Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 239-245

A. Guerraggio e L. Paganoni (*)

Su una classe di funzioni convesse (**)

1. – Sia E un aperto convesso di uno spazio vettoriale topologico X. Una funzione $f: E \to R$ è detta J-convessa se, $\forall x, y \in E$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x)+f(y)] .$$

È noto ([1], [5]) che, se f è limitata superiormente su un insieme di Baire di seconda categoria, essa è continua su E. S. S. Jou e S. Kurepa hanno esteso questo risultato [3] al caso in cui X è un gruppo topologico abeliano e $(x+y)/2$ è sostituito dall'espressione $r(x+y)$, con $r: X \to X$ omomorfismo soddisfacente la proprietà: $r(x+x)=x$, $\forall x \in X$. Una ulteriore generalizzazione è stata effettuata da W. Sander $[6]_2$ che ha sostituito a $r(x+y)$ una opportuna funzione di due variabili. In questa Nota si considerano funzioni convesse più generali delle precedenti, le funzioni (H, K)-convesse, e si mostra come anche per esse valgano risultati analoghi a quelli sopra ricordati.

2. – È necessario premettere alcune definizioni.

Definizione 1. Si dice che una funzione $F: X \times X \to X$ è *riflessiva* se, $\forall x \in X$, $F(x, x)=x$. Se F è riflessiva, si chiama *F-involucro di un insieme D* l'insieme $\tilde{D}=\lim D_n$, dove $D_0=D$ e $D_i=F(D_{i-1} \times D_{i-1})$, $i=1,2,\ldots$.

Definizione 2. Sia X uno spazio topologico. Si dice che $H: X \times X \to X$

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Matematica, Università, Via C. Saldini 50, 20133 Milano, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A.(C.N.R.). — Ricevuto: 5-XII-1977.

è *localmente risolubile con continuità* se, per ogni punto $P \equiv (x_0, y_0, z_0)$ di $X \times X \times X$ con $z_0 = H(x_0, y_0)$, esistono un intorno U di P e due funzioni φ_P e ψ_P, definite rispettivamente in un intorno di (x_0, z_0) e (y_0, z_0) e ivi continue, con la proprietà che, $\forall x, y, z \in U$, $z = H(x, y)$ è equivalente a $y = \varphi_P(x, z)$ e $x = \psi_P(y, z)$.

Si dice che $H: X \times X \to X$ è *globalmente risolubile con continuità* se esistono due funzioni continue $\varphi, \psi: X \times X \to X$ con la proprietà che, $\forall x, y, z \in X \times X \times X$, $z = H(x, y)$ è equivalente a $y = \varphi(x, z)$ e $x = \psi(y, z)$.

Definizione 3. Siano X e Y due insiemi, con $Y = (Y, \leqslant)$ totalmente ordinato. Siano inoltre $H: X \times X \to X$ e $K: Y \times Y \to Y$ due funzioni assegnate. Una funzione $f: X \to Y$ si dice (H, K)-*convessa* se, $\forall x, y \in X$, $f(H(x, y)) \leqslant K(f(x), f(y))$.

I risultati principali di questo paragrafo sono costituiti dai Teoremi 1 e 2. Per la loro dimostrazione è opportuno premettere i seguenti Lemmi 1 ... 5.

Lemma 1. *Sia $f: X \to Y$ una funzione (H, K)-convessa con K monotona non decrescente rispetto ad entrambe le variabili. Se f è superiormente limitata su un insieme $D \subset X$, allora f è superiormente limitata su $H(D \times D)$.*

Dimostrazione. Per ipotesi esiste $m \in Y$ tale che $f(x) \leqslant m$, $\forall x \in D$. Se x e y sono due generici elementi di D, si ha

$$f(H(x, y)) \leqslant K(f(x), f(y)) \leqslant K(m, m) = m_1$$

e da questo segue l'asserto.

Osservazione 1. Se K è riflessiva si ha $m_1 = m$. Si può allora concludere immediatamente che f è superiormente limitata sull'insieme $\tilde{D}$, H-involucro di D, e che m ne è ancora un maggiorante.

Lemma 2. (vedi [**6**]$_1$). *Sia X uno spazio topologico e $H: X \times X \to X$ una funzione globalmente risolubile con continuità. Se D è un insieme di Baire di seconda categoria, allora $H(D \times D)$ ha interno non vuoto.*

Lemma 3. (vedi [**6**]$_1$). *Sia X uno spazio di Baire* (1) *e $H: X \times X \to X$ una funzione continua e localmente risolubile con continuità. Se D è un insieme di Baire di seconda categoria, allora $H(D \times D)$ ha interno non vuoto.*

(1) Si dice *spazio di Baire* uno spazio topologico in cui ogni aperto non vuoto è di seconda categoria.

Lemma 4. *Sia $f: X \to Y$ una funzione (H, K)-convessa definita su uno spazio topologico X, con H e K soddisfacenti le seguenti condizioni*

(1) $\forall t \in X$, H^t (2) *è una mappa aperta* [H_t *è una mappa aperta*],

(2) $\forall u \in Y$, K^u *è monotona non decrescente* [K_u *è monotona non decrescente*].

Allora, se f è superiormente limitata in un intorno di $x_0 \in X$, ne segue che f è superiormente limitata nell'intorno di ogni punto $x \in H_{x_0}(X)$ [$x \in H^{x_0}(X)$].

Dimostrazione. Sia $A \subset X$ un aperto, contenente x_0, sul quale f risulta superiormente limitata: sia cioè, $\forall a \in A$, $f(a) \leqslant m$.

Sia $x \in H_{x_0}(X)$ [$H^{x_0}(X)$]: esiste allora $t \in X$ tale che $x = H(x_0, t)$ [$x = H(t, x_0)$]. Poichè H^t [H_t] è una mappa aperta, $H^t(A)$ [$H_t(A)$] è un aperto B contenente x. Allora $\forall b \in B$, $\exists a \in A$ tale che

$$f(b) = f(H(a, t)) \leqslant K(f(a), f(t)) \leqslant K(m, f(t)) \,,$$

$$[f(b) = f(H(t, a)) \leqslant K(f(t), f(a)) \leqslant K(f(t), m))] \,,$$

ed essendo l'ultimo membro della disuguaglianza indipendente da b, f risulta limitata superiormente in un intorno di x. Per l'arbitrarietà di x ne segue l'asserto.

Per la dimostrazione del prossimo teorema è opportuno richiamare alcune proprietà relative ai «cluster-sets» di una funzione.

Definizione 4. Sia $f: X \to Y$, con X e Y spazi topologici. Si dice che $y \in Y$ *è un elemento del cluster-set di f in $x \in X$* — e si scrive $y \in C(f, x)$ — se esiste in X una rete $\{x_\alpha\}$, con $\alpha \in A$ insieme diretto, convergente ad x tale che $\{f(x_\alpha)\}$ converge a y.

È stato dimostrato [2] che, indicato con $\mathscr{U}_x$ il sistema di intorni di x, $y \in C(f, x)$ se e solo se $y \in \cap \{\overline{f(U)}, U \in \mathscr{U}_x\}$.

$C(f, x)$ è perciò un insieme chiuso ed inoltre non è mai vuoto perchè contiene almeno $f(x)$. Se (vedi [7]) f è continua in x e Y è di Hausdorff, $C(f, x)$ si riduce all'unico elemento $f(x)$, ovvero il cluster-set è degenere; quest'ultima proprietà, viceversa, implica la continuità di f in x, se Y è compatto (anche senza la richiesta Y di Hausdorff). Proprio per usufruire di questo risultato, nella dimostrazione del Lemma 5, viene introdotto l'insieme Y^*, compatti-

(2) Sia $F: X \times X \to Y$. Con F^t e F_t, $t \in X$, si intendono le funzioni così definite: $F^t: X \to Y$ data da $F^t(x) = F(x, t)$; $F_t: X \to Y$ data da $F_t(y) = F(t, y)$.

ficazione di Y, utilizzando il risultato noto [4] che uno spazio totalmente ordinato Y con la topologia d'ordine ammette una compattificazione ordinabile Y^*: esiste cioè uno spazio compatto Y^*, contenente Y come sottoinsieme denso, tale che l'ordine di Y si possa estendere ad esso in modo che la sua topologia originaria possa essere vista come topologia d'ordine.

Lemma 5. *Sia $f: X \to Y$ una funzione (H, K)-convessa definita su uno spazio topologico X e a valori in Y spazio topologico ordinato* (³) *e connesso. Si supponga che*: (1) *H sia localmente risolubile con continuità*; (2) *K sia crescente in una variabile, e non decrescente nell'altra, continua e riflessiva.*

Se f è superiormente limitata nell'intorno di un punto x_0 e $H(x_0, x_0) = x_0$, allora f è continua in x_0.

Dimostrazione. Si supponga per assurdo f discontinua in x_0 e si consideri Y come sottoinsieme dello spazio Y^* introdotto sopra. Allora (vedi [7]) $C(f, x_0)$ non è degenere. Detti cioè l e L rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $C(f, x_0)$ in Y^*, si ha $l \leqslant f(x_0) \leqslant L$, con $l \neq L$.

In particolare, $L \in Y$ poichè altrimenti la locale limitatezza di f risulterebbe in contrasto con l'ipotesi Y connesso.

l può appartenere sia ad Y che a $Y^* \setminus Y$. Nel caso $l \in (Y^* \setminus Y)$, sempre per la connessione di Y, non ci può essere nessun $g \in Y$ con $g \leqslant l$ e quindi l risulta punto di accumulazione dalla destra di elementi di Y. Pertanto, comunque sia l in Y^*, esiste sempre almeno un $g \in Y$ con $l \leqslant g \leqslant L$. Si supponga K crescente nella prima variabile.

Si consideri dapprima il caso che $l \in (Y^* \setminus Y)$.

Siano $\{x_\alpha\}$ e $\{y_\alpha\}$ due reti, definite sullo stesso insieme diretto A, ed entrambe convergenti a x_0, tali che $\{f(x_\alpha)\} \to l$ e $\{f(y_\alpha)\} \to L$. Allora, definitivamente, $f(x_\alpha) \leqslant g$.

Sia $\{z_\alpha\}$ la rete definita da $z_\alpha = \varphi(x_\alpha, y_\alpha)$, ovvero $y_\alpha = H(x_\alpha, z_\alpha)$. Per la (1) ed il fatto che $H(x_0, x_0) = x_0$, $\{z_\alpha\} \to x_0$; inoltre, almeno definitivamente,

$$f(y_\alpha) = f\big(H(x_\alpha, z_\alpha)\big) \leqslant K\big(f(x_\alpha), f(z_\alpha)\big) \leqslant K\big(g, f(z_\alpha)\big) .$$

Per ogni $g' > L$ ($g' = L$ se L è il massimo di Y) si ha, almeno definitivamente, $f(z_\alpha) \leqslant g'$ e quindi $f(y_\alpha) \leqslant K(g, g')$ da cui $L \leqslant K(g, g')$. Poichè l'ultima disugua-

(³) Per *spazio topologico ordinato* si intende un insieme totalmente ordinato con topologia d'ordine.

glianza vale $\forall g' \geqslant L$, ne segue per la continuità di K che $L \leqslant K(g, L)$. La riflessività e la monotonia di K portano allora a concludere che $L \leqslant g$, $\forall g \geqslant l$, da cui l'assurdo che $L \leqslant l$.

Si supponga ora $l \in Y$. Allora si può notare, analogamente a quanto fatto sopra, che $f(y_\alpha) \leqslant K(f(x_\alpha), g')$ e, per la continuità di K, si ottiene $f(y_\alpha) \leqslant K(l, g')$. Ne segue $f(y_\alpha) \leqslant K(l, L)$ e quindi $L \leqslant K(l, L)$. Ancora una volta si giunge all'assurdo che $L \leqslant l$.

Si possono ora dimostrare i seguenti teoremi che generalizzano gli analoghi risultati di [3] e [**6**].

Teorema 1. *Sia f una funzione (H, K)-convessa definita su uno spazio topologico X e a valori in uno spazio topologico Y ordinato e connesso. Si supponga che*: (1) *H sia riflessiva e globalmente risolubile con continuità*; (2) *K sia crescente in una variabile e non decrescente nell'altra, continua e riflessiva.*

Allora, se f è superiormente limitata su un insieme D il cui H-involucro $\tilde{D}$ è un insieme di Baire di seconda categoria, f è continua.

Dimostrazione. Per il Lemma 1, f è superiormente limitata sull'insieme $\tilde{D}$ ed essendo $H(\tilde{D} \times \tilde{D}) = \tilde{D}$, quest'ultimo ha, per il Lemma 2, interno non vuoto. Poichè H è globalmente risolubile con continuità, ne segue che H_x, H^y sono mappe aperte e suriettive e pertanto, per il Lemma 4, f è superiormente limitata nell'intorno di ogni punto $x \in X$. Per il Lemma 5 ne segue l'asserto.

Teorema 2. *Sia $f\colon X \to Y$ una funzione (H, K)-convessa definita su di uno spazio di Baire X e a valori in uno spazio topologico Y ordinato e connesso. Si supponga che*: (1) *H sia riflessiva, continua e localmente risolubile con continuità*; (2) *K sia crescente in una variabile e non decrescente nell'altra, continua e riflessiva.*

Allora, se f è superiormente limitata su un insieme D il cui H-involucro $\tilde{D}$ è un insieme di Baire di seconda categoria, f risulta continua su $\bigcup_{x \in A} [H_x(X) \cup H^x(X)]$, dove A è l'interno di $\tilde{D}$.

Dimostrazione. Per i Lemmi 1 e 3, f è superiormente limitata su $\tilde{D}$, insieme con interno A non vuoto. Poichè H è localmente risolubile con continuità, si può verificare facilmente che le sezioni H_x e H^y sono mappe aperte e pertanto, per il Lemma 4, f è superiormente limitata nell'intorno di ogni $x \in \bigcup_{x \in A} [H_x(X) \cup H^x(X)]$. Per il Lemma 5 ne segue l'asserto.

Osservazione 2. Se $\forall x \in X$, H_x oppure H^x è suriettiva, il Teorema 2 implica la continuità globale di f.

Osservazione 3. Nei Teoremi 1 e 2 compare l'ipotesi che Y sia connesso e questo equivale alla richiesta che Y sia denso e con la proprietà dell'estremo superiore [**8**]. L'esempio che segue mostra che tale ipotesi è essenziale, cioè non può essere attenuata limitandosi a chiedere che Y sia denso ([4]).

Esempio 1. Sia $X = R$, $Y = R^2$ con ordine lexicografico e topologia d'ordine. Siano H, K ed f funzioni così definite: $H(x, y) = (x + y)/2$, $K(\underline{u}, \underline{v}) = (\underline{u} + \underline{v})/2$ e f la mappa data da $f(x) = (x, x)$, $\forall x \in R$.

Si può allora verificare che f è (H, K)-convessa e le funzioni H e K soddisfano le ipotesi dei Teoremi 1 e 2. f tuttavia non è continua; in questo esempio infatti Y è denso ma non possiede la proprietà dell'estremo superiore.

Osservazione 4. L'ipotesi sulla monotonia di K non può essere sostituita dalla richiesta che K sia monotona non decrescente in entrambe le variabili, come è mostrato dal seguente semplice esempio.

Esempio 2. Sia $X = Y = R$ con la struttura topologica uguale. Siano H, K funzioni così definite

$$H(x, y) = \frac{x + y}{2}, \qquad K(x, y) = \text{Max }(x, y), \qquad x, y \in R$$

e $f\colon R \to R$ data da $f(x) = [x]$, $x \in R$. ($[x]$ denota la parte intera di x). In questo caso tutte le ipotesi dei Teoremi 1 e 2 sono soddisfatte salvo quella relativa alla monotonia di K.

3. – I risultati del precedente paragrafo ammettono un'interessante interpretazione quando X e Y sono gruppi. In questo caso, indicato con $\circ$ la legge di composizione interna e posto $H(x, y) = h(x \circ y)$ con $h\colon X \to X$, $K(x, y) = k(x \circ y)$ con $k\colon Y \to Y$, la definizione di funzione (H, K)-convessa assume la seguente forma particolare.

Definizione 6. Siano X e Y due gruppi con Y totalmente ordinato e siano $h\colon X \to X$ e $k\colon Y \to Y$ due funzioni assegnate.

Si dice che $f\colon X \to Y$ è una funzione *convessa generalizzata* (*rispetto alla coppia di funzioni* (h, k)) se, $\forall x, y \in X \times Y$, $f(h(x \circ y)) \leqslant k(f(x) \circ f(y))$. Tenendo presente i risultati precedenti si può dimostrare il seguente Teorema 3. Si noti che, grazie ad una lieve modifica della dimostrazione del Lemma 5, si può

([4]) La densità di Y segue automaticamente dalle ipotesi di riflessività e monotonia di K.

mostrare che l'ipotesi di continuità di K, contrariamente a quanto si potrebbe pensare, non si traduce in questo caso in una corrispondente richiesta di continuità per k.

Teorema 3. *Siano X un gruppo topologico, Y un gruppo topologico totalmente ordinato e connesso, $f: X \to Y$ una funzione convessa generalizzata rispetto alla coppia di funzioni (h, k). Si supponga che: (1) h sia aperta e $h(x \circ x) = x$, $\forall x \in X$; (2) k sia monotona crescente e $k(y \circ y) = y$, $\forall y \in Y$. Se f è superiormente limitata su un insieme di Baire di seconda categoria, allora f è continua.*

Dimostrazione. Sia D l'insieme su cui f è superiormente limitata. Per il Lemma 2, $D \circ D$ ha interno non vuoto e, per la (1), questa proprietà è verificata anche da $h(D \circ D)$, insieme su cui f risulta ancora superiormente limitata. Sempre per la (1), $h(X) = X$ e quindi, per il Lemma 4, f è superiormente limitata nell'intorno di ogni punto $x_0 \in X$.

Per dimostrare ora la continuità di f in x_0, si può ripetere la dimostrazione del Lemma 5 fino al punto in cui si mostra $L \leqslant k(g \circ L)$ o $L \leqslant k(l \circ L)$ a seconda che $l \in (Y^* \setminus Y)$ o $l \in Y$. A questo punto, poichè $L = k(L \circ L)$, per la monotonia di k si ricava rispettivamente $L \circ L \leqslant g \circ L$ o $L \circ L \leqslant l \circ L$, da cui segue immediatamente l'asserto.

Bibliografia

[1] R. Ger and M. Kuczma, *On the boundedness and continuity of convex functions and additive functions*, Aequationes Math. **4** (1970), 1-7.

[2] T. R. Hamlett, *Cluster sets in general topology*, J. London Math. Soc. **12** (1976), 192-198.

[3] S. S. Jou and S. Kurepa, *Some properties of almost open sets in topological groups and applications*, Glasnik Math. **27** (1972), 189-199.

[4] R. Kaufman, *Ordered sets and compact spaces*, Colloquium Math. **17** (1967), 35-39.

[5] M. R. Mehdi, *On convex functions*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 321-326.

[6] W. Sander: $[\bullet]_1$ *Verallgemeinerungen eines Satzes von S. Piccard*, Manuscripta Math. **16** (1975), 11-25; $[\bullet]_2$ *Regularitätseigenschaften von funktionalungleichungen* (to appear).

[7] J. D. Weston, *Some theorems on cluster sets*, J. London Math. Soc. **33** (1958), 435-441.

[8] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading 1970.

Summary

In this paper we consider a general class $\mathscr{H}$ of convex functions and we show that, if $f \in \mathscr{H}$ is upper bounded on a second category Baire set, then f is continuous.

* * *