Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 277-290

A. Bichara (*)

Caratterizzazione dei sistemi rigati immersi in $A_{3,q}$ (**)

1. - Introduzione.

Sia $A_{3,q}$ uno spazio affine tridimensionale costruito sul campo di Galois di ordine q ($q = p^h$, p primo).

Diremo che la coppia (S, R) è un *sistema rigato* (cfr. $[4]_1$, $[4]_2$) *immerso in* $A_{3,q}$ se R è una famiglia propria e non vuota di rette dello spazio, $S = \bigcup_{r \in R} r$ ed essa soddisfa i seguenti assiomi:

(1) $[P \in S,\ r \in R,\ P \notin r] \Rightarrow [\exists!\, s \in R,\ P \in s / |s \cap r| = 1]$.

(2) *Esiste un punto di S per cui passano almeno tre rette di R.*

(3) *Se P e Q sono due punti distinti giacenti su di una retta di R, esiste un punto T di S congiunto a P e Q da rette non di R.*

Se (S, R) è un sistema rigato immerso in $A_{3,q}$, risulta (cfr. $[4]_1$)

$$q \geqslant 3 . \tag{1.1}$$

Se $P \in S$ con il simbolo F_P indicheremo l'insieme delle rette di R per P. Per quanto provato in $[4]_1$, *se esiste un punto P di S per il quale è $|F_P| = n$, per ogni punto Q di S necessariamente risulta $|F_Q| = n$. Inoltre è*

$$n \geqslant 3 , \tag{1.2}$$

(*) Indirizzo: Piazza Roselle 5, 00179 Roma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 11-I-1978.

$$|R| = n[1 + (q-1)(n-1)]\,, \tag{1.3}$$

$$|S| = q[1 + (q-1)(n-1)]\,. \tag{1.4}$$

Se π è un piano di $A_{3,q}$, risulta $|\pi| = q^2$; in forza della (1.2) è $n \geqslant 3$, onde (cfr. (1.4)) risulta $|S| \geqslant q[1 + 2(q-1)] = 2q^2 - q$; per $q \geqslant 3$ tale ultima espressione è sempre maggiore di $|\pi| = q^2$. Pertanto, *se* (S, R) *è un sistema rigato immerso in* $A_{3,q}$ *risulta* $|S| > q^2$, *onde manifestamente è*

$$\exists P \in S - \pi\,, \qquad \textit{per ogni piano } \pi \textit{ di } A_{3,q}\,. \tag{1.5}$$

Di fatto esistono dei sistemi rigati immersi in $A_{3,q}$. Un esempio è costruito in [**1**] (cfr. anche [**5**]), nel caso q pari, nel seguente modo: sia K un $(q+2)$-arco del piano improprio di $A_{3,q}$ e sia R la famiglia di tutte le rette dello spazio il cui punto improprio appartiene a K; si verifica facilmente che la coppia (S, R), ove $S = \bigcup_{r \in R} r$, è un sistema rigato, ovviamente immerso in $A_{3,q}$, che diremo *associato a* K.

Il seguente altro esempio compare qui per la prima volta: sia π_∞ il piano improprio di uno spazio affine $A_{3,q}$, con q pari o dispari, e sia C un complesso lineare di rette dello spazio proiettivo $S_{3,q}$ in cui l'$A_{3,q}$ è immerso. Le rette di C contenute in π_∞ formano un fascio F di centro un punto P_∞; sia allora D l'insieme delle rette per P_∞ non su π_∞ e sia $R' = (C - F) \cup D$. Privando ogni retta di R' del suo punto improprio si ottiene una famiglia R di rette dello spazio affine. Si verifica facilmente che la coppia (S, R), ove $S = \bigcup_{r \in R} r$, è un sistema rigato immerso in $A_{3,q}$ che diremo *associato al complesso lineare* C.

Il prof. G. Tallini, nel corso del seminario di geometria combinatoria da lui diretto presso l'Università di Roma, ha posto, tra gli altri, il problema della caratterizzazione dei sistemi rigati immersi in uno spazio affine tridimensionale. In questo lavoro ci occuperemo di siffatte strutture e nel n. **2** ne studieremo le prime proprietà per esaminare poi, nel n. **3**, quelle per le quali risulta $n = q + 2$ e, nel n. **4**, il caso residuo, provando infine che

I. *Sia* (S, R) *un sistema rigato immerso in* $A_{3,q}$. *Se è* $q > 3$, (S, R) *è necessariamente associato ad un opportuno complesso lineare di rette dello spazio proiettivo in cui* $A_{3,q}$ *è immerso, oppure* q *è pari ed* (S, R) *è associato ad un opportuno* $(q+2)$*-arco del piano improprio di* $A_{3,q}$. *Se è* $q = 3$, (S, R) *è necessariamente associato ad un opportuno complesso lineare di rette dello spazio proiettivo in cui* $A_{3,3}$ *è immerso, oppure risulta* $n = 3$ *ed* (S, R) *coincide con* $(S_{r,s}, R_{r,s})$ *relativamente a due opportune rette sghembe* r *ed* s *di* $A_{3,3}$ (cfr. prop. XVIII).

2. - Prime proprietà di un sistema rigato immerso in $A_{3,q}$.

Sia (S, R) un sistema rigato immerso in $A_{3,q}$. Al fine di studiarne le prime proprietà proveremo le proposizioni seguenti.

II. *Sia π un piano dello spazio per una retta r di R. Se su π giace una retta s di R, distinta da r e ad essa parallela, le rette di tal piano appartenenti ad R sono esattamente $2q$ ed esse costituiscono due fasci distinti di rette parallele, onde π è tutto contenuto in S e per ogni suo punto passano esattamente due rette di R giacenti su di esso.*

Dimostrazione. Sia $P \in s$. Poichè $r \cap s = \emptyset$ il punto P non appartiene ad r e per l'Assioma 1 esiste una retta $r_P \in R$ per P e secante r in esattamente un punto P'. Poichè P e P' sono manifestamente distinti e contenuti in π, la retta r_P per essi giace su tal piano. La famiglia $\{r_P\}_{P \in S}$ è propria (se fosse $P \neq Q$ ed $r_P = r_Q$ la retta r_P contenendo i punti P e Q coinciderebbe con la retta s e non potrebbe secare la r ad essa parallela); inoltre se $P \neq Q$ le rette r_P ed r_Q sono disgiunte (se fosse $T = r_P \cap r_Q$, per tale punto, non contenuto in s passarebbero le due rette di R, r_P e r_Q distinte e secanti s in un punto; ciò è escluso per l'assioma (1) ed essendo complanari risultano parallele. Ogni retta t di R non parallela ad r e giacente su π sega tale retta in un punto P' e la retta s in un punto P; per l'assioma (1) la retta t coincide con la r_P (altrimenti per il punto P passerebbero le due rette distinte t ed r_P di R entrambi secanti r in un punto), onde le rette di π contenute in R e non parallele ad r costituiscono un fascio di rette parallele. Poichè $q \geqslant 3$ (cfr. (1.1)) esistono due rette r_P ed r_Q di tal fascio tra loro distinte e per quanto appena visto le rette di R non parallele alla retta r_P e giacenti su π costituiscono un fascio di rette parallele cui appartiene la r $(r \cap r_P \neq \emptyset)$. Poichè se $r' \in R$ ed $r' \subset \pi$ risulta $r' \cap r \neq \emptyset$ oppure $r' \cap r_P \neq \emptyset$ si ha l'asserto.

III. *Sia π un piano dello spazio per una retta r di R. Se su π non giace alcuna retta di R parallela ad r, tale piano sega S lungo h rette di R $(h = 1, \ldots, q+1)$ passanti per uno stesso punto.*

Dimostrazione. Se $\pi \cap S = r$, si ha subito l'asserto ed è $h = 1$. Esista allora un punto $P \in (\pi \cap S) - r$; per l'Assioma 1 esiste una retta s di R per P e secante r in esattamente un punto Q; s risulta manifestamente contenuta in π e distinta da r, onde è $\pi \cap S \supseteq r \cup s$, e se vale il segno di uguaglianza l'asserto è nuovamente provato ed è $h = 2$. Sia allora $\pi \cap S - (r \cup s) \neq \emptyset$ e sia P' un punto appartenente a tale insieme; per P' passa una retta t di R, contenuta in π e secante s in un punto ; la retta t è non parallela ad r e contiene il punto

$Q = r \cap s$ (altrimenti per tale punto passerebbero le due rette distinte r ed s, entrambe di R e secanti t in un punto; ciò è escluso dall'assioma (1). Poichè per Q passano al più $q+1$ rette di π, si ha l'asserto.

IV. *Se esiste un piano π dello spazio secante S esattamente lungo una retta r di R, esistono necessariamente due rette s e t di R, tra loro distinte e parallele.*

Dimostrazione. In forza della (1.5) e dell'assioma (1) esistono un punto P di S non su π e dunque non di r ed una e una sola retta r' di R per P secante r in un punto. Siano s ed s' due delle $n-1$ ($\geqslant 2$) rette di $F_P - \{r'\}$ tra loro distinte; esse risultano disgiunte da r e quindi da π (è $\pi \cap S = r$), onde giacciono entrambe sul piano π' per P parallelo a π. Poichè è $q \geqslant 3$ esiste un punto Q di s' distinto da P; con considerazioni analoghe alle precedenti si prova che per Q passano due rette distinte di R su π', una delle quali, e sia essa t, è diversa da s'. In forza dell'assioma (1) la s' è l'unica retta di F_Q secante s; pertanto t ed s sono disgiunte ed essendo complanari risultano parallele, onde l'asserto.

V. *Sia r una retta di R ed $R' = \bigcup_{Q \in r} F_Q - \{r\}$; in tali ipotesi risulta $|R'| = (n-1)q$. Inoltre, se ad R' appartengono due rette distinte s ed s' per uno stesso punto P di r, giacenti su piani distinti per r, esistono necessariamente due rette di R, tra loro distinte e parallele.*

Dimostrazione. Sia N il numero delle coppie del tipo (Q, t), ove $Q \in r$ e $t \in F_Q - \{r\}$. Poichè ogni retta di R' sega r in esattamente un punto e rette distinte individuano coppie distinte, risulta: $N = |R'|$. Per ciascuno dei q punti di r passano esattamente $n-1$ rette di R distinte da r e punti distinti individuano coppie distinte, onde è $N = (n-1)q$; sostituendo il valore di N così ottenuto nella uguaglianza $N = |R'|$, si ha la prima parte dell'asserto.

Sia π il piano per s ed s' (non contenente r); se su π giacciono due rette distinte e parallele di R, l'asserto è dimostrato. Se ciò non accade sia t una retta di R' non per P; essa è necessariamente disgiunta da π (altrimenti, in forza della prop. III, per il punto $T = \pi \cap t$ passerebbe una retta t' di R per P ed F_T conterrebbe le due rette distinte t e t' entrambe secanti la r e ciò è escluso dall'assioma (1), onde le rette di R' non per P risultano tutte parallele al piano π e due di esse per uno stesso punto $Q (\neq P)$ di r giacciono sul piano π' per Q parallelo a π e su piani distinti per r. Con considerazioni analoghe alle precedenti si prova che π' contiene due rette di R tra loro distinte e parallele oppure le rette di $F_P - \{r\}$ giacciono tutte su π e in tal caso R' è costituito da $(n-1)q$ rette tutte parallele al piano π non per r; deve allora esistere un piano τ per r contenente almeno due rette distinte di R' (altrimenti per ciascuno dei $q+1$ piani per r passerebbe al più una di tali rette e risulterebbe $q+1 \geqslant |R'| = (n-1)q$, onde $1 \geqslant (n-2)q$ e ciò è escluso dalle (1.1) e (1.2)) le quali risultano manifestamente parallele, onde l'asserto.

VI. *Se (S, R) è un sistema rigato immerso in $A_{3,q}$ esistono necessariamente due rette di R tra loro distinte e parallele.*

Dimostrazione. Sia $r \in R$. Se esiste un punto P di r per il quale passano due rette di R' giacenti su piani distinti per r, per la prop. V si ha l'asserto.

Se le rette di F_P, per ogni P di r, giacciano tutte su di uno stesso piano τ_P per r, su ciascuno degli x $(\leqslant q+1)$ piani per r contenenti rette di R' giacciono almeno $n-1$, due a due distinte, di tali rette. Poichè piani distinti per r contengono sottoinsiemi disgiunti di R', risulta: $|R'| \geqslant (n-1)x$; sostituendo in tale disuguaglianza il valore di $|R'|$ (cfr. prop. V) si ottiene: $(n-1)q \geqslant$ $\geqslant (n-1)x$, onde $q \geqslant x$; uno almeno tra i $q+1$ piani per r non contiene alcuna retta di R' e dunque, manifestamente, nessun punto di S non in r, onde, per la prop. IV, l'asserto.

VII. *Siano r ed s due rette distinte e parallele di R e sia P un punto di S non giacente sul piano π per esse (certamente esistente per la (1.5)). In tali ipotesi esistono esattamente q rette di R per P secanti π, onde è $n = |F_P| \geqslant q$. Inoltre risulta $n > q$ se, e solo se, esiste una retta di R disgiunta da π.*

Dimostrazione. Per la prop. II, la famiglia $\{r_i\}_{i=1,\dots,q}$ delle q rette di π parallele ad r è tutta contenuta in R. Poichè evidentemente è $P \notin r_i$ $(\forall i = 1, \dots, q)$, in forza dell'assioma (1) esiste una e una sola retta $s_i \in R$ per P secante la r_i. La famiglia $\{s_i\}_{i=1,\dots,q}$ così costruita è manifestamente propria, onde esistono q rette di F_P secanti π. Sia ora t una retta di R per P secante π in un punto T; per T passa una e una sola parallela ad r e sia essa r_i; poichè la retta di F_P secante la r_i è unica risulta $t = s_i$. Poichè le rette di R per P secanti π sono tutte e sole quelle della famiglia propria $\{s_i\}_{i=1,\dots,q}$, si ha la prima parte dell'asserto.

Se risulta $n > q$, poichè è $n = |F_P|$, per quanto appena visto, esistono $n - q \geqslant 1$ rette di R per P disgiunte da π; se $r \in R$ ed è $r \cap \pi = \emptyset$, per ogni punto Q di r passano esattamente q rette secanti π ed una almeno da esso disgiunta, onde è $n = |F_Q| \geqslant q+1$ e quindi l'asserto.

VIII. *Se (S, R) è un sistema rigato immerso in $A_{3,q}$ ed è $n = q$, risulta $q = 3$.*

Dimostrazione. Per la prop. VI esistono due rette r ed r' di R, tra loro distinte e parallele e sia π il piano per esse; se $r = \{P_i\}_{i=1,\dots,q}$, per P_i ($\forall i = 1, \dots, q$) passano (cfr. Prop. II) esattamente due rette di R su π, onde esistono $q - 2$ (> 0, cfr. (1.1)) rette di R per P_i non su π e sia r_i una di esse. Il piano π_i per r ed r_i è distinto da π e non contiene alcuna retta di R, parallela ad r e da questa distinta, poichè una siffatta retta risulterebbe disgiunta da π ed essendo $n = q$ ciò non può accadere in forza della prop. VII. Per la prop. III, π_i sega S lungo h rette di R per P_i (ed è $h \geqslant 2$ poichè $r \neq r_i$). Consideriamo la famiglia di piani $\{\pi_i\}_{i=1,\dots,q}$ così costruita: se fosse $\pi_i = \pi_j$ con $i \neq j$, ogni retta di R su tal piano passerebbe, per quanto appena visto, per i due punti distinti P_i e P_j e coinciderebbe con r; ciò non può accadere poichè è $r_i \subset \pi_i$ ed è $r_i \neq r$, onde la famiglia è propria. Se $i \neq j$ le $q - 2$ rette di R per P_i, non giacenti su π, segano tutte r in P_i e non contengono P_j; esse non possono dunque giacere su π_j ($j \neq i$) e sono tutte contenute nel piano π_i per r ed r_i. Su π giace una retta s di R per P_i, distinta da r; con considerazioni analoghe alle precedenti si prova che le $q - 2$ rette di R per P_i non su π giacciono tutte sul piano π_j per s ed r_i. Poichè è $\pi_i \cap \pi' = r_i$, risulta $F_{P_i} = \{r, s, r_i\}$ da cui $n = |F_{P_i}| = 3$, onde l'asserto.

IX. *Se* (S, R) *è un sistema rigato immerso in* $A_{3,q}$ *risulta necessariamente* $S = A_{3,q}$ *ed* $n = q + 2$, *oppure è* $n = q = 3$.

Dimostrazione. Sia $n > q$; per le prop. VI e VII, R contiene due rette distinte e parallele ed una retta s disgiunta con il piano π per esse. Sia π' il piano per s parallelo a π e sia P un punto di π; tra le rette di F_P esattamente due giacciono su π (cfr. prop. II) ed esattamente una, non giacente su tal piano, sega s in un punto (cfr. assioma (1); poichè è $|F_P| = n > q \geqslant 3$ (cfr. (1.1)), risulta $|F_P| \geqslant 4$, onde esiste necessariamente una rettta di F_P, non su π e disgiunta da s e pertanto secante π' in un punto Q non di s. In forza dell'assioma (1) deve esistere una retta t di R, per Q e secante s in un punto T. La retta t è manifestamente distinta da s e giacente su π', onde tale retta risulta disgiunta da π. Per il punto T passano allora almeno due rette distinte di R parallele al piano π ($s \cap t = T$); poichè per tale punto passano esattamente q rette secanti π in un punto, ciascuna delle quali sega una e una sola delle q rette di R parallele ad r e giacenti su π (cfr. prop. VII), risulta $n = |F_T| \geqslant q + 2$, onde

$$n > q \Rightarrow n \geqslant q + 2 . \tag{2.1}$$

Poichè è $S \subset A_{3,q}$, risulta $|S| \leqslant |A_{3,q}|$ ed essendo $|A_{3,q}| = q^3$ e per la (1.4) si ha $q[1 + (n - 1)(q - 1)] \leqslant q^3$, onde $n \leqslant q + 2$, valendo il segno di uguaglianza se, e solo se, $S = A_{3,q}$; dalla (2.1) si deduce allora

$$n > q \Rightarrow n = q + 2\,, \qquad S = A_{3,q}\,. \tag{2.2}$$

Se è $n \leqslant q$ dalle prop. VI, VII e VIII si deduce $n = 3$ e $q = 3$; per la (2.2) si ha l'asserto.

3. - Il caso $n = q + 2$.

In questo numero studieremo i sistemi rigati immersi in $A_{3,q}$ con $n = q + 2$; in tal caso risulta (cfr. prop. IX): $S = A_{3,q}$.

Sia $r \in R$; diremo che *la direzione di r è tutta contenuta in R* se ciascuna delle q^2 rette dello spazio parallele ad r appartiene ad R, ovvero se per ogni punto dello spazio passa una (e una sola) retta di R parallela ad r. In proposito proveremo che

X. *Per ogni retta r di R passa almeno un piano π_r dello spazio contenente esattamente q rette di R, due a due distinte e parallele ad r. Se esiste una retta r' di R, parallela ad r e non giacente su π_r, la direzione di r è tutta contenuta in R, onde le rette di R parallele a r sono esattamente q ovvero q^2.*

Dimostrazione. Sia τ un piano per r. Se τ contiene una retta di R, distinta da r e ad essa parallela, per la prop. II, posto $\tau = \pi_r$ si ha la prima parte dell'asserto; se ciò non accade, in forza della prop. III e poichè τ è tutto contenuto in S (è $S = A_{3,q}$), tale piano sega S lungo $q + 1$ rette di R passanti per uno stesso punto P. Poichè è $n = q + 2$ esiste una e una sola retta s di R per P, non contenuta in τ; il piano π_r per r ed s è ovviamente distinto da τ, tutto contenuto in S e su di esso giacciono esattamente due rette distinte di R per P. Tale piano deve allora contenere una retta parallela ad r; altrimenti, per la prop. II, esso segherebbe S lungo $q + 1$ rette di R per P, q delle quali non giacenti su τ e risulterebbe $|F_P| \geqslant 2q + 1$ e ciò è assurdo poichè $|F_P| = n = q + 2 < 2q + 1$ (è $q \geqslant 3$); per la prop. II su π_r giacciono q rette di R, due a due distinte e parallele ad r, onde la prima parte dell'asserto.

Sia ora π' il piano per r' e parallelo a π_r. Se t è una retta dello spazio non giacente su π' e parallela ad r, sia α il piano per essa ed r'; α sega π lungo una retta t' parallela ad r' ($r' \cap \pi = \emptyset$) e quindi ad r; per la prima parte dell'asserto è $t' \in R$ e quindi sul piano α giacciono le due rette r' e t' di R, che risultano manifestamente distinte e parallele. Per la prop. II è allora $t \in R$. Se t è una retta parallela ad r e contenuta in π', sul piano α per t ed r giacciono $q - 1$ rette diverse da t e parallele ad r, ciascuna delle quali non giace su π' e, per quanto appena visto, è contenuta in R; per la prop. II risulta $t \in R$, onde l'asserto.

XI. *Esiste almeno una retta di R la cui direzione è tutta contenuta in R.*

Dimostrazione. Sia N il numero delle coppie di tipo

$$(r, d)\,, \quad \text{ove } r \in R \text{ e } d \text{ è la sua direzione}\,. \tag{3.1}$$

Poichè $n = q + 2$ e per la (1.3) le rette di R sono esattamente $(q+2)q^2$ e ciascuna di esse individua una e una sola coppia di tipo (3.1); rette distinte individuano coppie distinte, onde è

$$N = (q+2)q^2\,. \tag{3.2}$$

Per la prop. X le direzioni delle rette di R individuano ciascuna q ovvero q^2 coppie; se ciascuna di esse individuasse esattamente q coppie, essendo tali direzioni in numero non superiore a $q^2 + q + 1$ (poichè le direzioni delle rette di $A_{3,q}$ sono $q^2 + q + 1$), risulterebbe $N \leqslant (q^2 + q + 1)q$; sostituendo in tale disuguaglianza il valore di N dato dalla (3.2) si otterrebbe $q^2 + 2q \leqslant q^2 + q + 1$ e ciò è impossibile poichè $q \geqslant 3$. Deve allora esistere almeno una direzione individuante q^2 coppie e dunque tutta contenuta in R, onde l'asserto.

XII. *Se esistono due rette r ed s di R, tra loro non parallele, le cui direzioni sono tutte contenute in R, la direzione di ogni retta t di R è tutta contenuta in R.*

Dimostrazione. Se t è parallela ad r o ad s l'asserto è ovvio. Sia t non parallela nè ad r nè ad s e sia P un suo punto. Per P passa una retta parallela ad r e sia essa r'; il piano π per t ed r' contiene q rette di R parallele ad r, poichè la direzione di tale retta è tutta contenuta in R; per la prop. II, π contiene esattamente q rette di R parallele a t. Sia s' la retta per P parallela ad s e π' il piano per essa e t. Poichè la direzione di s è tutta contenuta in R, sul piano π' giacciono q rette di R parallele ad s e, per la prop. II, q rette di R parallele a t, $q-1$ delle quali non giacciono sul piano π; per la prop. X si ha l'asserto.

XIII. *Le rette di R si ripartiscono necessariamente in esattamente $q^2 + q + 1$ direzioni, due a due distinte, una, e una soltanto delle quali è tutta contenuta in R, oppure in esattamente $q + 2$ direzioni, due a due distinte, ciascuna delle quali è tutta contenuta in R.*

Dimostrazione. Sia x il numero delle direzioni in cui si ripartiscono le rette di R. Per la prop. XI esiste almeno una direzione tutta contenuta in R ed essa individua esattamente q^2 coppie di tipo (3.1). Se la direzione tutta contenuta in R è unica, le restanti $x-1$ individuano ciascuna esattamente q coppie del tipo suddetto (cfr. prop. X) e risulta $N = q^2 + (x-1)q$. Per la (3.2) è allora $(q+2)q^2 = q^2 + (x-1)q$, onde $x = q^2 + q + 1$. Se esistono due direzioni distinte e tutte contenute in R, per la prop. XII, ciascuna delle x direzioni in cui si ripartiscono le rette di R è tutta contenuta in R ed individua esattamente q^2 coppie del tipo (3.1), onde è $N = xq^2$; dalla (3.2) si deduce $xq^2 = (q+2)q^2$, onde l'asserto.

XIV. *Sia (S, R) un sistema rigato immerso in $A_{3,q}$ per il quale risulta $n = q + 2$ e tale che le rette di R si ripartiscono in $q^2 + q + 1$ direzioni, due a due distinte. In tali ipotesi risulta individuato il punto improprio P_∞, comune a tutte le rette dell'unica direzione tutta contenuta in R e un piano π di $A_{3,q}$ contiene due rette distinte e parallele di R se, e solo se, ammette P_∞ quale suo punto improprio.*

Dimostrazione. Se π ammette P_∞ quale suo punto improprio, esso contiene q rette il cui punto improprio è P_∞ e quindi tra loro parallele e contenute in R. Se π contiene due rette r ed s di R, distinte e parallele, sia Q_∞ il loro punto improprio. Se è $Q_\infty = P_\infty$ si ha subito l'asserto. Se è $Q_\infty \neq P_\infty$ sia π' il piano per r avente P_∞ quale punto improprio; su tal piano giacciono due rette parallele di R (per quanto appena visto) e per la prop. II esso contiene q rette di R parallele ad r; poichè le rette di R, parallele ad r sono esattamente in numero di q, la retta s giace su π' e pertanto $\pi = \pi'$, onde l'asserto.

XV. *Nelle ipotesi della proposizione precedente, sia π un piano dello spazio per una retta r di R. Se P_∞ non è punto improprio di π, tale piano sega S lungo $q + 1$ rette di R, formanti fascio, ciascuna delle quali ha un punto improprio diverso da P_∞. Se P_∞ è punto improprio di π, tale piano contiene un fascio di rette parallele di R, il cui punto improprio è diverso da P_∞.*

Dimostrazione. Se P_∞ non è punto improprio di π, su tal piano non giace alcuna retta di R, diversa da r e a questa parallela; poichè è $S = A_{3,q}$ il piano è tutto contenuto in S e per la prop. III esso sega S lungo $q + 1$ rette di R formanti fascio. Se P_∞ è punto improprio di π, per le prop. XIV e II, su tal piano giacciono due fasci distinti di rette parallele di R, uno dei quali non ammette P_∞ quale suo punto improprio, onde l'asserto.

XVI. *Nelle ipotesi della prop. XIV, detto π_∞ il piano improprio di $A_{3,q}$,* *sia R' l'insieme delle rette (dello spazio proiettivo $S_{3,q} = A_{3,q} + \pi_\infty$), ottenuto aggregando ad ogni retta di R il suo punto improprio; se D è la famiglia costituita dalle q^2 rette di R' per P_∞* (cfr. prop. XIV) *ed F è il fascio delle $q+1$ rette di π_∞ per P_∞, risulta individuato l'insieme $C = (R' - D) \cup F$. Tale famiglia è un complesso lineare di rette di $S_{3,q}$ ed (S, R) è il sistema rigato immerso in $A_{3,q}$ associato ad esso.*

Dimostrazione. Poichè è $n = q + 2$, per la (1.3) risulta $|R'| = |R| = (q+2)q^2$ ed essendo manifestamente $(R' - D) \cap F = \emptyset$, si ha

$$(3.3) \qquad |C| = (q+2)q^2 - q^2 + q + 1 = q^3 + q^2 + q + 1 .$$

Sia $P \in S_{3,q}$. Se $P = P_\infty$ per esso passano tutte e sole le $q+1$ rette di C che appartengono ad F; se $P \in \pi_\infty$ e $P \neq P_\infty$ per esso passano esattamente q rette di R' non in D e una e una sola retta di F che lo congiunge a P_∞, onde per P passano esattamente $q+1$ rette di C; se $P \in A_{3,q}$ per esso passano esattamente $q+2$ rette di R' di cui una e una soltanto giace in D, onde (tenuto conto della (1.1)) risulta

(3.4) *Per ogni punto P di $S_{3,q}$ passano esattamente $q+1 > 3$ rette di C.*

$$(3.5) \qquad S_{3,q} = \bigcup_{r \in C} r .$$

In forza della (3.3) e della (3.4), poichè per $q \geq 3$ è $q^3 + q^2 + q + 1 > q + 1$, risulta che

(3.6) *le rette di C non passano tutte per uno stesso punto.*

Sia π un piano dello spazio per una retta $r \in C$. Se $\pi = \pi_\infty$, su tal piano non giace alcuna retta di R' ed esso contiene le $q+1$ rette di F. Se π è un piano per P_∞ diverso da π_∞, in forza della prop. XV su di esso giacciono esattamente q rette di $R' - D$ per uno stesso punto Q_∞ di π_∞ diverso da P_∞, poichè la retta per P_∞ e Q_∞ è l'unica retta di F su π, tale piano contiene esattamente $q+1$ rette di C formanti fascio. Se $P_\infty \notin \pi$ tale piano non contiene alcuna retta di F e per la prop. XV su di esso giacciono esattamente $q+1$ rette di $R' - D$ formanti fascio. Su ogni piano dello spazio, per una retta di C, giacciono allora esattamente $q+1$ rette di C formanti fascio.

Sia $P \in S_{3,q}$ ed $r \in C$ con $P \notin r$. Se esiste una retta di C per P secante r, essa giace sul piano π per r e P; poichè tale piano, per quanto appena visto, contiene esattamente $q+1$ rette di C per uno stesso punto Q risulta $Q \in r$ e quindi

$P \neq Q$; la retta s per P e Q è manifestamente l'unica retta di C per P su π ed essa sega r in Q, onde è

$$[P \in S_{3,q},\ r \in C,\ P \notin r] \Rightarrow [\exists !\, s \in C,\ P \in s,\ |r \cap s| = 1]. \tag{3.7}$$

In forza delle (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7) la coppia $(S_{3,q}, C)$ è un sistema rigato (cfr. [3]) immerso in $S_{3,q}$ e per la (3.4) e quanto provato in [3] la famiglia C è un complesso lineare di rette di tale spazio. Poichè evidentemente risulta $R' = (C - F) \cup D$ ed R è la famiglia di rette di $A_{3,q}$ che si ottiene privando ogni retta di R' del suo punto improprio si ha l'asserto.

XVII. *Sia (S, R) un sistema rigato immerso in $A_{3,q}$ per il quale risulta $n = q + 2$. Se (S, R) non è associato ad alcun complesso lineare dello spazio proiettivo in cui $A_{3,q}$ è immerso esiste necessariamente un $(q+2)$-arco K del piano improprio π_∞ di $A_{3,q}$ (onde q è pari) ed (S, R) è il sistema rigato associato a K.*

Dimostrazione. In forza delle prop. XIII e XVI le rette di R si ripartiscono necessariamente in $q + 2$ direzioni, due a due distinte, ciascuna delle quali è tutta contenuta in R. Sia K l'insieme dei punti impropri di tali rette; è ovviamente $|K| = q + 2$. Sia r una retta secante K in tre punti, due a due distinti P, Q e T. Se π è uno dei q piani di $A_{3,q}$ aventi r quale retta impropria su di esso giacciono tre fasci di rette parallele di centri impropri P, Q e T; essi sono due a due distinti e contenuti in R. La prop. II esclude che ciò accada onde ogni retta di π_∞ sega K in al più due punti e K è un $(q+2)$-arco di π_∞. Poichè le rette di R sono tutte e sole quelle di $A_{3,q}$ aventi il punto improprio in K si ha l'asserto.

4. - Il caso $n \neq q + 2$.

In questo numero studieremo i sistemi rigati immersi in $A_{3,q}$ con $n \neq q + 2$. In forza della prop. IX, in tal caso necessariamente risulta

$$n = q = 3\,. \tag{4.1}$$

Siano r ed s due rette sghembe di $A_{3,3}$; poichè $q = 3$, esiste ed è unico il piano π dello spazio parallelo ad r ed s e da esse disgiunto. Su π esistono esattamente tre rette parallele ad r e tre rette parallele ad s e l'insieme delle restanti sei rette di tal piano è costituito da due fasci distinti F_1 ed F_2 di rette parallele. Denotiamo con $R_{r,s}$ l'insieme costituito da $F_1 \cup F_2$ e dalle nove rette congiungenti un punto di r ad un punto di s; posto $S_{r,s} = r \cup s \cup \pi$, una verifica diretta mostra che

XVIII. *Se r ed s sono due rette sghembe di $A_{3,3}$, la coppia $(S_{r,s}, R_{r,s})$ è un sistema rigato, immerso in $A_{3,3}$, con $n = 3$.*

Ci proponiamo di provare che ogni sistema rigato immerso in $A_{3,3}$, con $n = 3$, coincide con $(S_{r,s}, R_{r,s})$ relativamente a due opportune rette sghembe r ed s dello spazio; all'uopo proveremo che

XIX. *Sia (S, R) un sistema rigato immerso in $A_{3,3}$, con $n = 3$. In tali ipotesi, se π è un piano per due rette di R tra loro distinte e parallele e P è un punto di S non su π, le rette di F_P giacciono tutte su di un medesimo piano τ_P che sega π lungo una retta non di R.*

Dimostrazione. In forza della prop. II, π è tutto contenuto in S e le rette di R su di esso sono tutte e sole quelle appartenenti a due fasci distinti di rette parallele. Poichè è $n = 3$ esistono esattamente tre rette di R per P e siano esse r, r' ed r''; ciascuna di esse (in forza della prop. VII, della (4.1) e poichè $P \notin \pi$) sega π in un punto. Sia $Q = r \cap \pi$; su π giacciano esattamente due rette s ed s' di R per Q (cfr. prop. II). Il punto $Q' = r' \cap \pi$ non giace nè su s nè su s' (altrimenti per P passerebbero le due rette r ed r' entrambe di R e secanti una stessa retta di R non per P e ciò è escluso dall'assioma (1). Per Q', su π, passano due rette t e t' parallele rispettivamente ad s ed s', entrambe di R; il punto $Q'' = r'' \cap \pi$ di π, non appartiene a nessuna tra le rette s, s', t e t', onde è

$$Q'' \in \pi - (s \cup s' \cup t \cup t') . \tag{4.2}$$

Poichè è $q = 3$ risulta $|\pi| = q^2 = 9$; inoltre si vede facilmente che l'unione delle rette s, s', t e t' contiene esattamente otto punti, onde l'insieme $\pi - (s \cup s' \cup t \cup t')$ possiede un unico punto e in forza della (4.2) risulta

$$Q'' = \pi - (s \cup s' \cup t \cup t') . \tag{4.3}$$

La retta u per Q e Q' è ovviamente distinta da s, s', t e t', onde non contiene alcun punto di $s \cup s' \cup t \cup t'$ che sia distinto da Q e Q'; tale retta deve allora contenere un punto di $\pi - (s \cup s' \cup t \cup t')$ (poichè $q = 3$ e u giace su π contenendo i due punti distinti Q e Q' di tal piano), onde, per la (4.3), la retta u per Q e Q' contiene Q'' e il piano τ_P che la congiunge a P contiene ovviamente le tre rette r, r' ed r'' di F_P. Se u appartenesse ad R essa sarebbe secata in un punto da ciascuna dalle tre rette, due a due distinte, di R per il punto P non di u e ciò è escluso dall'assioma (1), onde $u \notin R$ ed essendo $u = \pi \cap \tau_P$ si ha l'asserto.

XX. *Ogni sistema rigato* (S, R) *immerso in* $A_{3,3}$, *con* $n = 3$, *coincide con* $(S_{r,s}, R_{r,s})$ *relativamente a due opportune rette sghembe* r *ed* s *dello spazio.*

Dimostrazione. In forza delle prop. VI e II esistono due rette di R tra loro distinte e parallele ed il piano π per esse è tutto contenuto in S. Sia $P \in \pi$; per la Prop. II esistono esattamente due rette di R su π per P ed essendo $|F_P| = n = 3$ esiste ed è unica la retta t di F_P non su π; su t giacciono due punti distinti P' e P'' di $S - \pi$ (e $q = 3$). Le tre rette di $F_{P'}$ (cfr. prop. VII) sono tutte non parallele a π e segano il piano π' per P'', parallelo a π, in tre punti di S, ovviamente due a due distinti e (cfr. prop. XIX) tutti contenuti nella retta $r = \pi' \cap \tau_{P'}$, onde è $r \supseteq F_{P'} \cap \pi'$; poichè è $|r| = |F_{P'} \cap \pi'| = 3$ risulta $r = F_{P'} \cap \pi'$.

La retta r, tutta contenuta in S, contiene P'' ($P'' \in t$, $t \in F_{P'}$, $P'' \in \pi'$) e non appartiene ad R poichè le tre rette di R per P' (non di r) la segano tutte in un punto e per l'assioma (1); essa è inoltre non parallela ad ogni retta r'' di R su π, altrimenti la retta $r' = \tau_{P'} \cap \pi$, manifestamente parallela ad r, risulterebbe parallela ad r'' e (cfr. prop. II) contenuta in R e ciò è escluso dalla prop. XIX.

Analogamente si prova che le rette di $F_{P''}$ segano il piano per P' parallelo a π lungo una retta s per P', non di R e tutta contenuta in S, che risulta non parallela ad ogni retta di R su π. Le rette r ed s risultano sghembe in quanto un piano τ per esse, supposto esistente, contenendo r, s, P' e P'' coinciderebbe con τ_P e con $\tau_{P''}$ e conterrebbe tre rette di R per P' e tre rette di R per P''; per le prop. II e III ciò non può accadere.

Le rette r ed s sono entrambe disgiunte da π ed essendo sghembe e contenute in s la loro unione è costituita da sei punti di $S - \pi$ e coincide con tale insieme se, e solo se, risulta $|S - \pi| = 6$; dalle (1.4) e (4.1) si ha $|S| = 15$ e $|\pi| = q^2 = 9$, onde $|S - \pi| = 6$ e (cfr. prop. XVIII)

$$r \cup s = S - \pi\,, \qquad S = r \cup s \cup \pi = S_{r,s}\,. \tag{4.4}$$

Le rette r ed s individuano la famiglia $R_{r,s}$. Sia $x \in R$; se x giace su π essa è non parallela nè ad r nè ad s e giace su di un piano disgiunto da r ed s, onde $x \in R_{r,s}$. Se x non giace su π essa ha esattamente un punto in comune con tal piano (cfr. prop. VII) e sega $S - \pi$ in due punti distinti e, in forza della (4.4) e poichè r ed s non appartengono ad R, sega sia r che s in un punto, onde $x \in R_{r,s}$. Si è così visto che $R \subseteq R_{r,s}$; poichè risulta (cfr. prop. XVIII) e le

(4.1) e (1.3) $|R| = |R_{r,s}| = 15$ è necessariamente $R = R_{r,s}$, onde, per la (4.4) l'asserto.

Dalle prop. IX, XVII e XX si ha la prop. I.

Bibliografia

[1] P. DEMBOWSKI, *Finite geometries*, Ergebnisse der Math., Springer-Verlag, Berlin 1968.

[2] M. HALL jr., *Affine generalized quadrilaterals*, Studies in Pure Mathematics, Academic Press, New York 1971.

[3] D. OLANDA, *Sistemi rigati immersi in uno spazio proiettivo*, Relaz. n. 26, Istituto Matematico Univ. Napoli 1973.

[4] G. TALLINI: $[\bullet]_1$ *Strutture d'incidenza dotate di polarità*, Rend. Sem. Mat. Fis. Univ. Milano (1971), 1-42; $[\bullet]_2$ *Graphic characterization of varieties in a Galois space*, Atti Convegno Internazionale di Teorie Combinatorie, Accad. Naz. Lincei (1973), 1-13; $[\bullet]_3$ *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois*, Relaz. n. 30, Istituto Matematico Univ. Napoli 1973.

[5] J. A. THAS, *On 4-gonal configurations*, Geometriae dedicata **2** (1973), 317-326.

Summary

This paper deals with ruled system (S, R) (*cfr.* $[4]_1$ $[4]_2$) *satisfying the following condition*: R *is a lineset in an affine space* $A_{3,q}$; *such systems are completely characterized.*

Added in proof. The author was told J. A. Thas found a similar result (unpublished paper).

* * *