune proprietà che si ottengono come le precedenti.

Teorema 16. (a) $St^\wedge = \underline{1}$; $It^\wedge = \underline{0}$; $I\{\cdot\} = F$; $Sf^\wedge = \underline{0}$; $If^\wedge = \underline{1}$.

(b) *Sia* $\alpha: A \times F \to \Omega$; *allora*

$$\models S\{x \,\varepsilon\, F \,|\, \exists a \,\varepsilon\, A \;\alpha(a, x)\} = S\{y \,\varepsilon\, F \,|\, \exists a \,\varepsilon\, A (y = S\{x \,\varepsilon\, F \,|\, \alpha(a, x)\})\}\,.$$

6. - $\boldsymbol{\Omega}$-cornici.

Un risultato interessante per le cornici è che esiste al più un m.c. da $\boldsymbol{\Omega}$ ad $\boldsymbol{F}$; si ricordi che un analogo risultato non vale per i s.r..

Osservazione 11. La mappa χ, in generale, non conserva l'estremo superiore.

Siano $\omega, \omega': \boldsymbol{\Omega} \to \boldsymbol{F}$ due m.c.; sia $k: K \rightarrowtail \Omega$ l'egualizzatore di $\omega, \omega': \Omega \to F$.

Lemma 17. *Esistono* $\underline{i}: K^2 \to K$, $\underline{0}: 1 \to K$ *ed* $\underline{1}: 1 \to K$ *tali che* $\wedge k^2 = ki$, *false* $= k\underline{0}$ *e true* $= k\underline{1}$. *In più* $k^*(\mathit{true}) = \underline{1}$.

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato discende da risul-

---

([9]) Sono ovvie le definizioni di *pseudo complemento relativo* (cfr. [4]) e di *estremo inferiore* per $\boldsymbol{F}(L = L\{\cdot\}I)$.

tati generali. La seconda parte segue da $true = k\underline{1}$ essendo k un monomorfismo.

Lemma 18. *Esiste* $\bigvee : \Omega^K \to K$ *tale che* $\bigcup \exists k = k \bigvee$ (10).

Dimostrazione. È sufficiente provare che $\bigcup \exists k$ egualizza ω ed ω'. Poichè ω ed ω' sono m.c., per note proprietà del «quantificatore» $\exists$, si ha $\omega \bigcup \exists k = S \exists \omega \exists k = S \exists(\omega k) = S \exists(\omega' k) = \omega' \bigcup \exists k$.

Notazione. Indicherò con h il morfismo $\bigvee \Omega^k\{\cdot\}: \Omega \to K$.

Lemma 19. $kh = \Omega$.

Dimostrazione. La tesi del lemma si scrive: $kh = ch(true)$, oppure, $true = r(kh)$. Noto che, per il Lemma 18 e la definizione di $\bigcup: \Omega^\Omega \to \Omega$, $kh = ev\langle \Omega^\Omega, t\rangle \exists k \Omega^k\{\cdot\}$. Devo, dunque, provare che

$$\{\cdot\}^*(\Omega^k)^*(\exists k)^*\langle \Omega^\Omega, t\rangle^* ev^*(true) = true \tag{5}$$

La (5) discende dalle uguaglianze (i)-(v) dimostrate nel seguito.

$$ev^*(true) = \in_\Omega , \tag{i}$$

per definizione di $\in_\Omega$.

$$\langle \Omega^\Omega, t\rangle^*(\in_\Omega) = r(\{X \varepsilon \Omega^\Omega \mid true^0 \in X\}) . \tag{ii}$$

Infatti, la mappa caratteristica di $\langle \Omega^\Omega, t\rangle^*(\in_\Omega)$ è $\langle \Omega^\Omega, t\rangle^{-1}(ev)$; per la 4.9 (1) di [**3**],

$$\langle \Omega^\Omega, t\rangle^{-1}(ev) = \{X \varepsilon \Omega^\Omega \mid \langle \Omega^\Omega(X), t(X)\rangle \in \in_\Omega^0\} .$$

Il secondo membro di questa uguaglianza è $\{X \varepsilon \Omega^\Omega \mid true^0 \in X\}$. A questo punto, si ottiene la (ii), considerando l'uguaglianza tra i monomorfismi classificati.

$$(\exists k)^*(r(\{X \varepsilon \Omega^\Omega \mid true^0 \in X\})) = r(\{Y \varepsilon \Omega^K \mid \underline{1}^0 \in Y\}) . \tag{iii}$$

(10) Si può provare che $(K, \underline{i}, \underline{0}, \underline{1}, \bigvee)$ è una cornice.

La mappa caratteristica di $(\exists k)^*(r(\{X\ \varepsilon\ \Omega^\Omega \mid true^{\,0} \in X\}))$ è

$$(\exists k)^{-1}(\{X\ \varepsilon\ \Omega^\Omega \mid true^{\,0} \in X\})\ ;$$

per la 4.9 (1) di [**3**], questa è uguale a $\{Y\ \varepsilon\ \Omega^K \mid true^{\,0} \in \exists k(Y)\}$. Per definizione,

$$\exists k = \{Y \mapsto \{x\ \varepsilon\ \Omega \mid \exists y\ \varepsilon\ K(y \in Y \wedge x = k(y))\}\}\,,$$

e, poichè k è un monomorfismo, per le 4.10 e 3.22 (2) di [**3**] è

$$\models k(\underline{1}^0) \in \exists k(Y) \Leftrightarrow \underline{1}^0 \in Y \qquad (Y\ \varepsilon\ \Omega^K)\,.$$

Allora, essendo $k\underline{1} = true$, per la 3.22 (1) di [**3**],

$$(\exists k)^{-1}(\{X\ \varepsilon\ \Omega^\Omega \mid true^{\,0} \in X\}) = \{Y\ \varepsilon\ \Omega^K \mid \underline{1}^0 \in Y\}\,.$$

Da questa uguaglianza deriva immediatamente la (iii).

(iv) $$(\Omega^k)^*(r(\{Y\ \varepsilon\ \Omega^K \mid \underline{1}^0 \in Y\})) = r(\{X\ \varepsilon\ \Omega^\Omega \mid true^{\,0} \in X\})\,.$$

Ragionando come in precedenza,

$$(\Omega^k)^{-1}(\{Y\ \varepsilon\ \Omega^K \mid \underline{1}^0 \in Y\}) = \{X\ \varepsilon\ \Omega^\Omega \mid \underline{1}^0 \in \Omega^k(X)\}\,.$$

Inoltre, è facile vedere che

$$\Omega^k = \{X \mapsto \{x\ \varepsilon\ K \mid k(x) \in X\}\}\ ;$$

perciò,

$$\models \underline{1}^0 \in \Omega^k(X) \Leftrightarrow true^{\,0} \in X \qquad (X\ \varepsilon\ \Omega^\Omega)\,.$$

A questo punto, con passaggi simili a quelli sopra esposti, si ottiene la (iv).

(v) $$\{\cdot\}^*(r(\{X\ \varepsilon\ \Omega^\Omega \mid true^{\,0} \in X\})) = true\,.$$

È

$$\{\cdot\}^{-1}(\{X\ \varepsilon\ \Omega^\Omega \mid true^{\,0} \in X\}) = \{x\ \varepsilon\ \Omega \mid true^{\,0} \in \{x\}\}\,.$$

Per la 4.17 e 2.13 di [**3**], il secondo membro dell'ultima uguaglianza è $ch(true)$. Perciò

$$\{\cdot\}^*(r(\{X\ \varepsilon\ \Omega^\Omega \mid true^{\,0} \in X\})) = r(ch(true)) = true\,.$$

Questo conclude la prova del lemma.

Teorema 20. *Se* $\omega, \omega' : \boldsymbol{\Omega} \to \boldsymbol{F}$ *sono m.c., allora* $\omega = \omega'$.

Dimostrazione. Per il Lemma 3, il morfismo k, egualizzatore di ω, ω', è una ritrazione; dunque, k è un isomorfismo. Da questo deriva l'asserto.

Corollario 21. *Se* $\omega : \boldsymbol{\Omega} \to \boldsymbol{F}$, $\omega' : \boldsymbol{\Omega} \to \boldsymbol{G}$ *e* $g : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ *sono m.c., allora* $\omega' = \omega g$.

Definizione 9. Sia $\boldsymbol{F}$ una cornice; dirò che $\boldsymbol{F}$ è una $\boldsymbol{\Omega}$-*cornice* se $\boldsymbol{\Omega}$ si immerge come cornice in $\boldsymbol{F}$. Indicherò con ω_F il m.c. di immersione.

Notazione. Indicherò con $\boldsymbol{\Omega}$-$\mathrm{C}_{\underline{\mathrm{E}}}$ la sottocategoria piena di $\mathrm{C}_{\underline{\mathrm{E}}}$ individuata dalle $\boldsymbol{\Omega}$-cornici.

Esempi. 18. $\boldsymbol{\Omega}$ è una $\boldsymbol{\Omega}$-cornice ($\omega_{\Omega} = \Omega$).

19. Sia I un oggetto tale che $ter : I \to 1$. Con calcoli semplici, ma tediosi, si dimostra che $\hat{p_1} : \boldsymbol{\Omega} \to \boldsymbol{\Omega}^I$; quindi $\boldsymbol{\Omega}^I$ è una $\boldsymbol{\Omega}$-cornice.

Osservazione 12. Non tutte le cornici in $\underline{\mathrm{E}}$ sono, in generale, $\boldsymbol{\Omega}$-cornici (a differenza di quanto avviene in $\underline{\mathrm{Set}}$). In $\underline{\mathrm{Set}}^{\cdot\to\cdot}$, è facile dotare $1+1$ di una struttura di cornice; ma, per quanto detto all'Osservazione 3, dal Teorema 9 segue che $\boldsymbol{2}$ non può essere una $\boldsymbol{\Omega}$-cornice.

7. - Filtri di cornici.

Rifacendomi alla Definizione 3 di filtro di un semireticolo, dirò ancora filtro di una cornice $\boldsymbol{F}$ ogni filtro del semireticolo sottogiacente. Parimenti si ripetono le definizioni di filtro debole, filtro proprio e filtro p-massimale; si ripetono, anche, le definizioni di filtro forte e filtro f-massimale nel caso di $\boldsymbol{\Omega}$-cornici. Inoltre, grazie al maggior numero di operazioni definibili nelle cornici, è possibile fare una distinzione più accurata dei filtri:

Definizione 10. Sia λ un filtro di $\boldsymbol{F}$.

(a) λ è (un filtro) *primo* se $\lambda \underline{u} = \vee \lambda^2$.

(b) λ è *ultra* (filtro) se $\lambda \underline{p} = \Rightarrow \lambda^2$.

(c) λ è (un filtro) *completo* se $\lambda S = \bigcup \exists \lambda$.

Osservazione 13. (a) È immediato, dalla aggiunzione $-\wedge\varphi \dashv \varphi \Rightarrow -$ e dalla definizione di filtro, che $\lambda\underline{p} \leqslant \, \Rightarrow \lambda^2$.

(b) Se λ è completo, λ è primo. (c) Se λ è ultra, $\lambda\underline{e} = \, \Leftrightarrow \lambda^2$ (11).

Alcune proprietà dei filtri, ottenute in [**6**], si dimostrano anche nel caso più generale che sto presentando. Ad esempio, vale il seguente

Teorema 22. *Sia* $\boldsymbol{F}$ *una* $\boldsymbol{\Omega}$*-cornice, sia* λ *un filtro di* $\boldsymbol{F}$. *Se* λ *è forte ed ultra, allora* λ *è primo ed f-massimale.*

Dimostrazione. Analoga a quella di 1.1 (3) di [**6**].

Bibliografia

[1] A. Kock and G. C. Wraith, *Elementary topos*, Aarhus Universitet Lecture Notes **30**, Aarhus 1971.

[2] F. W. Lawvere, *Equality in hyperdoctrines and comprehension schema as an adjoint functor*, Proc. Symposia Pure Math. **17** (1970), 1-14.

[3] G. Osius, *Logical and set theoretical tools in elementary topos*, in « Model Theory and Topoi », Springer Lecture Notes **445**, Berlin 1975.

[4] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The mathematics of metamathematics*, PWN, Warszawa 1963.

[5] M. Servi, *Questioni di algebra universale in una categoria astratta* (II), Ann. Univ. Ferrara **15** (1970), 57-92.

[6] H. Volger, *Ultrafilters, ultrapowers and finiteness*, J. Pure Appl. Algebra **6** (1975), 345-356.

---

(11) $\underline{e}: F \times F \to F$ è definito come $\underline{i}\langle \underline{p}, \underline{p}\,\tau \rangle$.

Summary

We introduce the concepts of inf-semilattice and frame in a topos $\underline{\mathrm{E}}$, *emphasizing those into which* Ω *can be embedded.*

* * *