Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 259-268

MARIO GIONFRIDDO (*)

Ipergrafi privi di r-cicli significativi e K-iperalberi (**)

1. - Sia $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ un *ipergrafo* semplice e connesso. Se h è una biiezione di $\mathscr{E}$ in $\boldsymbol{N}_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ ed E_i il simplesso di $\boldsymbol{H}$ tale che $h(E_i) = i$, per $i > 1$ indicheremo con $\boldsymbol{H}_{[i]} = (X_i, \mathscr{E}_i)$ l'ipergrafo tale che

$$X_i = \{x \in X: x \in E_i \cap E_j, j < i\}, \qquad \mathscr{E}_i = \{F: F = E_i \cap E_j, j < i\}.$$

Per *grafo* 1-*sezione di* $\boldsymbol{H}$ [risp. *grafo* 1-*sezione secondo di* $\boldsymbol{H}$] s'intenderà il grafo $\boldsymbol{H}'^1$ [risp. $\boldsymbol{H}''^1$] avente per vertici i vertici di $\boldsymbol{H}$ e per spigoli le coppie di vertici estremi di *almeno* un [risp. di *ciascun*] simplesso di $\boldsymbol{H}$ ($[\mathbf{11}]_2$, p. 24; $[\mathbf{11}]_4$). Tra gli spigoli di $\boldsymbol{H}'^1$ e di $\boldsymbol{H}''^1$ saranno qui compresi anche gli eventuali *cappi* di $\boldsymbol{H}$.

Per *k-ciclo significativo* di $\boldsymbol{H}$ s'intenderà una coppia $(A, \boldsymbol{B})$ nella quale $A = (F_1, F_2, \ldots, F_r)$ e $\boldsymbol{B} = (E_1, E_2, \ldots, E_r)$ sono due r-uple tali che

(i) $r > 2$;

(ii) $\forall i \in \boldsymbol{N}_r$, $E_i \in \mathscr{E}$, $F_i \subseteq E_i \cap E_{i-1}$ (1), $|E_i| > k+1$, $|F_i| = k+1$;

(iii) $\forall i, j \in \boldsymbol{N}_r$, $i \neq j \Rightarrow E_i \neq E_j$, $F_i \neq F_j$ [**6**], [**7**], [**10**].

Indicheremo nel seguito con $M_{i,j}$ un grafo completo avente i vertici, j cappi, ma privo di spigoli in parallelo. Un grafo $M_{i,0}$ è una *clique* ([**2**], p. 7) e s'indicherà più semplicemente con K_i.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Via Cesare Battisti, 98100 Messina, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 13-XII-1977.

(1) Se $i = 1$, s'intende $i - 1 = r$.

2. – In questo numero faremo alcune considerazioni sugli ipergrafi *di tipo* C_r. Si dirà che un ipergrafo $\boldsymbol{H}=(X,\mathscr{E})$, semplice e connesso, è *di tipo* C_r, $r\in\boldsymbol{N}$, se non esistono in esso r-cicli significativi. Un ipergrafo di tipo C_r è anche di tipo C_s, per ogni $s>r$. Gli ipergrafi *di tipo* UC_p considerati in [6], ove

$$p=\min\left\{|E_i\cap E_j|-1\colon E_i,E_j\in\mathscr{E},\ E_i\cap E_j\neq\emptyset\right\},$$

sono ipergrafi di tipo C_p uniformi. Nel seguito p avrà sempre il significato descritto, s'indicherà invece con q il minimo intero positivo o nullo per cui $\boldsymbol{H}$ sia un ipergrafo di tipo C_q. Nei teoremi seguenti p e q sono sempre relativi ad un dato ipergrafo $H=(X,\mathscr{E})$, semplice, connesso.

Teor. 2.1. *Sia $\boldsymbol{H}$ un ipergrafo avente almeno un $(p;k)$-spigolo* (2). *Se $p\geqslant 2$, $k\geqslant 2$, allora $q\geqslant p$.*

Dim. Segue dalle ipotesi che esiste in $\boldsymbol{H}$ almeno un $(p-1)$-ciclo significativo. In particolare se $x_1,x_2,\ldots$ sono i vertici di un $(p;k)$-spigolo di $\boldsymbol{H}$, esiste il $(p-1)$-ciclo $(A,\boldsymbol{B})$ di lunghezza tre così definito

$$A=(\{x_1,\ldots,x_p\},\{x_1,x_3,\ldots,x_{p+1}\},\{x_2,\ldots,x_{p+1}\}),\qquad \boldsymbol{B}=(E_i,E_j,E_h),$$

dove E_i, E_j, E_h sono tre simplessi di $\boldsymbol{H}$ incidenti nel $(p;k)$-spigolo considerato. Si ha, dunque, $q>p-1$, da cui $q\geqslant p$.

Teor. 2.2. *Se $p=q>0$, esiste in $\boldsymbol{H}$ almeno un $(p;k)$-spigolo, con $k\geqslant 2$.*

Dim. Se $p=q>0$, esiste in $\boldsymbol{H}$ almeno un $(q-1)$-ciclo $(A,\boldsymbol{B})$ di lunghezza $h\geqslant 3$ tale the

$$|E_j\cap E_{j+1}|\geqslant q+1\qquad \forall j\in\boldsymbol{N}_h\ (3)$$

(se esistesse, infatti, un $j\in\boldsymbol{N}_h$ tale che $|E_j\cap E_{j+1}|\leqslant q$, si avrebbe $p<q$). Essendo $\boldsymbol{H}$ privo di q-cicli significativi, deve necessariamente esistere un $u\in\boldsymbol{N}_h$ tale che

$$E_{u-1}\cap E_u=E_u\cap E_{u+1}\subseteq E_{u-1}\cap E_{u+1},\qquad |E_{u-1}\cap E_u|=q+1,$$

(2) Un $(p;k)$-*spigolo* di $\boldsymbol{H}$ è un sottoinsieme di X, di cardinalità $p+1$, contenuto in $k+1$ simplessi di $\boldsymbol{H}$ [6].

(3) Se $j=h$, s'intende $j+1=1$; se invece $j=1$, s'intende $j-1=h$.

da cui segue la tesi.

Teor. 2.3. *Se $q < p$, si ha $q = 0$.*

Dim. Supponiamo $0 < q < p$. Esiste allora in $\boldsymbol{H}$ almeno un $(q-1)$-ciclo significativo $(A, \boldsymbol{B})$, di lunghezza h, tale che

$$|E_j \cap E_{j+1}| > q \qquad \forall E_j,\, E_{j+1} \in \boldsymbol{B} \; (^3)$$

(poichè $p > q$). Essendo, però, $\boldsymbol{H}$ privo di q-cicli significativi, deve esistere almeno un indice $j \in \boldsymbol{N}_h$ tale che

$$E_{j-1} \cap E_j = E_j \cap E_{j+1} \subseteq E_{j-1} \cap E_{j+1}\,, \qquad |E_{j-1} \cap E_j| = q + 1\,.$$

Da cui segue $p \leqslant q$, contro le ipotesi.

Per gli ipergrafi di tipo C_p sussistono, inoltre, i teoremi seguenti le cui dimostrazioni sono analoghe a quelle date in [**6**], lemmi I, II, III, per gli ipergrafi di tipo UC_p.

Teor. 2.4. *Se $p > 0$ ed esistono in $\boldsymbol{H}$ almeno due simplessi E_i, E_j tali che $|E_i \cap E_j| > p + 1$ [risp. $|E_i \cap E_j| > p + 2$, se $p = 0$], si ha*

$$|(E_i \cap E_j) \cap E_h| \leqslant p + 1 \qquad \forall E_h \in \mathscr{E}\,.$$

Teor. 2.5. *Sia $\boldsymbol{H}$ un ipergrafo di tipo C_p. Se $\boldsymbol{H}'$ è un ipergrafo di tipo C_p ottenuto da $\boldsymbol{H}$ con l'aggiunta di un simplesso E', allora, posto $E' \cap X = \bar{X}$, si ha*

(i) $p + 1 \leqslant |\bar{X}|$;

(ii) $E_i \in \mathscr{E}$, $|E_i \cap \bar{X}| > p + 1 \Rightarrow E_i \cap \bar{X} = \bar{X}$.

3. – Sia $\boldsymbol{K}$ un insieme di grafi $M_{i,j}$. Diremo che un ipergrafo $\boldsymbol{H}$, semplice e connesso, è un $\boldsymbol{K}^{/1}$*-iperalbero* [risp. un $\boldsymbol{K}^{//1}$*-iperalbero*] se $|\mathscr{E}| = 1$ oppure, per $|\mathscr{E}| > 1$, se esiste una biiezione $f\colon \mathscr{E} \to \boldsymbol{N}_m$ tale che per ogni $i \in \boldsymbol{N}_m$, $i \neq 1$,

$$\text{I)}\ |X_i| \geq 1, \qquad \text{II)}\ |X_i| > 1 \Rightarrow H^{/1}_{[i]}\ [\text{risp. } H^{//1}_{[i]}] \cong M_{u,v} \in K\,.$$

Indicheremo con $\boldsymbol{H}^{/1}_{[i]}$ [risp. con $\boldsymbol{H}^{//1}_{[i]}$] il grafo $\boldsymbol{H}^{/1}_{[i]}$ [risp. $\boldsymbol{H}^{//1}_{[i]}$]. Saranno sempre considerati, inoltre, ipergrafi con $|\mathscr{E}| > 1$, semplici e connessi.

Teor. 3.1. *Un $\boldsymbol{K}^{//1}$-iperalbero è un $\boldsymbol{K}^{/1}$-iperalbero, ma non viceversa.*

Dim. La dimostrazione segue direttamente dalle definizioni. Basti pensare che, in generale, se il grafo 1-sezione secondo di un ipergrafo $\boldsymbol{H}$ è isomorfo ad un grafo $M_{i,j}$, lo è anche il grafo 1-sezione di $\boldsymbol{H}$. Dimostriamo, con un esempio, che non sussiste il viceversa. Consideriamo l'ipergrafo $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ avente per vertici $x_1, x_2, \ldots, x_6$ e per simplessi $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$, $\{x_1, x_3, x_5, x_6\}$. Se $\boldsymbol{K}$ è tale che $K_3 \in \boldsymbol{K}$ ed f è una biiezione di $\mathscr{E}$ in $\boldsymbol{N}_3$ tale che $E_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$, $E_3 = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$, si può verificare che $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{/1}$-iperalbero. Tuttavia $\boldsymbol{H}$ non è un $\boldsymbol{K}^{//1}$-iperalbero. Infatti comunque si definisca una biiezione $f\colon \mathscr{E} \to \boldsymbol{N}_3$ i corrispondenti grafi $\boldsymbol{H}^{//1}_{[3]}$ non sono isomorfi ad alcun grafo $M_{i,j}$ (4).

Teor. 3.2. *Un ipergrafo* $\boldsymbol{H}$ *con* $|\mathscr{E}| > 2$ *è un* $\boldsymbol{K}^{//1}$*-iperalbero se e solo se esiste una biiezione* $f\colon \mathscr{E} \to \boldsymbol{N}_m$ *tale che* $\forall i, j, h \in \boldsymbol{N}_m$, $i \neq j < h$,

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
&A)\ |E_i \cap E_h| = |E_j \cap E_h| = 1 \Rightarrow \exists\, k < h \ \ (E_i \cap E_h) \cup (E_j \cap E_h) \subseteq E_k \cap E_h\,,\\
&B)\ |E_i \cap E_h| > 1\,,\ |E_j \cap E_h| > 1 \Rightarrow E_i \cap E_h = E_j \cap E_h\,,\\
&C)\ |E_i \cap E_h| = 1\,,\ |E_j \cap E_h| > 1 \Rightarrow E_i \cap E_h \subset E_j \cap E_h\,.
\end{aligned}
$$

Dim. Sia $\boldsymbol{H}$ un $\boldsymbol{K}^{//1}$*-iperalbero ed* $f\colon \mathscr{E} \to \boldsymbol{N}_m$ una biiezione ad esso associata. La A) è immediata. Dimostriamo la B). Supponiamo che esistano tre indici $i, j, h \in \boldsymbol{N}_m$, $i < j < h$, tali che $|E_i \cap E_h| > 1$, $|E_j \cap E_h| > 1$, $E_i \cap E_h \neq E_j \cap E_h$. Posto $E_i \cap E_h = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $E_j \cap E_h = \{y_1, y_2, \ldots\}$, non può essere $|E_i \cap E_j \cap E_h| > 1$, poichè in tal caso se $x, y \in E_i \cap E_j \cap E_h$, in $\boldsymbol{H}^{//1}_{[h]}$ esisterebbero almeno due spigoli in parallelo di estremi x, y. Ne segue che esiste almeno un $x_1 \in E_i \cap E_h - E_j$ ed almeno un $y_1 \in E_j \cap E_h - E_i$: se fosse, infatti, $E_i \cap E_h \subseteq E_j$ [risp. $E_j \cap E_h \subseteq E_i$], essendo per ipotesi $|E_i \cap E_h| > 1$, $|E_j \cap E_h| > 1$, si avrebbe $|E_i \cap E_j \cap E_h| > 1$. Poichè per ipotesi il grafo $\boldsymbol{H}^{//1}_{[h]}$ è isomorfo ad un grafo $M_{u,v}$, per ogni $(x, y) \in E_i \times E_j$, deve esistere in $\boldsymbol{H}$ un simplesso E_k, $k < h$, tale che $\{x, y\} \subseteq E_k$. Posto $k_i = \min Q_i$, $i = 1, 2, 3$, ove

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \{v \in \boldsymbol{N}_m,\ v < h\colon \{x_1, y_1\} \subseteq E_v\}\,,\\
Q_2 &= \{v \in \boldsymbol{N}_m,\ v \leqslant j\colon \{x_2, y_1\} \subseteq E_v\}\,,\\
Q_3 &= \{v \in \boldsymbol{N}_m,\ v \leqslant i\colon \{x_1, x_2\} \subseteq E_v\}\,,
\end{aligned}
$$

$x_2 \in E_i \cap E_j \cap E_h$ se $|E_i \cap E_j \cap E_h| = 1$, essendo $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, $Q_1 \cap Q_3 = \emptyset$, $Q_2 \cap Q_3 = \emptyset$ (in caso contrario esisterebbero in $\boldsymbol{H}^{//1}_{[h]}$ spigoli in parallelo), segue che nel caso $k_1 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$ non esiste in $\boldsymbol{H}^{//1}_{[k_1]}$ lo spigolo $\{x_1, y_1\}$,

(4) Se si fissa una biiezione f in modo che $E_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ oppure $E_3 = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$, il grafo $\boldsymbol{H}^{//1}_{[3]}$ è isomorfo al grafo di vertici x, y, z e di spigoli $\{x, y\}$, $\{y, z\}$, $\{x, z\}$, $\{x, z\}$. Se invece la biiezione f è tale che $E_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$, il grafo $\boldsymbol{H}^{//1}_{[3]}$ è isomorfo al grafo di vertici x, y, z, t e di spigoli $\{x, y\}$, $\{y, z\}$, $\{z, t\}$, $\{x, t\}$, $\{y, t\}$, $\{y, t\}$.

nel caso $k_2 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$ [risp. $k_3 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$] non esiste in $H^{//1}_{[k_2]}$ [in $H^{//1}_{[k_3]}$] lo spigolo $\{x_2, y_1\}$ [$\{x_1, x_2\}$]. In ogni caso H non potrebbe essere un $K^{//1}$-iperalbero. Da cui la tesi. Utilizzando la B), si prova facilmente anche la C). Viceversa, se esiste una biiezione $f\colon \mathscr{E} \to N_m$ che verifichi le (1), qualunque sia h, $3 \leqslant h \leqslant m$, si ha $|X_h| \geqslant 1$ e, per $|X_h| > 1$, $H^{//1}_{[h]}$ è isomorfo ad un grafo $M_{i_h, j}$, $i_h \geqslant p+1$. Segue, per $K = \{M_{i,j}\colon p+1 \leqslant i \leqslant r(X)-1\}$, la tesi.

Fissati H, $f\colon \mathscr{E} \to N_m$, poniamo $g(H, f) = \max\{|X_i|\colon 2 \leqslant i \leqslant m\} - 1$.

Nel seguito, ove non ci sarà luogo a confusione, $g(H, f)$ s'indicherà più semplicemente con g.

Teor. 3.3. *Un $K^{/1}$-iperalbero è un ipergrafo di tipo C_r, per ogni $r \geqslant g$.*

Dim. Sia H un $K^{/1}$-iperalbero. Basterà dimostrare che H è un ipergrafo di tipo C_g. Dalla definizione di g segue che

$$\forall E_i, E_j \in \mathscr{E}, \quad i \neq j \qquad \Rightarrow |E_i \cap E_j| \leqslant g+1 .$$

Supponiamo che esista in H un g-ciclo significativo (A, B), e siano $A = (F_1, F_2, \ldots, F_h)$, $B = (T_1, T_2, \ldots, T_h)$, con $h \geqslant 3$. Si ha

$$F_j = T_j \cap T_{j+1}, \qquad |F_j| = g+1, \qquad \forall j \in N_h \ (^3) .$$

Se $k = \max\{i \in N\colon E_i \in B\}$, posto $E_k = T_j$, $j \in N_h$, si ha

$$|E_k \cap T_{j-1}| = |E_k \cap T_{j+1}| = g+1, \ E_k \cap T_{j-1} - T_{j+1} \neq \emptyset, \ E_k \cap T_{j+1} - T_{j-1} \neq \emptyset$$

(le ultime due seguono dal fatto che $F_j \neq F_{j+1}$, essendo $F_j, F_{j+1} \in A$).

Siano $x \in E_k \cap T_{j-1} - T_{j+1}$, $y \in E_k \cap T_{j+1} - T_{j-1}$. Se non esiste alcun simplesso E_i, per $i < k$, tale che $x, y \in E_i$, il grafo $H^{/1}_{[k]}$ non può essere isomorfo ad alcun grafo $M_{u,v}$ (poichè non contiene lo spigolo $\{x, y\}$); se invece esiste un simplesso E_i, con $i < k$, tale che $x, y \in E_i$, il grafo $H^{/1}_{[k]}$ avrebbe un numero di vertici maggiore o uguale a $|F_j \cup F_{j+1}| \geqslant g+2$. Contro le ipotesi.

Dai Teor. 3.1 e 3.3 segue che un $K^{//1}$-iperalbero è anch'esso un ipergrafo di tipo C_r, per ogni $r \geqslant g$. Osserviamo che non sussiste il viceversa del Teor. 3.3. Infatti, se $H = (X, \mathscr{E})$ è un ipergrafo tale che $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_7\}$, $\mathscr{E} = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{x_5, x_6, x_7\}, \{x_3, x_4, x_7\}\}$, si può facilmente constatare che, comunque si definisca una biiezione $f\colon \mathscr{E} \to N_4$, non esiste un insieme K di grafi $M_{i,j}$ tale che H sia un $K^{/1}$-iperalbero; mentre si può verificare che H è un ipergrafo di tipo C_r, per ogni $r \geqslant 1$.

Teor. 3.4. *Se $\boldsymbol{H}$ è un ipergrafo di tipo C_p, esiste un insieme $\boldsymbol{K}$ di grafi $M_{i,j}$ tali che $\boldsymbol{H}$ sia un $\boldsymbol{K}^{/1}$-iperalbero.*

Dim. Dimostriamo il teorema per induzione su $m = |\mathscr{E}|$. Per $m = 2$ la tesi è immediata. Supponiamo, dunque, che sia vera per un certo m e sia $\boldsymbol{H}'$ un ipergrafo di tipo C_p ottenuto da $\boldsymbol{H}$ (ipergrafo di tipo C_p con m simplessi) con l'aggiunta di un simplesso E'. Se $X \cap E' = \bar{X}$, si ha

$$\text{i)}\ p + 1 \leqslant |\bar{X}| \qquad \text{ii)}\ \exists E_j \in \mathscr{E},\ E_j \cap \bar{X} = \bar{X},$$

(la i) segue dal Teor. 2.5; la ii) si può dedurre considerando che in caso contrario dovrebbero esistere in $\boldsymbol{H}$ almeno due simplessi E_i, E_j tali che

$$|E_i \cap \bar{X}| = p + 1\,, \qquad |E_j \cap \bar{X}| = p + 1\,, \qquad E_i \cap \bar{X} \neq E_j \cap \bar{X}\,,$$

e questo implicherebbe, per la connessione di $\boldsymbol{H}$, l'esistenza in $\boldsymbol{H}'$ di un p-ciclo significativo avente tra i suoi simplessi E', E_i, E_j). Dalla ii), se f' è una biiezione di $\mathscr{E}'$ (insieme dei simplessi di $\boldsymbol{H}'$) in $\boldsymbol{N}_{m+1}$ tale che $f'_{/\mathscr{E}} = f$, segue che l'ipergrafo $\boldsymbol{H}_{[m+1]}$ ($E_{m+1} = E'$) ha tra i suoi simplessi $\bar{X}$ e, quindi, $|X_{m+1}| \geqslant 1$ ed inoltre, se $|X_{m+1}| > 1$, $\boldsymbol{H}^{/1}_{[m+1]}$ è isomorfo ad un $M_{i,j}$, con $i = |\bar{X}| \geqslant p + 1$ vertici.

Non sussiste il viceversa del Teor. 3.4. Se consideriamo, infatti, l'ipergrafo $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ tale che $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$, $\mathscr{E} = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{x_2, x_4, x_5, x_6\}, \{x_6, x_7, x_8\}\}$, si verifica che $p = 0$ e che esiste in esso il ciclo $(A, \boldsymbol{B})$ di lunghezza tre così definito

$$A = (\{x_2\}, \{x_4\}, \{x_5\})\,, \qquad \boldsymbol{B} = (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{x_2, x_4, x_5, x_6\})\,.$$

Se si considera, inoltre, la biiezione $f\colon \mathscr{E} \to \boldsymbol{N}_4$ tale che

$$E_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\,, \qquad E_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}\,,$$

$$E_3 = \{x_2, x_4, x_5, x_6\}\,, \qquad E_4 = \{x_6, x_7, x_8\}\,,$$

ed un insieme $\boldsymbol{K}$ di grafi $M_{i,j}$ tale che $K_3 \in \boldsymbol{K}$, si può constatare che l'ipergrafo $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{/1}$-iperalbero.

Dalla dimostrazione del Teor. 3.4 segue, inoltre, che non sempre un ipergrafo di tipo C_p è un $\boldsymbol{K}^{//1}$-iperalbero. Si ha a proposito il seguente

Teor. 3.5. *Sia $\boldsymbol{H}$ un ipergrafo di tipo C_p. Se in $\boldsymbol{H}$ non esistono $(h; k)$-spigoli, con $k \geqslant 1$, contenenti $(r; s)$-spigoli, con $1 \leqslant r < h$ e $s > k$* [5], *$\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{//1}$-iperalbero.*

Dim. Basta osservare che, in tali ipotesi, è possibile definire una biiezione $f\colon \mathscr{E} \to \boldsymbol{N}_m$ verificante le (1). Segue, per il Teor. 3.2, la tesi.

Teor. 3.6. *Sia $\boldsymbol{H}$ un $\boldsymbol{K}^{//1}$-iperalbero. Se $(A, \boldsymbol{B})$ è un r-ciclo, $r \geqslant 1$, di lunghezza $h \geqslant 3$ definito in esso, posto $A = (F_1, F_2, \ldots, F_h)$, $\boldsymbol{B} = (T_1, T_2, \ldots, T_h)$, esiste un simplesso $T_k \in \boldsymbol{B}$ tale che*

$$\bigcup_{i=1}^{h} F_i \subseteq T_k \, .$$

Dim. Osserviamo che, per il Teor. 3.3, $\boldsymbol{H}$ è di tipo C_u, per ogni $u \geqslant g$. Se $(A, \boldsymbol{B})$ è, dunque, un r-ciclo di $\boldsymbol{H}$, dev'essere $1 \leqslant r \leqslant g-1$. Per provare la tesi basterà dimostrare che

$$\exists T_k \in \boldsymbol{B}\,, \qquad \bigcup_{j=1}^{h} T_{j-1} \cap T_j \subseteq T_k \ (^3)\, .$$

Se $h = 3$, la tesi è di facile verifica. Infatti se f è la biiezione di $\mathscr{E}$ in $\boldsymbol{N}_m$ per cui $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{//1}$-iperalbero, posto $k = \max \{f(E)\colon E \in \boldsymbol{B}\}$, $E_k = T_q$, per il Teor. 3.2 si ha

$$T_q \cap T_{q-1} = T_q \cap T_{q+1} \subseteq T_{q-1} \cap T_{q+1}\, .$$

Supponiamo, dunque, che la tesi sia vera per un certo h e sia $(A', \boldsymbol{B}')$ un r-ciclo di $\boldsymbol{H}$ di lunghezza $h+1$. Se

$$A' = (U_1, U_2, \ldots, U_{h+1})\,, \qquad \boldsymbol{B}' = (V_1, V_2, \ldots, V_{h+1})\,,$$

$$k = \max \{f(V)\colon V \in \boldsymbol{B}'\}\,, \qquad E_k = V_q\,,$$

ove f ha il significato di prima, si ha (cfr. Teor. 3.2)

$$\text{i)} \qquad V_{q-1} \cap V_q = V_q \cap V_{q+1} \subseteq V_{q-1} \cap V_{q+1}\, .$$

---

(5) In $\boldsymbol{H}$, cioè, non esistono $(h; k)$-spigoli contenenti $(r; s)$-spigoli aventi molteplicità maggiore e dimensione minore, con $r \neq 0$. Tale condizione è la medesima del teor. 3.3 di [**6**].

Esiste, allora, in $\boldsymbol{H}$ un r-ciclo $(A, \boldsymbol{B})$ di lunghezza h così definito

$$A = (U_1, \ldots, U_{q-1}, U_{q+1}, \ldots, U_{h+1}), \qquad \boldsymbol{B} = (V_1, \ldots, V_{q-1}, V_{q+1}, \ldots, V_{h+1}),$$

e si deve poter determinare, per ipotesi, un $V_u \in \boldsymbol{B}$ tale che

$$\text{ii)} \qquad \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq q-1,\, j\neq q}}^{h+1} (V_j \cap V_{j+1}) \cup (V_{q-1} \cap V_{q+1}) \subseteq V_u \ (^6)\,.$$

Dalla i) e dalla ii) segue la tesi.

Non si può enunciare un teorema analogo per $r = 0$. Se consideriamo, infatti, l'ipergrafo $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ e la biiezione $f\colon \mathscr{E} \to \boldsymbol{N}_6$ così definiti

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\},$$

$$\mathscr{E} = \big\{E_1 = \{x_1, x_3, x_7\}, E_2 = \{x_1, x_2, x_3\}, E_3 = \{x_1, x_7, x_8\},$$

$$E_4 = \{x_3, x_5, x_7\}, E_5 = \{x_3, x_4, x_5\}, E_6 = \{x_5, x_6, x_7\}\big\},$$

si può verificare che $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{//1}$-iperalbero, ove $\boldsymbol{K}$ contiene K_2, $M_{2,1}$, $M_{2,2}$. Esiste, inoltre, in $\boldsymbol{H}$ il ciclo $(A, \boldsymbol{B})$, con

$$A = (\{x_1\}, \{x_3\}, \{x_5\}, \{x_7\}), \qquad \boldsymbol{B} = (E_2, E_5, E_6, E_3),$$

avente lunghezza 4 e tale che gli elementi di A non siano tutti contenuti in un medesimo simplesso di $\boldsymbol{H}$.

Un teorema analogo non sussiste, inoltre, se in luogo di $\boldsymbol{K}^{//1}$-iperalberi si prendono $\boldsymbol{K}^{/1}$-iperalberi. Basta considerare in questo caso l'ipergrafo $\boldsymbol{H} = (X, \mathscr{E})$ e la biiezione $f\colon \mathscr{E} \to \boldsymbol{N}_6$ tali che

$$X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\},$$

$$\mathscr{E} = \big\{E_1 = \{x_0, x_1, x_3, x_7\}, E_2 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}, E_3 = \{x_0, x_1, x_7, x_8\},$$

$$E_4 = \{x_0, x_3, x_5, x_7\}, E_5 = \{x_0, x_3, x_4, x_5\}, E_6 = \{x_0, x_5, x_6, x_7\}\big\};$$

si può verificare che $\boldsymbol{H}$ è un $\boldsymbol{K}^{/1}$-iperalbero (ma non un $\boldsymbol{K}^{//1}$-iperalbero) se

(6) Si pone $j + 1 = 1$ per $j = h + 1$.

$\boldsymbol{K}$ contiene K_3, $M_{3,1}$. Esiste, inoltre, in esso l'1-ciclo $(A, \boldsymbol{B})$, con

$$A = (\{x_0, x_1\}, \{x_0, x_3\}, \{x_0, x_5\}, \{x_0, x_7\}) , \qquad \boldsymbol{B} = (E_2, E_5, E_6, E_3) ,$$

avente lunghezza 4 e tale che gli elementi di A non siano tutti contenuti in un medesimo simplesso di $\boldsymbol{H}$ (e quindi di $\boldsymbol{B}$).

4. – La classe dei $\boldsymbol{K}'^1$*-iperalberi* contiene quella dei $\boldsymbol{K}''^1$*-iperalberi* (cfr. Teor. 3.1). Essa contiene anche la classe degli $(m; n)$*-alberi*, introdotti da A. K. Dewdney in [4], e degli n*-alberi* considerati in [5]. Infatti, *se* $\boldsymbol{K} = \{M_{m+1,j}\colon j = 0, 1, \ldots, m+1\}$, *un* $(m; n)$*-albero è un* $\boldsymbol{K}'^1$*-iperalbero uniforme di rango* $n+1$. *Per* $m = 0$, *si ha un* n*-albero. Per* $m = 0$ *ed* $n = 1$, *si ha un albero.*

Abbiamo, inoltre, provato che un $\boldsymbol{K}'^1$-iperalbero è un ipergrafo privo di r-cicli significativi, per ogni $r \geqslant g$, essendo $g = \max\{|X_i|\colon 2 \leqslant i \leqslant m\} - 1$. Considerando che in un $(m; n)$-albero si ha $g = m$, segue che *un* $(m; n)$*-albero è un ipergrafo semplice, connesso, uniforme di rango* $n+1$, *privo di* m*-cicli significativi.* Tale proposizione è stata dimostrata, per altra via, in ([4], Teor. 1, p. 162). Per $m = 0$ si ha la Proposizione 9, dimostrata in [5]. In [4] è stato provato anche il viceversa: cioè che un ipergrafo, semplice, connesso, uniforme di rango $n+1$, e privo di m-cicli significativi, è un $(m; n)$-albero. Un teorema analogo non si può dare per i $\boldsymbol{K}'^1$-iperalberi. Più esattamente, *non è detto che un ipergrafo, semplice, connesso, e privo di* r*-cicli significativi, per un certo* r, *sia un* $\boldsymbol{K}'^1$*-iperalbero.* Ciò avviene per $r = p$ (cfr. Teor. 3.4).

Bibliografia

[1] L. W. Beineke - R. E. Pippert: $[\bullet]_1$ *The enumeration of labeled 2-trees*, Notices Amer. Math. Soc. **15** (1968), 384; $[\bullet]_2$ *Characterizations of 2-dimensional trees*, « The many facets of graph theory » (G. Chartrand, S. F. Kapoor, eds.), Lecture Notes in Mathematics **110**, Springer-Verlag, Berlin (1969), 263-270; $[\bullet]_3$ *The number of labeled k-dimensional trees*, J. Combinatorial Theory **6** (1969), 200-205.

[2] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[3] C. Berge - D. K. Ray Chauduri (eds), *Hypergraph seminar*, Lecture Notes in Mathematics **411**, Springer-Verlag, Berlin 1974.

[4] A. K. Dewdney, *Higher-dimensional tree structures*, J. Combinatorial Theory Ser. B **17** (1974), 160-169.

[5] M. Ferro - M. Gionfriddo, *Considerazioni sugli n-grafi e sugli n-alberi e determinazione degli alberi 2-dimensionali mediante le loro caratteristiche*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **22** (1973), 185-205.

[6] M. GIONFRIDDO, *Ipergrafi uniformi ϱ-planari ed ipergrafi di tipo UC_p*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **3** (1977).

[7] P. HANSEN - M. LAS VERGNAS, *Une proprieté des hypergraphes sans cycles de longueur supérieure à deux*, Proc. Coll. Bruxelles sur la Théorie des Graphes (1973), 315-317.

[8] P. HANSEN - M. LOREA, *Degrees and independent sets of hypergraphs*, Discrete Math. **14** (1976), 305-309.

[9] F. HARARY - E. M. PALMER, *On acyclic simplicial complexes*, Mathematika **15** (1968), 115-122.

[10] M. LEWIN, *On hypergraphs without significant cycles*, J. Combinatorial Theory Ser. B **20** (1976), 80-83.

[11] F. SPERANZA: $[\bullet]_1$ *Omomorfismi tra grafi e grafi moltiplicativi*, Ann. Mat. Pura e Appl. (4) **71** (1966), 281-294; $[\bullet]_2$ *Su alcuni singrammi che si possono associare ad un dato singramma pluridimensionale*, Studia Ghisleriana, Pavia 1967; $[\bullet]_3$ *Sui singrammi privi di automorfismi non identici*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. **14** (1968), 1-14; $[\bullet]_4$ *Sur les sections des hypergraphes et sur leurs automorphismes*, Colloq. Math. (2) **27** (1973), 269-274.

Sunto

Si introduce il concetto di $K^{/1}$-iperalbero e di $K^{//1}$-iperalbero. Dopo alcune considerazioni sugli ipergrafi di tipo C_p, si dimostrano alcuni teoremi sull'esistenza di r-cicli significativi in un K-iperalbero. Si osserva, infine, che gli $(m; n)$-alberi, introdotti da A. K. Dewdney in [4], *sono particolari $K^{/1}$-iperalberi.*

* * *