Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 233-237

R. MIGLIORATO (*)

Surfaces de E^4 portantes un champ quasi concourant au sens restreint (**)

Introduction.

Soit $x: M \to E^4$ l'immersion d'une surface M dans un espace euclidien E^4 et soient $X \in T_p(M)$ et $jX = \omega \in T_p^*(M)$ respectivement un champ tangent à M ($T_p(M)$: espace tangent à M en $p \in M$) et la 1-forme duale de X (j isomorphisme canonique défini par la métrique de M).

En égard à la définition de R. Rosca [2] nous disons que X est *quasi concourant au sens restreint* si il satisfait à $\nabla X = \omega \otimes X + c\,dp$ où c est une constante et dp est la *forme de souture* sur M.

On démontre que l'existence de pareilles surfaces est assurée par un système en involution (qui dépande de 4 fonctions arbitraires de 1 argument) et que ces surfaces sont de courbure gaussienne nulle et l'immersion x considérée est *totalmente dégénérée.*

1. – Soit E^4 un espace euclidien à 4 dimensions et soit $x: M \to E^4$ l'immersion d'une surface M dans E^4.

En supposant E^4 orienté, soit $\{e_A;\ A = 1, \dots, 4\}$ un repére orthonormé $\mathscr{R}_0$ dont l'orientation est coherente avec celle de E^4.

Soit $\mathscr{F}_0(E^4)$ le fibrè $U\mathscr{R}_0$ de tous les repères $\mathscr{R}_0$ de E^4 et celui des repères orthonormés de M par rapport à la metrique induite sur M.

Convenon de poser

$$i, j = 1, 2\,; \qquad r, s = 3, 4\,; \qquad A, B = 1, 2, 3, 4\,. \tag{1.1}$$

(*) Indirizzo: Via P. Castelli 216, 98100 Messina, Italy.
(**) Ricevuto: 22-XI-1977.

Si θ^A et θ^A_B sont respectivement les 1-formes duales de e_A et les 1-formes de connexion sur $\mathscr{F}_0(E^4)$ et $P \in E^4$ le point générique de E^4 on a

$$dP = \theta^A \otimes e_A\,, \tag{1.2}$$

$$de_A = \theta^B_A \otimes e_B, \qquad \theta^A_B + \theta^B_A = 0\,. \tag{1.3}$$

Puisque l'espace E^4 est sans torsion et sans courbure on a

(1.4) $d\wedge(dP) = 0$; $d\wedge(de_A) = 0$ ($d\wedge$: differentiation extérieure)

et les deux groupes d'équationes de structure (E. Cartan) s'écrivent

$$d\wedge\theta^A = \theta^B\wedge\theta^A_B\,, \tag{1.5}$$

$$d\wedge\theta^A_B = \theta^C_B\wedge\theta^A_C\,. \tag{1.6}$$

La variété M est donc définie par le système

$$\theta^r = 0\,. \tag{1.7}$$

Noton par ω^i et ω^A_B les formes duales et de connexion de $\mathscr{F}_0(M)$ induites par x. On a alors (lemme de Cartan)

$$\omega^r_j = \gamma^r_{ji}\,\omega^i\,, \qquad \gamma^r_{ji} = \gamma^r_{ij} \tag{1.8}$$

et [1]

$$\Omega^2_1 + \omega^2_r\wedge\omega^r_1 = 0\,, \tag{1.9}$$

où Ω^2_1 est la 2-forme de courbure de M.

Si $T^1(M)$ est le sous fibrè normal à M on peu écrire

$$T(E^4)/M = T(M)\oplus T^\perp(M)\,. \tag{1.10}$$

2. – $T_p(M)$ et

$$dp = \omega^i\otimes e^i \tag{2.1}$$

étant respectivement l'éspace tangent à M en p et la *fome de souture* de M (c'est une forme vectorielle canonique sur $\mathscr{F}_0(M)$) soit $X = T_p(M)$ un champ vectoriel quelconque.

En égard à la définition de R. Rosca [2] nous dison que X est *quasi concourant au sens restreint* (abr. q.c.r.) si il satisfait à

$$\nabla X = \omega \otimes X + c dp\,; \qquad c = const\,, \tag{2.2}$$

où ω est la 1-forme duale de X (si j est l'isomorphisme canonique défini par la métrique de M, on peut écrire $\omega = jX$).

Si nous posons

$$x = t_1 e_1 + t_2 e_2\,; \qquad t_1, t_2 \in C(M)\,, \tag{2.3}$$

on deduit de 2.2 à l'aide de 1.3

$$dt_1 = t_2\omega_2^1 + c\omega^1 + t_1\omega\,, \qquad dt_2 = t_1\omega_1^2 + c\omega^2 + t_2\omega \tag{2.4}$$

et

$$t_1\omega_1^3 + t_2\omega_2^3 = 0\,, \qquad t_1\omega_1^4 + t_2\omega_2^4 = 0\,. \tag{2.5}$$

De (1.9) et (2.5) il rèsulte aussitôt $\Omega_1^2 = 0$, ce qui montre que la *courbure gaussienne* de M est nulle.

Les secondes formes quadratiques l_r associées à x (l_r sont des tenseurs symètriques du second ordre) sont comme on sait [1]

$$l_r = -\langle dp, de_r\rangle = \omega_i^r \otimes \omega^i = \gamma_{ij}^r \omega^i \otimes \omega^j \tag{2.6}$$

et les courbures de Lipschitz-Killing correspondantes sont exprimées par

$$K_r(P, l_r) = \det|\gamma_{ij}^r|\,. \tag{2.7}$$

En égard a (2.5), un calcul facile donne

$$K_r(p, l_r) = 0\,. \tag{2.8}$$

L'équation ci-dessus prouve que l'immersion x est *totalment dégénérée* [1].

D'autre part on trouve après calculs

$$l_3 = \frac{1}{t_1}\,\omega_2^3 \otimes \alpha\,, \qquad l_4 = \frac{1}{t_1}\,\omega_2^4 \otimes \alpha\,, \tag{2.9}$$

où l'on a posè

$$\alpha = t_1 \omega^2 - t_1 \omega^1 . \tag{2.10}$$

Ainsi conformeméent à une propriété connue, on voit que $\alpha = 0$ definit les *asimptotiques* sur M (en général une surface de codimension plus grande que 1 ne possiède pas d'asimptotiques).

Noton par

$$\eta = \omega^1 \wedge \omega^2 \tag{2.11}$$

l'élément de volume canonique sur M et désignons par $\{\mu\colon W \to iw\eta;\ i$ produit interieur; $W \in T_p(M)\}$ l'isomorphisme défini par η. On a

$$x = \mu(X) = \mu \circ j^{-1}(\omega) = * \, \omega , \tag{2.12}$$

où $*$ designe l'*adjonction* par rapport à la métrique de M.

De (2.4) on déduit encore

$$dt^2 = (c + t^2)\omega ; \qquad t^2 = t_1^2 + t_2^2 . \tag{2.13}$$

Ainsi on peut poser $\omega = d \log (t_2 + c)$ ce qui montre que la forme ω est *exacte.*

La differentiation extérieure des équations (2.5) donne

$$\omega_1^2 \wedge (t_1 \omega_2^3 - t_2 \omega_1^3) = 0 , \tag{2.14}$$

$$\omega_1^2 \wedge (t_1 \omega_2^4 - t_2 \omega_1^4) = 0 , \tag{2.15}$$

et en égard à $\Omega_1^2 = 0$, la différentiation exsterieure des équations (2.4) donne

$$-2\omega^2 \wedge \omega_1^2 + \omega^1 \wedge \omega = 0 , \tag{2.16}$$

$$2\omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^2 \wedge \omega = 0 . \tag{2.17}$$

Ainsi les surfaces M en jeu son définies par le système Σ (système de Pfaff généralisè [**3**]) formè par les équationes du premier ordre (2.4) et (2.5) et les équationes du second ordre (2.14) ... (2.17).

Le nombre r des fonctions inconnues qui figurent dans Σ est 8 (ω_i^r, dt_i, ω_1^2 et ω). Le nombre des équations du premier ordre étant $s_0 = 4$ et celui du second ordre $s_1 = 4$, on a $r = s_0 + s_1$ et conformemént au test de E. Cartan [**3**] le système Σ est en *involution* et dépende de 4 fonctions arbitraires de 1 argument.

On a donc le

Théorème. *Soit* $x: M \to E^4$ *l'immersion d'une surface* M *dans un espace euclidien* E^4 *et soient* X *et* $j(X) = \omega$ *respectivement un champ tangent sur* M *et sa forme duale.*

Si X *est quasi-concourant au sens réstreint, alors*

(i) M *est de courbure gaussienne nulle*;

(ii) *l'immersion* x *est dégénérée*;

(iii) *la forme adjunté* $*\,\omega = \alpha$ *de* ω *definit les asimptotiques sur* M *et* ω *est une forme exsacte*;

(iv) *l'existance des surfaces* M *est assurrèe par un système en involution qui dépende de* 4 *fonctions arbitraires de* 1 *argument.*

Bibliographie

[1] B. Y. CHEN, *Géometry of submanifolds*, M. Dekker, New York 1973.

[2] R. ROSCA, *Varietés riemanniennes portant un champ vectoriel quasi-concourant*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **283** (1976), 851-853.

[3] H. SLEBODINSKI, *Formes extérieures et leurs applicationes*, Polska Akad. Nauk Warszawa (1963).

Resumé

V. Introduction.

* * *