Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 349-357

C. COTTI FERRERO (*)

Quozienti di stems rispetto a particolari annullatori (**)

Introduzione.

Nel lavoro [**1**]$_1$ abbiamo classificato gli stems N il cui semigruppo moltiplicativo $[N; \cdot]$ possieda un ideale S con proprietà commutative deboli ed abbiamo provato che, sotto opportune condizioni, $N/A(S)$ è un anello commutativo. Con questo in mente, abbiamo cercato casi in cui il quoziente di uno stem rispetto all'annullatore di una sua sottostruttura notevole avesse importanti proprietà in comune con la sottostruttura stessa.

In particolare consideriamo i casi in cui N possiede un ideale S di $[N; \cdot]$ a prodotti banali, il caso in cui il sottostem $\langle S \rangle$ generato da un ideale S di $[N; \cdot]$ sia primo o astratto affine ed in ogni caso si prova che, sotto opportune condizioni, il quoziente di N rispetto all'annullatore destro di S soddisfa alle dette proprietà.

Inoltre abbiamo studiato proprietà degli stems N una cui immagine omomorfa sia a prodotti banali o costante. È interessante il fatto che in tali casi si ritrovano ideali di $[N; \cdot]$ in cui il prodotto è distributivo rispetto a se stesso oppure ideali rettangolari; stems con queste due ultime proprietà sono studiati ad esempio in [**1**]$_3$ e [**2**].

1. – Sia N uno stem sinistro; indichiamo con S un ideale del semigruppo moltiplicativo $[N; \cdot]$ di N e con $\langle S \rangle$ il sottostem generato da S. Se M è un sottoinsieme di N, poniamo $M^* = M \setminus \{0\}$, $A_d(M) = \{x \in N \mid yx = 0, \forall y \in M\}$, $A_s(M) = \{x \in N \mid xy = 0, \forall y \in M\}$ ed $A(M) = A_d(M) \cap A_s(M)$. È ovvio che se S è un ideale di $[N; \cdot]$ allora $A_d(S)$ è un ideale di N: questo fatto verrà spesso utilizzato senza esplicito richiamo.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). – Ricevuto: 23-III-1978.

Poniamo inoltre $N^{(k)} = \{x^1 \cdot \ldots \cdot x^k \mid x^1, \ldots, x^k \in N\}$ ed indichiamo con N^k il sottostem generato da $N^{(k)}$.

Ci interessiamo dapprima degli stems N il cui semigruppo $[N; \cdot]$ possiede un ideale S a prodotti banali. Ricordiamo che $S \neq \{0\}$ si dice a prodotti banali quando, per $y \in S$, è $0y = 0$ e, per $x \in S^*$, $xy = y$. *È chiaro che allora* $A(S) \cap S = \{0\}$.

Lemma 1. *Sia N uno stem ed S un ideale a prodotti banali di $[N; \cdot]$, allora, per $x \in S^*$ ed $y \in \langle S \rangle$, risulta $xy = y$.*

Sia M un sottoinsieme di N; indichiamo con $\sum(M)$ l'insieme delle somme finite di elementi di M e con $\pi(M)$ l'insieme dei prodotti finiti di elementi di M.

Poniamo $S_0 = S$ ed $S_i = \pi\left(\sum(S_{i-1})\right)$ $(i \geqslant 1)$: ovviamente $\langle S \rangle = \bigcup_{i \in N_0} S_i$.

Per dimostrare l'asserto ragioniamo per induzione sul minimo intero i tale che $y \in S_i$.

Se $y \in S_0$, $xy = y$ per ipotesi. Si abbia, per induzione, che per $x \in S^*$ e per $y \in S_i$, sia $xy = y$ e sia z un generico elemento di S_{i+1}. È ovviamente

$$z = \Big(\sum_{i \in I_{r_1}} y_{i_1}\Big) \cdot \Big(\sum_{i_2 \in I_{r_2}} y_{i_2}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(\sum_{i_s \in I_{r_s}} y_{i_s}\Big),$$

ove gli y_{i_j} sono tutti elementi di S_i. Poichè, per l'ipotesi induttiva, è $xy_{i_1} = y_{i_1}$ $(\forall_{i_1} \in I_{r_1})$ risulta $xz = z$, grazie alla distributiva sinistra ed alla proprietà associativa del prodotto. Per induzione ne segue l'asserto.

Lemma 2. *Sia N uno stem ed S un ideale a prodotti banali di $[N; \cdot]$ se esiste un $y \in \langle S \rangle^*$ tale che $xy = 0$ $(x \in N)$, allora $x \in A(S)$. Inoltre il prodotto di due elementi non appartenenti ad $A(S)$ è diverso da zero.*

Siano $x \in N$, $y \in \langle S^* \rangle$ e $xy = 0$. Per $s \in S$, risulta $sx \in S$ e se $sx \neq 0$ è $sxy = y$ (Lemma 1); ma è anche $sxy = s0 = 0$, onde $y = 0$, contro l'ipotesi. Pertanto è $sx = 0$ e perciò $x \in A_d(S)$.

Visto che S è un ideale di $[N; \cdot]$ con zero e privo di nilpotenti non nulli allora (oss. 2 di [**1**]$_1$ punto 1), per $z \in N$ e $t \in S$, si ha che $zt = 0$ se e solo se $tz = 0$, e questo vuol dire che $A_d(S) = A_s(S) = A(S)$; dopo quanto già visto questo dimostra la prima parte dell'enunciato.

Siano ora $a, b \in N$ con $a, b \notin A(S)$ e $ab = 0$.

Poichè $A_s(S) = A(S)$, esiste un $s' \in S^*$ tale che $bs' \in S^*$: visto che N è zero-simmetrico (oss. 1 di [**1**]$_1$), è anche $abs' = 0s' = 0$. Per la prima parte dell'enunciato di questo lemma dovrebbe risultare $a \in A(S)$, contro l'ipotesi.

Lemma 3. *Sia N uno stem e sia S un ideale a prodotti banali di $[N; \cdot]$; allora*

(1) $xs = s$, *per* $x \in N \setminus A(S)$ *e per* $s \in S$,

(2) $s'y - y \in A(S)$, *per* $y \in N$ *e per* $s' \in S^*$.

Dimostriamo la (1). Per $x \notin A(S)$, $s' \in S^*$ ed $s \in S$, risulta $(xs'x)\cdot s = s = (xs')\cdot s$, da cui $xs'(xs - s) = 0$. Ora $xs' \neq 0$. (Lemma 2, ricordato che $S \cap A(S) = \{0\}$) e se fosse $xs - s \neq 0$ si avrebbe $xs - s \in \langle S^* \rangle$ e, per la prima parte del Lemma 2, sarebbe $xs' \in A(S)$. Questo è assurdo perchè $xs' \in S^*$ ed $S \cap A(S) = \{0\}$.

Dimostriamo la (2). È chiaro che se $y \in A(S)$, allora $s'y - y \in A(S)$ perchè $A(S)$ è un ideale di N (oss. 3 di $[\mathbf{1}]_1$).

Nel caso in cui $y \notin A(S)$, $ys' \notin A(S)$ perchè $ys' \neq 0$ (Lemma 2) ed $A(S) \cap S = \{0\}$. Possiamo quindi applicare la (1), per $x = ys'$ ed $s = s'y$, ottenendo $(ys')(s'y) = s'y$; ancora la (1), per $x = y$ ed $s = s'y$, dà $y(s'y) = s'y$. Per confronto abbiamo $(ys')\cdot(s'y) = (ys')\cdot y$, da cui $ys'(s'y - y) = 0$; ne segue $s'y - y \in A(S)$ (Lemma 2).

Teorema 1. *Sia N uno stem ed S un ideale a prodotti banali di $[N; \cdot]$; allora $N/A(S)$ è uno stem a prodotti banali.*

Incominciamo con l'osservare che $A(S)$ è un ideale di N (per la oss. 3 di $[\mathbf{1}]_1$), e che N è zero-simmetrico (per l'oss. 1 di $[\mathbf{1}]_1$).

Consideriamo lo stem $\bar{N} = N/A(S)$; posto $\bar{s} = s + A(S)$ per $s \in S^*$, $\bar{z} = z + A(S)$ ed $\bar{y} = y + A(S)$, *si ha anzitutto che*:

(a) *se* $\bar{s}\bar{z} = A(S)$, *allora* $\bar{z} = A(S)$,

(b) $\overline{sy} = \bar{y}$.

Dimostriamo la (a). Se $\bar{s}\bar{z} = A(S)$ e poichè $\bar{s} \neq A(S)$ è, $\forall s' \in S$, $szs' = 0$. Se $zs' \neq 0$ allora $s \in A(S)$ (Lemma 2) contro la $s \in S^*$. Dunque $zs' = 0$ e perciò $z \in A(S)$ e $\bar{z} = A(S)$.

Per dimostrare la (b) osserviamo che per la (2) del Lemma 3 applicata ad s ed y, risulta $sy - y \in A(S)$ e dunque $\bar{s}\bar{y} = \bar{y}$.

Veniamo ora alla dimostrazione del Teorema.

Conservando le posizioni precedenti, consideriamo $\bar{x} = x + A(S) \neq A(S)$; per la (b) risulta $(\bar{s}\bar{x})\bar{y} = \bar{y} = \bar{s}\bar{y}$ (perchè $\bar{s}\bar{x} \neq A(S)$ grazie alla (a)). Dunque $\bar{s}(\bar{x}\bar{y} - \bar{y}) = A(S)$, da cui, per la (a), $\bar{x}\bar{y} - \bar{y} = A(S)$ e cioè $\bar{x}\bar{y} = \bar{y}$.

Sia invece $\bar{x} = A(S)$, è banalmente $\bar{x}\bar{y} = \bar{x}$ perchè N è zero-simmetrico.

Con questo l'enunciato è dimostrato.

Il Teorema 1 è parzialmente invertibile nel

Teorema 2. *Siano N uno stem, I un suo ideale tale che N/I sia a prodotti banali. Sia $A_s^*(I) \neq \emptyset$: allora N è zero-simmetrico ed $A_s(I)$ è un ideale di $[N; \cdot]$ distributivo a destra* (1). *Se inoltre $A_s(I) \cap I = \{0\}$, allora $A_s(I)$ è un semigruppo distributivo, privo di divisori dello zero e contenuto in $A_d(I)$. Se ancora $A_s(I) = A_d(I)$, allora $A_s(I)$ è un ideale di N a prodotti banali.*

Dimostriamo che N è zero-simmetrico: intanto I è un ideale di $[N; \cdot]$ perchè, essendo N/I a prodotti banali, risulta $IN \subseteq I$ (mentre $NI \subseteq I$ perchè I è un ideale di N).

Inoltre se $x \in A_s^*(I)$, cioè se $xI = \{0\}$ è anche $xNI = \{0\}$, da cui $x \cdot 0 \cdot I = 0 \cdot I = 0$: ne segue N zero-simmetrico perchè I risulta un ideale con zero del semigruppo $[N; \cdot]$ (oss. 1 di $[\mathbf{1}]_1$).

Ora $A_s(I)$ *è un ideale di* $[N; \cdot]$ perchè $(N \cdot A_s(I)) \cdot I = N \cdot (A_s(I) \cdot I) = N \cdot 0 = 0$ ed $(A_s(I) \cdot N) \cdot I = A_s(I) \cdot (N \cdot I) = 0$.

Per mostrare che $A_s(I)$ è un semigruppo distributivo a destra *cominciamo col mostrare che*

(I) per $a_1 \notin I$ e $b_1 \in N$ allora $a_1 b_1 - b_1 \in I$;

(II) per $a, b \in N$, $ab \in I$ se e solo se $a \in I$ oppure $b \in I$;

(III) per $c, d, e \in A_s(I)$, allora $cde = 0$ se $d \in I$ oppure $e \in I$;

(IV) per $r, s, t \in A_s(I)$, allora $rst = rt$ se $s, t \notin I$.

(I) Poichè N/I è a prodotti banali, allora, posto $\bar{a}_1 = a_1 + I$ e $\bar{b}_1 = b_1 + I$, risulta $\bar{a}_1 \bar{b}_1 = \bar{b}_1$ e dunque $a_1 b_1 - b_1 \in I$.

(II) Sia $a \cdot b \in I$ ed $a \notin I$; per la (I) risulta $ab - b \in I$ e dunque $b \in I$. L'inverso è ovvio.

(III) Siano $c, d, e \in A_s(I)$ con $d \in I$ oppure $e \in I$; allora $de \in I$ e dunque $cde = 0$.

(IV) Siano $r, s, t \in A_s(I)$ con $s, t \notin I$; allora, per la (I), $st - t \in I$ e dunque $r(st - t) = 0$, da cui $rst = rt$.

Possiamo ora dimostrare che $A_s(I)$ è distributivo a destra.

---

(1) Un semigruppo S si dice *distributivo a destra* se, $\forall x, y, z \in S$, risulta $xyz = xzyz$, *distributivo a sinistra* se $xyz = xyxz$ e *distributivo* se è distributivo a destra e a sinistra. Cfr., per esempio, $[\mathbf{1}]_3$ oppure $[\mathbf{3}]$.

Siano infatti $x, y, z \in A_s(I)$ e sia $xyz = 0$; si hanno ora due casi. Se y oppure z appartengono ad I è $zy \in I$ e dunque, per la (III), $x\cdot(zy)\cdot z = 0$. Se invece $y, z \notin I$ per la (I), risulta $yz - z \in I$, da cui, moltiplicando per x e per xz successivamente, $xyz = xz$ e $xzyz = xz^2$. Ma, per la (I), è anche $z^2 - z \in I$ e, moltiplicando per x, si ha $xz^2 = xz$; da un confronto delle relazioni così ottenute segue $xzyz = xz = xyz = 0$.

Mettiamoci nel caso in cui $x, y, z \in A_s(I)$ ma $xyz \neq 0$; allora, per la (III), $y, z \notin I$ e per la (II), $zy \notin I$; per la (IV) dunque $xyz = xz$ e anche $x(zy)z = xz$: ne segue $xyz = xzyz$.

In ogni caso si ha l'asserto.

Supponiamo ora che sia inoltre $A_s(I) \cap I = \{0\}$; allora

$$I \cdot A_s(I) = A_s(I) \cdot I = \{0\} \qquad \text{e} \qquad A_s(I) \subseteq A_d(I) .$$

Dimostriamo che in tali condizioni $A_s(I)$ *è distributivo.*

Siano $x, y, z \in A_s^*(I)$; $x, y, z \notin I$ e dunque, per la (IV), risulta $xyz = xz$; ma anche $yx \notin I$ (per la (I)) e dunque, sempre per la (IV), $x(yx)z = xz$: ne segue $xyz = xyxz$ ed $A_s(I)$ è distributivo anche a sinistra.

Inoltre $A_s(I)$ è *privo di divisori dello zero*, perchè, se $x, y \in A_s(I)$ ed $xy = 0$ allora, per la (I), $x \in I$ o $y \in I$: dalla $A_s(I) \cap I = 0$, segue l'asserto.

Sia ora inoltre $A_s(I) = A_d(I)$; allora $A_s(I)$ è un ideale di N perchè annullatore destro dell'ideale I di $[N; \cdot]$.

Applichiamo il teorema 6 di [**1**]$_3$ ad $A_s(I) = A(I)$; ricordato che ora $A_s(I)$ risulta uno stem distributivo e privo di annullatori diversi da $\{0\}$, si ottiene che gli elementi non nulli di $A_s(I)$ sono unità sinistre, il che completa la dimostrazione del teorema.

Completiamo il numero con la

Osservazione 1. *Sia N uno stem e sia S un ideale con unità di $[N; \cdot]$; allora $N/A_d(S)$ è uno stem con unità.*

L'enunciato ha senso perchè $A_d(S)$ è un ideale di N, essendo S un ideale di $[N; \cdot]$. Detta u l'unità di S, poniamo $\bar{u} = u + A_d(S)$, e, per $x \in N$, $\bar{x} = x + A_d(S)$; poichè $ux - x \in A_d(S)$ ed $xu - x \in A_d(S)$, si ha subito $\bar{u}\bar{x} = \bar{x}\bar{u} = \bar{x}$, da cui l'asserto.

2. – Consideriamo ora il caso in cui il sottostem $\langle S \rangle$ di N generato da un ideale S di $[N; \cdot]$ sia uno stem primo o semiprimo (cfr. [4]).

Teorema 3. *Sia N uno stem e sia $\langle S \rangle$ il sottostem di N generato da un ideale S di $[N; \cdot]$; se $\langle S \rangle$ è primo (semiprimo) e $A_d(S) \cap \langle S \rangle = \{0\}$, allora $N/A_d(S)$ è primo (semiprimo).*

Premettiamo alla dimostrazione alcune considerazioni. Sia $\langle S\rangle$ uno stem primo e siano I_1, I_2 ideali di N tali che $I_1\cdot I_2=\{0\}$; poichè ovviamente $I_1\cap\langle S\rangle$ ed $I_2\cap\langle S\rangle$ sono ideali di $\langle S\rangle$ ed $(I_1\cap\langle S\rangle)\cdot(I_2\cap\langle S\rangle)=\{0\}$; allora $I_1\cap\langle S\rangle=\{0\}$ oppure $I_2\cap\langle S\rangle=\{0\}$. Sia, per esempio, $I_1\cap\langle S\rangle=\{0\}$; poichè $SI_1\subseteq I_1$ ed $SI_1\subseteq S\subseteq\langle S\rangle$, allora $SI_1=\{0\}$ e perciò $I_1\subseteq A_d(S)$.

Veniamo alla dimostrazione del teorema. Siano J_1, J_2 ideali di $N/A_d(S)$ tali che $J_1\cdot J_2=A_d(S)$ e siano J_1', J_2' le controimmagini di J_1, J_2 nell'omomorfismo canonico π di N su $N/A_d(S)$. Ovviamente $\pi(J_1'\cdot J_2')=J_1\cdot J_2=A_d(S)$; ne segue che $J_1'\cdot J_2'\subseteq A_d(S)$ e dunque $(J_1'\cap\langle S\rangle)(J_2'\cap\langle S\rangle)\subseteq A_d(S)\cap\langle S\rangle=\{0\}$.

Per quanto visto sopra allora $J_1'\subseteq A_d(S)$ oppure $J_2'\subseteq A_d(S)$. Se per esempio $J_1'\subseteq A_d(S)$ deve essere $J_1=A_d(S)$ perchè risulta anche $J_1\supseteq A_d(S)$. Il resto è ovvio.

Nel caso in cui $\langle S\rangle$ sia semiprimo si procede in modo del tutto analogo.

Corollario 1. *Sia N uno stem e sia S un ideale di $[N;\cdot]$ tale che $\langle S\rangle$ sia semplice non zero stem; allora $N/A_d(S)$ è primo.*

Dalla semplicità di $\langle S\rangle$ segue $A_d(S)\cap\langle S\rangle=0$. Inoltre (cfr. [4], prop. 2.70) uno stem semplice non zero-stem è primo; dal Teorema 3 si ha subito l'asserto.

Corollario 2. *Sia N uno stem una cui potenza N^k sia uno stem primo (semiprimo); allora $N/A_d(N^{(k)})$: è primo (semiprimo).*

Per il Teorema 3, basta verificare che $J=A_d(N^{(k)})\cap N^k=\{0\}$.

Sia, per assurdo, $J\neq 0$ e siano $j_1,\dots,j_k$, $j_{k+1}\in J$; visto che $j_1\dots j_k\in N^{(k)}$ e $j_{k+1}\in A_d(N^{(k)})$, risulta $j_1\cdot\ldots\cdot j_k\cdot j_{k+1}=0$. Ne segue che $J^{k+1}=\{0\}$ contro il fatto che N^k è primo (cfr. [4], prop. 2.104). Dunque $J=0$.

3. – Dato lo stem N, si usa porre $N_0=\{x\in N\,|\,0x=0\}$ ed $N_d=\{y\in N\,|\,|(t+t')y=ty+t'y,\ \forall t,t'\in N\}$ e chiamare astratto affine uno stem la cui somma sia commutativa e tale che $N_0=N_d$ (cfr. [4]).

Teorema 4. *Sia N uno stem ed S un ideale di $[N;\cdot]$ tale che $\langle S\rangle$ sia astratto affine; allora $\overline{N}=N/A_d(S)$ è abeliano ed $\langle S\rangle_0/A_d(S)\subseteq\overline{N}_d$* (²). *Se inoltre $S_0\neq\{0\}$ ed $A_s(S_0)\cap N^3=\{0\}$, allora $\overline{N}$ è astratto affine.*

Ricordando che $A_d(S)$ è un ideale di N perchè S è un ideale di $[N;\cdot]$; osserviamo che il derivato N' del gruppo additivo di N è contenuto in $A_d(S)$ perchè, per $t\in S$ e per $x,y\in N$, risulta $t(x+y-x-y)=tx+ty-tx-ty=0$ (perchè $SN\subseteq S$ ed $\langle S\rangle$ è abeliano). Questo basta per dire che *$\overline{N}$ è abeliano.*

(²) Poniamo, come spesso si usa, $\langle S\rangle_0/A_d(S)=\{x+A_d(S)\,|\,x\in\langle S\rangle_0\}$.

Per $x \in \langle S \rangle_0$, poniamo $\bar{x} = x + A_d(S)$ e mostriamo che $\bar{x} \in \bar{N}_0$; infatti, visto che per $y \in A_d(S)$, $Syx = 0 \cdot x = 0$, risulta $yx \in A_d(S)$ e dunque $A_d(S) \cdot \bar{x} = A_d(S)$.

Possiamo ora dimostrare che $\langle S \rangle_0 / A_d(S) \subseteq \bar{N}_d$. Siano $t, t' \in N$ e sia $x \in \langle S \rangle_0$; posto $\bar{t} = t + A_d(S)$, $\bar{t}' = t' + A_d(S)$ ed $\bar{x} = x + A_d(S)$ risulta, per $y \in S$ e per il teorema 9.80 di [4] applicato allo stem astratto affine $\langle S \rangle$,

$$y \cdot [(t + t')x - t'x - tx] = (yt + yt')x - yt'x - ytx = D(yt, yt'; x) = - 0x = 0 ,$$

da cui segue $[(t + t')x - t'x - tx] \in A_d(S)$ e dunque $(\bar{t} + \bar{t}')\bar{x} = \bar{t}\bar{x} + \bar{t}'\bar{x}$.

Dimostriamo ora che

(1) *Se* $\bar{z} = z + A_d(S)$ *è un elemento di* $\bar{N}_0$, *allora* $z \in N_0$;

(2) *Se* $\bar{x} = x + A_d(S)$ *con* $x \in S_0$ *e* $\bar{z} = z + A_d(S) \in \bar{N}_0$, *allora* $\bar{z}\bar{x} \in S_0/A_d(S)$.

Per dimostrare la (1) osserviamo che $A_d(S) \cdot z \subseteq A_d(S)$, perchè $\bar{z} \in \bar{N}_0$ e dunque $S \cdot A_d(S) \cdot z = \{0\}$; allora $0 = (S \cdot 0) \cdot z = 0z$.

Per dimostrare la (2) notiamo che $zx \in S_0$ perchè $zx \in S$ ed inoltre zx è zero-simmetrico perchè lo sono sia z che x: dunque $\bar{z}\bar{x} \in S_0/A_d(S)$.

Veniamo ora alla dimostrazione della *seconda parte dell'enunciato*: sia $S_0 \neq \{0\}$ ed $A_s(S) \cap N^3 = \{0\}$.

Posto, per $t, t' \in N$, per $z \in N_0$ e per $x \in S_0$, $\bar{t} = t + A_d(S)$, $\bar{t}' = t' + A_d(S)$, $\bar{z} = z + A_d(S)$ ed $\bar{x} = x + A_d(S)$, risulta $[(\bar{t} + \bar{t}')\bar{z} - \bar{t}'\bar{z} - \bar{t}\bar{z}]\bar{x} = A_d(S)$, ricordando che $\langle S \rangle_0 / A_d(S) \subseteq N_d$ e la (2); di qui $[(t + t') \cdot z - t'z - tz] \cdot x \in A_d(S)$. Per $y \in S$, risulta dunque $y \cdot [(t + t') \cdot z - t'z - tz] \cdot x = 0$ e dunque, poichè $x \in S_0$, $y \cdot [(t + t') \cdot z - t'z - tz] \in A_s(S_0) \cap N^3 = \{0\}$, da cui otteniamo $(t + t') \cdot z - t' \cdot$ $\cdot z - tz \in A_d(S)$. Dunque $(\bar{t} + \bar{t}') \cdot \bar{x} = \bar{t}z + \bar{t}'z$. Si conclude che $\bar{N}_0 \subseteq \bar{N}_d$; l'inclusione opposta è ovvia e di qui l'asserto.

Le considerazioni del teorema sono completate da quanto segue. Se N è uno stem ed S un ideale di $[N; \cdot]$ tale che $\langle S \rangle$ sia astratto affine ed $\langle S \rangle_0 = \{0\}$, allora $\langle S \rangle$ è costante (è cioè, per $y \in \langle S \rangle$, $0y = y$) ed abeliano. Più generalmente:

Osservazione 2. *Sia N uno stem ed S un ideale di elementi costanti* (3) *di* $[N; \cdot]$; *si ha che* $S = N_c$ *e se inoltre* $N_0 = A_d(S)$, *allora* $N/A_d(S)$ *è costante.*

Se infatti $x \in N_c$, per $y \in S$, risulta $yx = x$ ed $yx \in S$, da cui $x \in S$. Ne segue $N_c = S$. Il resto è ovvio tosto che si ricordi che $N = N_0 + N_c$ con $N_0 \cap N_c = \{0\}$ (cfr. [4]).

---

(3) Si abbia cioè che $S \subseteq N_c$ ove $N_c = \{x \in N \mid 0x = x\}$.

Un parziale inverso dell'Osservazione 2 è fornito dal

Teorema 5. *Sia N uno stem e sia I un suo ideale tale che N/I sia costante; se $A_s(I) \neq \emptyset$ allora $I = N_0$ ed $A_s(I)$ è un semigruppo rettangolare* (4) *e distributivo* (5). *Se inoltre $A_s(I)$ è uno stem ed $A_s(I) \cap I = \{0\}$, allora $A_s(I)$ è costante.*

Incominciamo con l'osservare che, per $a, b \in N$, è $ab - b \in I$, perchè N/I è costante e pertanto risulta

$$(1) \qquad cab = cb\,, \qquad \text{per} \qquad c \in A_s(I) \quad \text{ed} \quad a, b \in N\,.$$

Inoltre $I = N_0$: infatti dalla (1), per $a = 0$ e per $b \in I$, segue $c \cdot 0 \cdot b = cb = 0 \cdot b$; ma $cb = 0$ e dunque $0 \cdot I = 0$; se viceversa $t \in N_0$, allora $0t = 0$, ma $0t - t \in I$ e dunque $t \in I$.

D'altronde $A_s(I) = \{x \in N \mid xy = 0y,\ \forall y \in N\}$: infatti se $x \in A_s(I)$, dalla (1) segue, per $c = x$, $a = 0$, $b = y$: $0y = x0y = xy$; viceversa se $x \in N$ ed $xy = 0y$, $\forall y \in N$, allora $xI = 0$, perchè $0I = 0$, ed $x \in A_s(I)$.

Da quest'ultima osservazione segue che in $A_s(I)$ il prodotto di due elementi dipende solo dal secondo fattore e dunque $A_s(I)$ *è rettangolare* (cfr. [**2**]).

Inoltre $A_s(I)$ *è distributivo*: siano infatti $x, y, z \in A_s(I)$: dalla (1) per $c = x$, $a = y$ e $b = z$ segue $xyz = xz$, per $c = x$, $a = yx$, $b = z$ segue $x(yx)z = xz$ e per $c = x$, $a = zy$, $b = z$ segue $xzyz = xz$. Per confronto si ha $xyz = xyxz = xzyz$.

Per dimostrare la *seconda parte del teorema*, osserviamo che se inoltre $A_s(I) \cap I = \{0\}$, allora $A_s(I)$ è privo di divisori dello zero perchè se $x, y \in A_s(I)$ ed $xy = 0$, allora $y \in I$ (perchè $xy - y \in I$). Ne segue (teorema 6 di [**1**]$_3$), che, se $A_s(I)$ è uno stem, esso è costante.

---

(4) Un semigruppo S si dice *rettangolare* quando, $\forall a, b, x, x' \in S$ tali che $ax = bx = ax'$, accade che $bx' = ax'$.

(5) Per la definizione di semigruppo distributivo si veda l'annotazione (1).

Bibliografia

[**1**] C. Ferrero Cotti: $[\bullet]_1$ *Sugli stems il cui semigruppo moltiplicativo possiede un ideale con proprietà commutative deboli,* in corso di stampa; $[\bullet]_2$ *Sugli stems in cui la corrispondenza $xy \to yx$ è una funzione,* Rend. Accad. Sci. Mat. Napoli, **44** (1977), 265-277; $[\bullet]_3$ *Sugli stems il cui prodotto è distributivo rispetto a se stesso,* Riv. Mat. Univ. Parma (3) **1** (1972), 203-220.

[**2**] G. Ferrero, *Sui problemi «tipo Sylow» relativi ai quasi-anelli finiti,* Atti Accad. Sci. Torino **100** (1965-1966), 645-657.

[3] M. PETRICH, *Structure des demi-groups et anneaux distributifs*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A **268** (1969), 849-853.

[4] G. PILZ, *Near-Rings*, North-Holland, New York 1977.

Summary

Let N be a near ring, and T a subset of N. Some cases in with $N/A(T)$ has special algebraic property in common with T are studied. In particular if T is a ideal of $[N; \cdot]$ such that $xy = y$, $\forall x \in T^*$ and $0y = 0$, the same property is satisfied by $N/A(T)$.

If $\langle T \rangle$ is a prime or an abstract affine near-ring satisfying some additional conditions, then $N/A_d(T)$ is respectively, prime or abstract affine.

* * *