Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 359-367

MAURO SASSETTI e ANTONIO TARSIA (*)

# Il problema dell'equilibrio di una piastra con ostacolo elastico (**)

## 1. - Introduzione.

Vogliamo studiare il problema della configurazione di equilibrio di una piastra elastica fissata al bordo, tesa al di sopra di un ostacolo deformabile elasticamente.

Indichiamo con $\Omega$ un aperto connesso e limitato del piano $x$, $y$, di frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente regolare, e con $u$ la funzione il cui grafico dà la configurazione d'equilibrio della piastra. Indichiamo poi con $\psi$ una funzione sufficientemente regolare definita su $\bar{\Omega}$ e tale che $\psi|_{\partial\Omega} < 0$; il grafico di $\psi$ dà la configurazione non deformata dell'ostacolo.

Se con $\mathscr{I}$ indichiamo la zona di contatto tra piastra e ostacolo nella configurazione d'equilibrio, il problema fisico può essere formulato nei seguenti termini: trovare una funzione $u$ tale che

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u = 0 \qquad \text{in } \Omega - \mathscr{I}\,, \qquad \Delta^2 u + k(u-\psi) = 0 \qquad \text{in } \mathscr{I}\,, \\ u = \dfrac{du}{dn} = 0 \qquad\qquad \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

postulando il fatto che lo spostamento della piastra sia proporzionale alla reazione di contatto; $k$ è il termine che tiene conto di tale proporzionalità: lo supporremo costante e positivo.

---

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Pisa, Italy.

(**) Ricevuto: 5-IV-1978.

In ipotesi di regolarità, il problema (1.1) è equivalente al seguente: trovare una funzione $u$ tale che

$$\Delta^2 u + k \min\{u-\psi, 0\} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = \frac{du}{dn} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega\,. \tag{1.2}$$

Per provare tale equivalenza, basta osservare che $\mathscr{I} = \{x \in \Omega\colon u(x) \leqslant \psi(x)\}$. Il problema (1.2) verrà risolto prima trovando una soluzione (l'unica soluzione) in $H^4(\Omega) \cap H^2_0(\Omega)$ e poi regolarizzandola (nell'ipotesi $\psi \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$) in $C^{4,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Per risolvere la prima parte, approssimeremo il problema (1.2) con una successione di problemi del tipo

$$\Delta^2 u + k(u-\psi)\vartheta(u-\psi) = 0 \quad \text{in } \Omega\,, \qquad u = \frac{du}{dn} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega\,, \tag{1.3}$$

dove $\vartheta$ è una funzione lipschitziana opportuna.

Nel paragrafo **2** studieremo l'esistenza di soluzioni per problemi del tipo (1.3), utilizzando il teorema del punto fisso di Schauder.

Nel paragrafo **3** faremo vedere come il problema (1.2) sia approssimabile con problemi del tipo (1.3), deducendo esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione dal dato.

Nel paragrafo **4**, infine, regolarizzeremo la soluzione trovata, utilizzando i risultati di Campanato [**2**].

## 2. - Un teorema di esistenza per un'equazione non lineare.

In questa parte del lavoro studiamo l'esistenza di soluzioni per il problema

$$u \in H^2_0(\Omega)\,, \qquad \Delta^2 u + k(u-\psi)\vartheta(u-\psi) = 0\,, \tag{2.1}$$

dove $\vartheta(s)$ è la funzione definita da ($\varepsilon > 0$ fissato)

$$\vartheta(s) = \begin{array}{ll} 1 & \text{se } s \leqslant 0\,, \\ (-1/\varepsilon)s + 1 & \text{se } 0 < s < \varepsilon\,, \\ 0 & \text{se } \varepsilon \leqslant s\,. \end{array} \tag{2.2}$$

Otteniamo a questo scopo il seguente risultato

Teorema 2.1. *Se $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$, il problema* (2.1) *ha una soluzione*

$u \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, *e vale la maggiorazione seguente*

$$\|u\|_4 \leqslant c(\Omega, k)\|\psi\|_\infty, \tag{2.3}$$

*dove* $c$ *non dipende dalla* $\varepsilon$ *di* (2.2).

Dimostrazione. Consideriamo in $H_0^2(\Omega)$ l'equazione

$$\Delta^2 u + ku\vartheta(w-\psi) = k\psi\vartheta(w-\psi), \tag{2.4}$$

per ogni fissata $w \in H_0^2(\Omega)$. La (2.4) ha una soluzione (unica) (cfr. Lions-Magenes [**3**], Agmon [**1**]), e per essa vale la maggiorazione

$$\|u\|_4 \leqslant c(\Omega, k)\|\psi\|_\infty. \tag{2.5}$$

Osserviamo che la costante $c$ non dipende da $w$ nè da $\varepsilon$, in quanto dipende solo dalle norme $L^\infty(\Omega)$ dei coefficienti della parte secondaria dell'equazione (2.4). Sia $\Sigma$ l'insieme

$$\Sigma = \{v \in H_0^2(\Omega) \colon \|v\|_2 \leqslant c(\Omega, k)\|\psi\|_\infty\},$$

che è un convesso, chiuso e limitato di $H_0^2(\Omega)$. Sia $T\colon \Sigma \to \Sigma$ l'applicazione che ad ogni $w \in \Sigma$ associa la soluzione $u$ della equazione (2.4). Proveremo che $T$ è un'applicazione continua e compatta; quindi per il teorema del punto fisso di Schauder il problema (2.1) ha una soluzione $u \in \Sigma$.

(a) $T$ è un'applicazione *continua*. Sia $\{w_n\} \in \Sigma$ tale che $w_n \to w$ in $H_0^2(\Omega)$; poniamo $u_n = Tw_n$, $u = Tw$; vogliamo far vedere che $u_n \to u$ in $H_0^2(\Omega)$. Dalle equazioni seguenti

$$\int_\Omega \{\Delta u\, \Delta\varphi + ku\vartheta(w-\psi)\varphi\}\,dx = \int_\Omega k\psi\vartheta(w-\psi)\varphi\,dx,$$

$$\int_\Omega \{\Delta u_n\, \Delta\varphi + ku_n\vartheta(w_n-\psi)\varphi\}\,dx = \int_\Omega k\psi\vartheta(w_n-\psi)\varphi\,dx,$$

$\forall\varphi \in H_0^2(\Omega)$, sottraendo membro a membro, si trova

$$\int_\Omega \{\Delta(u-u_n)\,\Delta\varphi + k[u\vartheta(w-\psi) - u_n\vartheta(w_n-\psi)]\varphi\}\,dx = \tag{2.6}$$

$$= \int_\Omega k\psi[\vartheta(w-\psi) - \vartheta(w_n-\psi)]\varphi\,dx \qquad \forall\varphi \in H_0^2(\Omega).$$

La (2.6) è equivalente alla seguente equazione

$$(2.7)\quad \int_\Omega \{\Delta(u-u_n)\,\Delta\varphi + k[u\vartheta(w-\psi) - u_n\vartheta(w-\psi) + $$
$$+ u_n\vartheta(w-\psi) - u_n\vartheta(w_n-\psi)]\varphi\}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega k\psi[\vartheta(w-\psi) - \vartheta(w_n-\psi)]\varphi\,\mathrm{d}x \qquad \forall\varphi\in H_0^2(\Omega)\ ;$$

nella (2.7) prendiamo $\varphi = u - u_n$, ottenendo in tal modo

$$(2.8)\quad \int_\Omega \{|\Delta(u-u_n)|^2 + k(u-u_n)^2\vartheta(w-\psi) + ku_n(u-u_n)\cdot$$
$$\cdot[\vartheta(w-\psi) - \vartheta(w_n-\psi)]\}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega k\psi[\vartheta(w-\psi) - \vartheta(w_n-\psi)](u-u_n)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nella (2.8) si ha

$$\int_\Omega |\Delta(u-u_n)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \alpha\|u-u_n\|_2^2\,,$$

in quanto $\Delta: H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ è un isomorfismo, mentre per gli altri termini vale quanto segue

$$k(u-u_n)^2\vartheta(w-\psi) \geqslant 0\,,$$

$$\int_\Omega ku_n(u-u_n)[\vartheta(w-\psi) - \vartheta(w_n-\psi)]\,\mathrm{d}x \to 0\,,$$

$$\int_\Omega k\psi[\vartheta(w-\psi) - \vartheta(w_n-\psi)](u-u_n)\,\mathrm{d}x \to 0\,,$$

in quanto $u - u_n$, $u_n$ sono limitate e $\vartheta$ è lipschitziana. In definitiva otteniamo

$$u_n \to u \qquad \text{in } H_0^2(\Omega)\,.$$

(b) $T$ è un'applicazione *compatta*. Dalla maggiorazione (2.5) segue che $T$ trasforma $H_0^2(\Omega)$ in un limitato di $H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$; poichè i limitati di $H^4(\Omega) \cap \cap H_0^2(\Omega)$ sono relativamente compatti in $H_0^2(\Omega)$ (teorema di Rellich), questo prova che $T$ è compatta.

Osserviamo che la soluzione $u$ del problema (2.1) così trovata appartiene ad $H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ e per essa vale la maggiorazione (2.5).

**3. - Proprietà della soluzione dell'equazione limite.**

Riprendiamo il problema introdotto nel paragrafo **1**

$$u \in H_0^2(\Omega), \qquad \Delta^2 u + k(u-\psi)\Gamma(u-\psi) = 0,$$

dove $\Gamma(s)$ è la funzione definita da

$$\Gamma(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \leqslant 0, \\ 0 & \text{se } s > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Definita $\vartheta_n(s)$ come segue

$$\vartheta_n(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \leqslant 0, \\ -2ns+1 & \text{se } 0 < s \leqslant (1/2n), \\ 0 & \text{se } (1/2n) < s, \end{cases} \tag{3.2}$$

abbiamo visto nel paragrafo **2** che esiste una soluzione $u_n$ del problema seguente

$$u_n \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega), \qquad \Delta^2 u_n + k(u_n - \psi)\vartheta_n(u_n - \psi) = 0.$$

Per la maggiorazione (2.5), le norme $\|u_n\|_4$ sono equilimitate; quindi esiste una sottosuccessione di $\{u_n\}$ (che indicheremo allo stesso modo) e una $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ tali che

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{in } H^4(\Omega), \tag{3.3}$$

$$u_n \to u \qquad \text{in } H^{4-\varepsilon}(\Omega), \ \forall \varepsilon > 0; \tag{3.4}$$

in particolare dunque, $u_n \to u$ uniformemente. Quindi si ha

$$\forall n \in N, \ \exists \nu(n) \in \boldsymbol{N}: \ \|u_{\nu_n} - u\|_\infty < \frac{1}{2n}; \tag{3.5}$$

inoltre possiamo assumere che la successione $\{\nu_n\}$ sia strettamente crescente, e $\nu_n > n$. Vogliamo provare che

$$\Delta^2 u_{\nu_n} + k(u_{\nu_n} - \psi)\vartheta_{\nu_n}(u_{\nu_n} - \psi) \rightharpoonup \Delta^2 u + k(u-\psi)\Gamma(u-\psi) \tag{3.6}$$

in $L^2(\Omega)$; con ciò sarà dimostrato che $u$ è soluzione del problema (1.2). Poichè per la (3.3) risulta

$$\Delta^2 u_{\nu_n} \rightharpoonup \Delta^2 u \qquad \text{in } L^2(\Omega), \tag{3.7}$$

resta da provare che

$$(u_{\nu_n} - \psi)\vartheta_{\nu_n}(u_{\nu_n} - \psi) \rightharpoonup (u - \psi)\Gamma(u - \psi) \tag{3.8}$$

in $L^2(\Omega)$, ossia, posto $u_{\nu_n} - \psi = w_n$, $u - \psi = w$, che

$$w_n\vartheta_{\nu_n}(w_n) - w\Gamma(w) \rightharpoonup 0 \qquad \text{in } L^2(\Omega)\,, \tag{3.9}$$

o equivalentemente che

$$\begin{aligned}(w_n\vartheta_{\nu_n}(w_n) - w\vartheta_{\nu_n}(w)) + (w\vartheta_{\nu_n}(w) - w_n\Gamma(w)) &+ \\ + (w_n\Gamma(w) - w\Gamma(w)) \rightharpoonup 0 \qquad &\text{in } L^2(\Omega)\,.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Nella (3.10) ciascuno dei tre termini in parentesi tende a zero in $L^2(\Omega)$ debole. Infatti

$$(w_n - w)\Gamma(w) \to 0 \qquad \text{uniformemente}\,, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (w\vartheta_{\nu_n}(w) - w_n\Gamma(w))\,\varphi\,dx = \\ &= \int_{\Omega_1} (w\vartheta_{\nu_n}(w) - w_n\Gamma(w))\,\varphi\,dx + \int_{\Omega_2} (w\vartheta_{\nu_n}(w) - w_n\Gamma(w))\,\varphi\,dx + \\ &+ \int_{\Omega_3} (w\vartheta_{\nu_n}(w) - w_n\Gamma(w))\,\varphi\,dx \to 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,,\end{aligned} \tag{3.12}$$

dove abbiamo posto

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega\colon w(x) \leqslant 0\}\,,$$

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega\colon 0 < w(x) < \frac{1}{2\nu_n}\}\,,$$

$$\Omega_3 = \{x \in \Omega\colon \frac{1}{2\nu_n} \leqslant w(x)\}\,,$$

perchè

$$\int_{\Omega_1} (w\vartheta_{\nu_n}(w) - w_n\Gamma(w))\,\varphi\,dx = \int_{\Omega_1} (w - w_n)\varphi\,dx \to 0\,,$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_2} (w\vartheta_{\nu_n}(w) - w_n\Gamma(w))\,\varphi\right| dx &\leqslant \int_{\Omega_2} w\vartheta_{\nu_n}(w)\,|\varphi|\,dx < \\ &< \frac{1}{2\nu_n}\int_{\Omega_2} \vartheta_{\nu_n}(w)\,|\varphi|\,dx \leqslant \frac{c(\Omega)}{2\nu_n}\,\|\varphi\|_\infty \to 0\,,\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_3} (w\vartheta_{\nu_n}(w) - w_n\Gamma(w))\,\varphi\,dx = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Rimane da provare che

$$w_n \vartheta_{\nu_n}(w_n) - w\vartheta_{\nu_n}(w) \rightharpoonup 0 \qquad \text{in } L^2(\Omega)\,. \tag{3.13}$$

Poniamo

$$\Omega_1^{(n)} = \{x \in \Omega : |w(x)| \leqslant \frac{1}{n}\}, \quad \Omega_2^{(n)} = \{x \in \Omega : \frac{1}{n} < w(x) < 1\},$$

$$\Omega_3^{(n)} = \{x \in \Omega : -1 < w(x) < -\frac{1}{n}\},$$

$$\Omega_4 = \{x \in \Omega : w(x) \geqslant 1\}, \qquad \Omega_5 = \{x \in \Omega : w(x) \leqslant -1\}.$$

Si hanno quindi le maggiorazioni seguenti

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\Omega_1^{(n)}} [w_n\vartheta_{\nu_n}(w_n) - w\vartheta_{\nu_n}(w)]\varphi\,dx\Big| &\leqslant \|\varphi\|_{0,\Omega}\Big[\int_{\Omega_1^{(n)}}[w_n\vartheta_{\nu_n}(w_n) - w\vartheta_{\nu_n}(w)]^2\,dx\Big]^{\frac12} \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{2}\,\|\varphi\|_{0,\Omega}\Big[\int_{\Omega_1^{(n)}}\big(|w_n\vartheta_{\nu_n}(w_n)|^2 + |w\vartheta_{\nu_n}(w)|^2\big)\,dx\Big]^{\frac12}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Essendo $-(1/n) < w < (1/n)$ e, per la (3.5), $-(3/2n) < w_n < (3/2n)$, si ha che $w_n^2 < (9/4n^2)$ e $w^2 < (1/n^2)$; dunque, poichè $0 \leqslant \vartheta_{\nu_n}(s) \leqslant 1$, la (3.14) viene maggiorata da un termine del tipo $(c/n)$, dove $c$ è una costante che dipende da $\varphi$ e da $\Omega$, ma non da $n$.

$$\int_{\Omega_2^{(n)}} [w_n\vartheta_{\nu_n}(w_n) - w\vartheta_{\nu_n}(w)]\varphi\,dx = 0\,, \tag{3.15}$$

perchè per la definizione di $\Omega_2^{(n)}$ $w > (1/n) > (1/\nu(n)$, e per la (3.5) $w_n \geqslant (1/2n)$. Quindi $\vartheta_{\nu_n}(w_n) = 0$ e $\vartheta_{\nu_n}(w) = 0$.

$$\Big|\int_{\Omega_3^{(n)}} [w_n\vartheta_{\nu_n}(w_n) - w\vartheta_{\nu_n}(w)]\varphi\,dx\Big| \leqslant \int_{\Omega} |(w_n - w)\varphi|\,dx \to 0 \tag{3.16}$$

perchè, per la (3.5) e per la definizione di $\Omega_3^{(n)}$, $w_n \leqslant -(1/2n)$,

$$\int_{\Omega_4} [w_n\vartheta_{\nu_n}(w_n) - w\vartheta_{\nu_n}(w)]\varphi\,dx = 0 \tag{3.17}$$

perchè $w_n \geqslant 1 - (1/2n)$,

$$\Big|\int_{\Omega_5} [w_n\vartheta_{\nu_n}(w_n) - w\vartheta_{\nu_n}(w)]\varphi\,dx\Big| \leqslant \int_{\Omega} |(w_n - w)\varphi|\,dx \to 0 \tag{3.18}$$

perchè $w_n \leqslant -1 + (1/2n)$.

Resta in tal modo dimostrata l'esistenza di una soluzione $u \in H^4(\Omega) \cap H^2_0(\Omega)$ per il problema (1.2), per la quale vale la maggiorazione (2.3).

Per quanto riguarda *l'unicità di soluzione*, supponiamo che esistano due soluzioni $u$, $v$ con $u \neq v$. Allora si ha

$$\int_\Omega |\Delta(u-v)|^2 + k[(u-\psi)\Gamma(u-\psi)-(v-\psi)\Gamma(v-\psi)](u-v)\,dx = 0\,,$$

e dunque

$$\alpha\|u-v\|_2^2 + k\int_\Omega [(u-\psi)\Gamma(u-\psi)-(v-\psi)\Gamma(v-\psi)](u-v)\,dx \leqslant 0\,. \tag{3.19}$$

Se facciamo vedere che l'integrale nella (3.19) è positivo, deduciamo che deve essere $u = v$, che contraddice l'ipotesi. Poniamo

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : u(x) \leqslant \psi(x),\ v(x) \leqslant \psi(x)\}\,,\qquad \Omega_2 = \{x \in \Omega : u(x) \leqslant \psi(x) \leqslant v(x)\}\,,$$

$$\Omega_3 = \{x \in \Omega : v(x) \leqslant \psi(x) \leqslant u(x)\}\,,\qquad \Omega_4 = \{x \in \Omega : \psi(x) \leqslant u(x),\ \psi(x) \leqslant v(x)\};$$

si ha allora

$$\int_{\Omega_1} [(u-\psi)\Gamma(u-\psi)-(v-\psi)\Gamma(v-\psi)](u-v)\,dx = \|u-v\|^2_{0,\Omega_1}\,,$$

$$\int_{\Omega_2} [(u-\psi)\Gamma(u-\psi)-(v-\psi)\Gamma(v-\psi)](u-v)\,dx = \int_{\Omega_2} (u-\psi)(u-v)\,dx \geqslant 0\,,$$

$$\int_{\Omega_3} [(u-\psi)\Gamma(u-\psi)-(v-\psi)\Gamma(v-\psi)](u-v)\,dx = \int_{\Omega_3} (\psi-v)(u-v)\,dx \geqslant 0\,,$$

$$\int_{\Omega_4} [(u-\psi)\Gamma(u-\psi)-(v-\psi)\Gamma(v-\psi)](u-v)\,dx = 0\,.$$

In definitiva, dunque, il problema (1.2) ammette una ed una sola soluzione $u \in H^4(\Omega) \cap H^2_0(\Omega)$, e per essa vale la maggiorazione (2.3).

## 4. - Proprietà di regolarità della soluzione.

Ci proponiamo adesso di studiare le proprietà di regolarità della soluzione del problema (1.2).

Scriviamo il problema (1.2) nella forma

$$u \in H^4(\Omega) \cap H^2_0(\Omega)\,,\qquad \Delta^2 u = -k(u-\psi)\Gamma(u-\psi)\,, \tag{4.1}$$

dove $\psi \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ e $\alpha \in (0,1)$. Il secondo membro dell'equazione (4.1) è di classe $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ (1), mentre al primo membro figura un operatore lineare ellittico; dai risultati di Campanato [**2**] segue che $u \in C^{4,\alpha}(\bar{\Omega})$, e vale la maggiorazione

$$\sum_{|\gamma| \leqslant 4} \|D^\gamma u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \leqslant k \|\psi\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} .$$

Se poi $\psi \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, si ottiene che $u \in C^{4,\beta}(\bar{\Omega})$, $\forall \beta \in (0,1)$; osserviamo che, data la presenza del termine discontinuo $\Gamma(u-\psi)$, questo risultato non è migliorabile, anche aumentando le ipotesi di regolarità su $\psi$.

(1) Osserviamo che $s\vartheta(s) \in C^{0,1}(\boldsymbol{R})$, e anzi vale la maggiorazione

$$|s\vartheta(s) - t\vartheta(t)| \leqslant |s-t| \qquad \forall\, s, t \in R .$$

Quindi $\forall\, w \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ si ha che $w\vartheta(w) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, perchè

$$|w(x)\,\vartheta(w(x)) - w(y)\,\vartheta(w(y))| \leqslant |w(x) - w(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha , \qquad \forall\, x, y \in \Omega .$$

## Riferimenti bibliografici


[**1**] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems,* Math. Studies, Van Nostrand, Princeton, New Jersey 1965.

[**2**] S. Campanato, *Equazioni ellittiche non variazionali a coefficienti continui,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **86** (1970), 125-154.

[**3**] J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* vol. I, Dunod, Paris 1968.

[**4**] G. Stampacchia, *Variational inequalities,* Proc. NATO Advanced Study Institute, Ed. Oderisi 1968, 101-192.


## Summary


*The equilibrium configuration of an elastic plate, clamped along its edge and resting on a smooth elastic obstacle, is studied; for this problem the existence of a unique regular solution is proved.*


* * *