Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 143-155

V. MANGIONE e A. VEZZANI (*)

Sulle connessioni a vettore torsione nullo (**)

1. - Introduzione.

È noto che assegnata su una varietà reale V di dimensione n una connessione Λ con torsione T_Λ, resta naturalmente individuato, in ogni punto della varietà, il *vettore torsione*, ottenuto da T_Λ per contrazione interna.

Questo lavoro è dedicato alla classe delle *connessioni a vettore torsione nullo* (brevemente, alla *classe* $\mathscr{N}$) (1).

Per le connessioni di $\mathscr{N}$ vengono innanzitutto stabiliti, su una varierà reale, un *teorema di rappresentazione* e un *teorema di caratterizzazione* (Teor. $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$, n. **6**). Due *caratterizzazioni analitiche* sono poi fornite dal teorema $\boldsymbol{T}_3$ del n. **7** nel caso che la varietà V sia riemanniana.

La classe $\mathscr{N}$ è collocata in modo interessante con altre classi di connessioni note nella letteratura. Si stabilisce ad esempio che le connessioni metriche della classe $\mathscr{L}$, della classe $\mathscr{D}$, su una varietà riemanniana, e le connessioni ϱ_-, in particolare quelle di Eckmann-Frölicher, su una varietà quasi complessa, appartengono alla classe $\mathscr{N}$ (Oss. $\boldsymbol{O}_3$, $\boldsymbol{O}_4$, n. **7**; $\boldsymbol{O}_5$, n. **8**).

Ai numeri **7**, **8** vengono anche ottenuti *teoremi di rappresentazione* per le connessioni della classe $\mathscr{D}$, per le connessioni a campo $\boldsymbol{J}$ parallelo e per le connessioni ϱ_+, ϱ_0 e di Martinelli, appartenenti ad $\mathscr{N}$, su una varietà riemanniana le prime, su una varietà quasi complessa le rimanenti (Teor. $\boldsymbol{T}_5$, $\boldsymbol{T}_6$, $\boldsymbol{T}_7$). Le ultime tre classi possono anche essere caratterizzate dal teorema $\boldsymbol{T}_8$ del n. **8**. La osservazione $\boldsymbol{O}_2$ del n. **6** ed il teorema $\boldsymbol{T}_4$ del n. **7**, infine, forniscono alcune proprietà delle connessioni di $\mathscr{N}$.

(*) Indirizzo: Ist. Mat., Università, 43100 Parma, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambitod el G.N.S.A.G.A. (CNR). — Ricevuto: 15-VII-1977.

(1) Vari autori hanno considerato connessioni di $\mathscr{N}$ di tipo particolare. Ad es. K. Yano - S. Bochner in [**11**]; S. Golab in [**3**]; G. Vranceanu in [**9**]. Connessioni della classe $\mathscr{N}$ intervengono nella teoria della relatività.

Nei teoremi di caratterizzazione intervengono in modo essenziale le *strutture, riemanniana* o *quasi complessa*, della varietà e, nel caso reale, il concetto di Λ-divergenza di un campo vettoriale, recentemente introdotto in [**5**]$_1$.

Nelle formule di rappresentazione intervengono gli *omomorfismi* ω e $\boldsymbol{\Omega}$ introdotti dagli autori in [**5**]$_2$, oltre che gli *omomorfismi idempotenti* $\boldsymbol{\theta}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}$, relativi ai tensori emisimmetrici di tipo $(1, 2)$ e intimamente connessi con la struttura quasi complessa della varietà, qui considerati per la prima volta (n. **3**, **4**).

Infine, nelle formule che rappresentano le connessioni delle varie classi intervengono, come elementi arbitrari, campi tensoriali di tipo $(1, 2)$, in particolare simmetrici, emisimmetrici, e connessioni simmetriche. Ciò dà indicazioni sulla esistenza e sulla consistenza quantitativa delle connessioni di ciascuna classe.

2. - Preliminari.

Sia $\boldsymbol{V}$ una varietà differenziabile reale di dimensione $n \geqslant 2$ e classe $\boldsymbol{C}^r$ $(r \geqslant 2)$, x un punto di $\boldsymbol{V}$, τ lo spazio vettoriale tangente a $\boldsymbol{V}$ in x, τ_* lo spazio vettoriale duale ([2]).

Se $\boldsymbol{V}$ è dotata di una *struttura riemanniana* di classe $\boldsymbol{C}^1$ ([3]), sia $g \in \tau_* \otimes \tau_*$ il tensore metrico nel punto x di $\boldsymbol{V}$ e $G \in \tau \otimes \tau$ il tensore definito dalla uguaglianza

$$c_1^1(g \otimes G) = \delta \quad (^4)\ . \tag{1}$$

Se $\boldsymbol{V}$ è poi dotata di una *struttura quasi complessa* di classe $\boldsymbol{C}^1$ ([5]), sia $\boldsymbol{J}$ il tensore misto che definisce in ogni punto x di $\boldsymbol{V}$ la struttura quasi complessa ed $N \in \tau_* \otimes \tau_* \otimes \tau$ il tensore di *Nijenhuis* associato a $\boldsymbol{J}$.

Ricordato che per $\boldsymbol{J}$ sussistono le uguaglianze

$$c_2^1(\boldsymbol{J} \otimes \boldsymbol{J}) = c_1^2(\boldsymbol{J} \otimes \boldsymbol{J}) = -\delta \quad (^6)\ , \tag{2}$$

([2]) Per le nozioni fondamentali si veda p. es. J. A. Schouten [**8**].

([3]) Per le nozioni fondamentali si veda p. es. J. A. Schouten [**8**]; K. Yano - S. Bochner [**11**].

([4]) δ è il tensore di Kronecker. In generale c_k^j è l'applicazione tensoriale di contrazione relativa allo j-simo indice di contravarianza ed al k-simo indice di covarianza (vedi p. es. N. Bourbaki [**1**]$_1$, p. 45).

([5]) Per le nozioni fondamentali si veda p. es. B. Eckmann [**2**]$_2$; E. Martinelli [**6**]$_1$, [**6**]$_2$; K. Yano [**10**]. In tal caso deve essere $n = 2m$.

([6]) Vedi p. es. K. Yano [**10**].

risulta particolarmente utile per il seguito l'osservazione

$\boldsymbol{O}_1$. *Su* V *quasi complessa sussiste la relazione*

$$c_1^1 J = 0 \,. \tag{3}$$

Per stabilire la relazione (3), conviene riguardare J come matrice. Il primo membro della (3) altro non è, allora, che la traccia di J e coincide, come è noto, con la somma degli $n = 2m$ autovalori della matrice stessa. D'altra parte, una matrice J che definisca in ogni x di V una arbitraria struttura quasi complessa ammette m autovalori coincidenti con i ed i restanti m autovalori coincidenti con $-i$ (7). Da ciò segue subito l'asserto.

Interviene nel seguito lo spazio vettoriale $\mathscr{T} = \tau_* \otimes \tau_* \otimes \tau$. Indicati con σ ed ε gli *omomorfismi di simmetrizzazione, di emisimmetrizzazione di* $\mathscr{T}$ (8), è utile considerare l'*omomorfismo involutorio* $\alpha = \sigma - \varepsilon$ ed indicare con $\mathscr{T}_\sigma$, $\mathscr{T}_\varepsilon$ i sottospazi vettoriali costituiti dai tensori simmetrici, emisimmetrici di $\mathscr{T}$.

3. - Omomorfismi di $\mathscr{T}$.

Su V reale, nello spazio vettoriale $\mathscr{T}$ relativo al punto x di V, si consideri l'*omomorfismo idempotente* ω, definito, per ogni tensore L di $\mathscr{T}$, da

$$\omega L = \frac{1}{n}\, \delta \otimes c_1^1 L \,, \tag{4}$$

e l'*omomorfismo ausiliario*

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega^* + n\omega^* \alpha \omega^* \,, \tag{5}$$

recentemente introdotti in [**5**]$_2$ (9). In particolare, grazie alla permutabilità di $\boldsymbol{\Omega}$ con α, e quindi con σ ed ε, l'*omomorfismo* $\boldsymbol{\Omega}$ *può pensarsi come omomorfismo di* $\mathscr{T}_\sigma$ *e* $\mathscr{T}_\varepsilon$ (10).

---

(7) Vedi p. es. B. Eckmann [**2**]$_2$, p. 10.

(8) Indotti in $\mathscr{T}$ dagli analoghi omomorfismi di $\tau_* \otimes \tau_*$.

(9) V. Mangione - A. Vezzani [**5**]$_2$, n. 3. Se β è un qualunque omomorfismo di $\mathscr{T}$ e 1 è l'identità, si pone $\beta^* = 1 - \beta$.

(10) Rif. lavoro di cui alla nota precedente, Oss. $\boldsymbol{O}_1$, n. 3.

Conviene, per il seguito, stabilire la *relazione*

$$\omega\varepsilon\omega = \frac{n-1}{2n}\,\omega\,. \tag{6}$$

Se poi V è dotata di una struttura quasi complessa si considerino in $\mathscr{T}$ l'*omomorfismo involutorio* $\boldsymbol{W}$ e gli *omomorfismi idempotenti* $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{Q}$ introdotti da G. B. Rizza ([11]). Sono interessanti le *relazioni*

$$\omega\boldsymbol{W} = \omega\alpha\boldsymbol{W}\alpha\boldsymbol{W} = \omega\boldsymbol{W}\alpha\boldsymbol{W}\alpha\,, \tag{7}$$

$$\omega\boldsymbol{W}\varepsilon\omega = -\frac{1}{2n}\,\omega\,, \tag{8}$$

$$\omega\boldsymbol{Q} = \frac{1}{2}\,\omega(1+\boldsymbol{W})\,. \tag{9}$$

Sussiste infine la *proprietà*

$\boldsymbol{P}_1$. *In* $\mathscr{T}_\varepsilon$ *per gli omomorfismi* ω, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{Q}$ *sussistono le relazioni*

$$\omega\boldsymbol{K} = 0\,, \qquad \boldsymbol{K}\boldsymbol{Q} = 0\,. \tag{10}$$

Alla (6) si perviene per via diretta, tenuta presente la definizione di ε e la (4).

Alle (7), (8) si giunge senza difficoltà con calcolo diretto, tenute presenti le definizioni degli omomorfismi che in esse figurano oltre che la (2) e l'Osservazione $\boldsymbol{O}_1$.

In modo analogo si giunge alla (9), tenendo in particolare conto la (7).

Un calcolo diretto permette di ottenere facilmente anche la $(10)_1$: qui, oltre alla definizione di ω e $\boldsymbol{K}$, conviene tenere presente la (2) e che si opera in $\mathscr{T}_\varepsilon$. La $(10)_2$, infine, è immediata conseguenza della $(11)_1$ del lavoro $[7]_2$, non appena si tenga conto che si opera in $\mathscr{T}_\varepsilon$.

4. - Omomorfismi θ e $\tilde{\theta}$.

Nello spazio vettoriale $\mathscr{T}$ relativo al punto x di una varietà dotata di una

---

([11]) G. B. Rizza $[7]_2$, pp. 11 e 13, formule (2), (6) e (7). Gli omomorfismi $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{Q}$ sono permutabili con α e quindi con σ ed ε; in particolare risulta $\boldsymbol{K}^*(N) = 0$ (Prop. $\boldsymbol{P}_4$, p. 13; Oss. all'inizio di p. 20).

struttura quasi complessa, conviene considerare gli *omomorfismi*

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{4n}{n-2}\,\varepsilon\omega \boldsymbol{Q}\,, \tag{11}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = 4\varepsilon\omega \boldsymbol{Q}^*\,, \tag{12}$$

utili nel seguito.

Sussiste la *proprietà*

P$_2$. $\boldsymbol{\theta}$ *e* $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ *sono omomorfismi idempotenti dello spazio* $\mathscr{T}_\varepsilon$.

Che $\boldsymbol{\theta}$ e $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ possano considerarsi omomorfismi di $\mathscr{T}_\varepsilon$ segue immediatamente dalle definizioni (11) e (12). Per la idempotenza di $\boldsymbol{\theta}$, tenuta presente la (11) e la (9) si ha

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}^2 &= \frac{4n^2}{(n-2)^2}\,\varepsilon\omega(1+\boldsymbol{W})\,\varepsilon\omega(1+\boldsymbol{W})\\ &= \frac{4n^2}{(n-2)^2}\,(\varepsilon\omega\varepsilon\omega + \varepsilon\omega\boldsymbol{W}\varepsilon\omega + \varepsilon\omega\varepsilon\omega\boldsymbol{W} + \varepsilon\omega\boldsymbol{W}\varepsilon\omega\boldsymbol{W})\,.\end{aligned}$$

Tenute presenti le (6), (8) segue

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}^2 &= \frac{4n^2}{(n-2)^2}\left(\frac{n-1}{2n}\,\varepsilon\omega - \frac{1}{2n}\,\varepsilon\omega + \frac{n-1}{2n}\,\varepsilon\omega\boldsymbol{W} - \frac{1}{2n}\,\varepsilon\omega\boldsymbol{W}\right)\\ &= \frac{2n}{n-2}\,(\varepsilon\omega + \varepsilon\omega\boldsymbol{W})\,.\end{aligned}$$

In virtù della (9) si perviene all'asserto.

Per la idempotenza di $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$, conviene osservare anzitutto che, in virtù delle (9), (6), (8), risulta

$$\varepsilon\omega\boldsymbol{Q}\varepsilon\omega = \frac{1}{2}\,\varepsilon\omega(1+\boldsymbol{W})\,\varepsilon\omega = \frac{n-2}{4n}\,\varepsilon\omega\,.$$

Ciò premesso è

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^2 &= 16\varepsilon\omega(1-\boldsymbol{Q})\,\varepsilon\omega(1-\boldsymbol{Q})\\ &= 16(\varepsilon\omega\varepsilon\omega - \varepsilon\omega\boldsymbol{Q}\varepsilon\omega - \varepsilon\omega\varepsilon\omega\boldsymbol{Q} + \varepsilon\omega\boldsymbol{Q}\varepsilon\omega\boldsymbol{Q})\,.\end{aligned}$$

Tenendo conto della (6) e della osservazione precedente risulta

$$\tilde{\theta}^2 = 16\left(\frac{n-1}{2n}\varepsilon\omega - \frac{n-2}{4n}\varepsilon\omega - \frac{n-1}{2n}\varepsilon\omega Q + \frac{n-2}{4n}\varepsilon\omega Q\right) =$$

$$= 16\left(\frac{1}{4}\varepsilon\omega - \frac{1}{4}\varepsilon\omega Q\right) = 4\varepsilon\omega Q^* = \tilde{\theta}\,.$$

P_2 è così dimostrata.

5. - Connessioni su V.

Sia V una varietà reale e Λ una *connessione* su V. Indicata con Γ_Λ la *connessione simmetrica associata* a Λ e con T_Λ la *torsione* di Λ (12), con riferimento al punto x di V si può scrivere

$$\Lambda = \Gamma_\Lambda + T_\Lambda\,. \tag{13}$$

In particolare, se V è una varietà riemanniana, indicata con $\overset{\circ}{\Gamma}$ la connessione di Levi-Civita definita da g, con riferimento al punto x di V si può scrivere

$$\Lambda = \overset{\circ}{\Gamma} + \Sigma_\Lambda + T_\Lambda \;(^{13})\,, \tag{14}$$

con Σ_Λ, T_Λ appartenenti a $\mathscr{T}_\sigma$, $\mathscr{T}_\varepsilon$ rispettivamente.

Si indica inoltre con D_Λ l'operatore di derivazione covariante relativo alla connessione Λ.

Conviene ricordare che, se in ogni punto x di V risulta

$$T_\Lambda = 0\,,\quad \Sigma_\Lambda = 2\sigma\gamma(T_\Lambda)\,,\quad \Sigma_\Lambda = 0\,,\quad \sigma\gamma(T_\Lambda) = 0\,,\quad \omega(\Sigma_\Lambda + T_\Lambda) = 0\,,$$

la connessione Λ è, rispettivamente, *simmetrica*, *metrica*, *di Levi-Civita generalizzata* (brevemente, *della classe* $\mathscr{L}$), *della classe* $\mathscr{K}$, *della classe* $\mathscr{D}$ (14).

---

(12) Cfr. p. es. J. A. Schouten [**8**], p. 126.

(13) Vedi p. es. V. Mangione - A. Vezzani [**5**]$_1$, (6), n. 3.

(14) γ è un isomorfismo involutorio dipendente dalla struttura riemanniana di V introdotto da G. B. Rizza in [**7**]$_3$, (3), p. 165. Per le classi di connessioni indicate, oltre al lavoro citato, vedi V. Mangione - A. Vezzani [**5**]$_1$, [**5**]$_2$.

Se poi $\boldsymbol{V}$ è dotata di una struttura quasi complessa, le *condizioni*

$$T_A = \boldsymbol{Q}(E), \qquad T_A = \boldsymbol{K}(E), \qquad T_A = E - \boldsymbol{K}(E) - \boldsymbol{Q}(E), \qquad T_A = \boldsymbol{K}(E) + \boldsymbol{Q}(E),$$

con E arbitrario tensore di $\mathscr{T}_\varepsilon$, caratterizzano, rispettivamente, le connessioni delle classi ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0, di Martinelli (15).

Altre classi di connessioni, che intervengono nel seguito, sono le *connessioni a campo $\boldsymbol{J}$ parallelo* e le *connessioni di Eckmann-Frölicher*; le prime sono caratterizzate dalla condizione $D_A \boldsymbol{J} = 0$; le seconde, oltre che dalla precedente condizione, dalla $T_A = N$ (16).

6. - Connessioni a vettore torsione nullo.

È frequente in letteratura la considerazione di connessioni A soddisfacenti in ogni punto x di $\boldsymbol{V}$ alla *condizione*

$$c_1^1 T_A = 0, \tag{15}$$

ossia di connessioni per le quali il *vettore torsione*, definito dalla connessione, risulta nullo su $\boldsymbol{V}$ (17).

Scopo del presente lavoro è studiare le connessioni A soddisfacenti alla (15) in ogni punto x della varietà (brevemente, *connessioni della classe $\mathscr{N}$*).

A tale scopo conviene anzitutto stabilire la *proprietà*

$\boldsymbol{P}_3$. *Sia L un tensore di $\mathscr{T}$. Ciascuna delle condizioni*

$$\omega L = 0, \qquad \sigma\omega L = 0, \qquad \varepsilon\omega L = 0, \tag{16}$$

è equivalente alla condizione $c_1^1 L = 0$.

---

(15) G. B. Rizza [7]$_2$, p. 16.

(16) Delle connessioni a campo $\boldsymbol{J}$ parallelo è fornita in [7]$_2$ una formula di rappresentazione. Per una rappresentazione delle connessioni di Eckmann-Frölicher, si veda B. Eckmann [2]$_1$ e G. B. Rizza [7]$_1$.

(17) Nel trattato [**11**] (Cap. VII, n. 5), K. Yano e S. Bochner considerano *connessioni metriche* soddisfacenti la (15); S. Golab in [**3**] dimostra che, se $\boldsymbol{V}$ ha dimensione 2, ogni connessione $\frac{1}{4}$-simmetrica appartiene alla classe $\mathscr{N}$. Connessioni della classe $\mathscr{N}$ intervengono anche nella *teoria unitaria di Einstein*. Per tale motivo il vettore torsione $c_1^1\, T_A$ è spesso chiamato *vettore di Einstein*.

La dimostrazione di $\boldsymbol{P}_3$ è elementare.

Ciò premesso, indicazioni relative alla esistenza su V reale di connessioni della classe $\mathscr{N}$, alla loro consistenza quantitativa, nonchè ad una loro ulteriore caratterizzazione, sono date dai seguenti *teoremi*

$\boldsymbol{T}_1$. *Tutte e sole le connessioni della classe $\mathscr{N}$ sono rappresentate in un generico punto x di V dalla*

$$A = \Gamma + \Omega E \,, \tag{17}$$

dove Γ è una arbitraria connessione simmetrica ed E un generico tensore di $\mathscr{T}_\varepsilon$.

$\boldsymbol{T}_2$. *In ogni punto x di V, la condizione*

$$\mathrm{div}_A\, v = \mathrm{div}_{\Gamma_A}\, v \ \text{[18]} \tag{18}$$

per un qualunque campo controvariante, è necessaria e sufficiente perchè A sia della classe $\mathscr{N}$.

Conviene poi notare:

$\boldsymbol{O}_2$. *Per le connessioni della classe $\mathscr{N}$ risulta $c_1^1 D_A T_A = c_1^1 D_{\Gamma_A} T_A$.*

In altri termini, per le connessioni della classe $\mathscr{N}$ *la divergenza della torsione relativa a A* [19] *ed alla connessione simmetrica associata Γ_A coincidono.*

Per dimostrare il teorema $\boldsymbol{T}_1$, si noti che in virtù della proprietà $\boldsymbol{P}_3$, se A è della classe $\mathscr{N}$, T_A è la più generale soluzione emisimmetrica dell'equazione $\omega X = 0$; in base al teorema $\boldsymbol{T}_1$ del lavoro [**5**]$_2$ segue allora $T_A = \boldsymbol{\Omega} E$, con $E \in \mathscr{T}_\varepsilon$. Viceversa, se $T_A = \boldsymbol{\Omega} E$, è $\omega T_A = \omega \boldsymbol{\Omega} E = 0$ per la (5) e perchè, essendo ω idempotente, risulta $\omega\omega^* = 0$. $\boldsymbol{T}_1$ resta così dimostrato.

Per il teorema $\boldsymbol{T}_2$ si osservi che dalle definizioni di $\mathrm{div}_A\, v$, $\mathrm{div}_{\Gamma_A}\, v$ [20] e dalla (13), segue

$$\mathrm{div}_A\, v - \mathrm{div}_{\Gamma_A}\, v = c_1^1 (c_1^1\, T_A \otimes v) \;;$$

l'asserto segue allora immediatamente.

L'osservazione $\boldsymbol{O}_2$ segue subito con calcolo diretto dalla (13).

---

(18) Per le nozioni di rotore e divergenza relative ad una connessione arbitraria, vedi V. Mangione - A. Vezzani [**5**]$_1$, n. **5**.

(19) Vedi p. es. S. Golab [**3**], p. 252.

(20) Cfr. nota (18).

7. - Classe $\mathscr{N}$ e struttura riemanniana.

Sia ora V una varietà riemanniana (n. **2**). Conviene subito segnalare le osservazioni

$\boldsymbol{O}_3$. *Le connessioni metriche della classe $\mathscr{L}$ e le connessioni della classe $\mathscr{K}$ appartengono alla classe $\mathscr{N}$.*

$\boldsymbol{O}_4$. *Le connessioni metriche della classe $\mathscr{N}$ coincidono con le connessioni metriche della classe $\mathscr{D}$* (21).

La metrica g della struttura riemanniana consente, poi, di dare una caratterizzazione analitica delle connessioni della classe $\mathscr{N}$. Sussistono infatti i teoremi

$\boldsymbol{T}_3$. *Ognuna delle condizioni*

$$c_1^1 \Sigma_\Lambda = -\tfrac{1}{2}\, c_2^1 c_3^2 (G \otimes D_\Lambda g)\,, \tag{19}$$

$$c_2^1 c_3^2 (G \otimes D_\Lambda g) = c_2^1 c_3^2 (G \otimes D_{\Gamma_\Lambda} g)\,, \tag{20}$$

è necessaria e sufficiente perchè Λ appartenga alla classe $\mathscr{N}$.

$\boldsymbol{T}_4$. *Per le connessioni di $\mathscr{N}$, la Λ-divergenza di un vettore coincide con la corrispondente nozione classica per tutti e soli i vettori v perpendicolari al vettore $c_2^1 c_3^2 (G \otimes D_{\Gamma_\Lambda} g)$* (22).

Con riferimento al problema della rappresentazione delle sottoclassi di $\mathscr{N}$, è bene notare che in [**5**]$_2$ sono già state ottenute rappresentazioni delle sottoclassi di cui alle osservazioni $\boldsymbol{O}_3$ e $\boldsymbol{O}_4$; un ulteriore risultato è questo

$\boldsymbol{T}_5$. *Tutte e sole le connessioni della classe $\mathscr{N}$ appartenenti alla classe $\mathscr{D}$ sono rappresentate, in ogni x di $\boldsymbol{V}$, dalla*

$$\Lambda = \overset{\circ}{\Gamma} + \Omega C\,, \tag{21}$$

con C arbitrario in $\mathscr{T}$.

---

(21) Si tratta delle connessioni studiate da K. Yano e S. Bochner in [**11**], n. **9**, p. 111; per una loro rappresentazione, in virtù di $\boldsymbol{O}_4$, si veda V. Mangione - A. Vezzani [**5**]$_2$, n. **7**.

(22) Per Λ-divergenza si intende la divergenza relativa ad una arbitraria connessione Λ di cui alla nota (18).

La prima parte della $\boldsymbol{O}_3$ segue dalla (17) di $[\mathbf{5}]_1$. La seconda parte segue immediatamente da una osservazione all'inizio della p. 107 del lavoro $[\mathbf{5}]_1$.

L'osservazione $\boldsymbol{O}_4$ è immediata conseguenza del teorema $\boldsymbol{T}_6$ di $[\mathbf{5}]_1$.

Il teorema $\boldsymbol{T}_3$ si dimostra facilmente; infatti la (19) è immediata conseguenza della (13) di $[\mathbf{5}]_1$. La (20) si prova con calcolo diretto, tenendo presente la (17).

Per quanto concerne il teorema $\boldsymbol{T}_4$, dalla (21) del lavoro $[\mathbf{5}]_1$ segue che $\operatorname{div}_A v = \operatorname{div} v$, se e solo se $c_1^1(c_1^1(\Sigma_A + T_A)\otimes v) = 0$. Se A appartiene alla classe $\mathscr{N}$ la condizione, tenuto conto della (19), diviene

$$c_1^1(c_2^1 c_3^2(G\otimes D_A g)\otimes v) = 0 \,.$$

Tenuta presenta la (20), segue subito l'asserto.

Per stabilire il teorema $\boldsymbol{T}_5$ si procede così. Se A è della forma (21), tenendo presenti le (5), (12) di $[\mathbf{5}]_2$, A appartiene a $\mathscr{D}$. Si ha poi univocamente $C = S + E$ con $S\in\mathscr{T}_\sigma$, $E\in\mathscr{T}_\varepsilon$; tenendo conto della (6) di $[\mathbf{5}]_2$ si ha $T_A = \boldsymbol{\Omega}E$. Ne segue $\omega T_A = 0$ in virtù della (5) e del fatto che $\omega\omega^* = 0$. In definitiva A appartiene anche ad $\mathscr{N}$. Inversamente, se A appartiene ad $\mathscr{N}$, in virtù della proprietà $\boldsymbol{P}_3$, si ha $\omega T_A = 0$. Se A appartiene anche a $\mathscr{D}$ risulta pure $\omega\Sigma_A = 0$ (23). In conclusione Σ_A, T_A è, rispettivamente, la più generale soluzione simmetrica, emisimmetrica di $\omega X = 0$. In virtù del teorema $\boldsymbol{T}_1$ del lavoro $[\mathbf{5}]_2$, risulta $\Sigma_A = \boldsymbol{\Omega}S$, $T_A = \boldsymbol{\Omega}E$ con $S\in\mathscr{T}_\sigma$, $E\in\mathscr{T}_\varepsilon$. Posto $C = S + E$ segue la (21).

8. - Classe $\mathscr{N}$ e struttura quasi complessa.

Sia V dotata di una struttura quasi complessa (n. **2**); conviene iniziare con la osservazione

$\boldsymbol{O}_5$. *Le connessioni ϱ_- e in particolare le connessioni di Eckmann-Frölicher appartengono ad $\mathscr{N}$.*

Per queste classi di connessioni sono già noti teoremi di rappresentazione (24). Con riferimento, poi, alle altre classi di connessioni di una varietà quasi complessa ricordate alla fine del n. **5** ed alla eventuale esistenza di loro sottoclassi contenute in $\mathscr{N}$, sussistono alcuni *teoremi di rappresentazione.*

---

(23) Vedi p. es. l'inizio del n. **7** di $[\mathbf{5}]_1$, tenendo presente la $\boldsymbol{P}_3$.
(24) Cfr. G. B. Rizza $[\mathbf{7}]_2$, (23), p. 16; $[\mathbf{7}]_1$, (43), p. 251.

$\boldsymbol{T}_6$. *Tutte e sole le connessioni* ϱ_+, ϱ_0, *di Martinelli, appartenenti alla classe* $\mathcal{N}$, *sono rappresentate, in ogni punto* x *di* $\boldsymbol{V}$, *rispettivamente, dalle*

$$\Lambda = \Gamma + \boldsymbol{Q}(1-\boldsymbol{\theta})E\,, \tag{22}$$

$$\Lambda = \Gamma + (1-\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{K})(1-\tilde{\boldsymbol{\theta}})E\,, \tag{23}$$

$$\Lambda = \Gamma + (\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K})(1-\boldsymbol{\theta})E\,, \tag{24}$$

dove Γ *è una arbitraria connessione simmetrica ed* E *un generico tensore di* $\mathcal{T}_\varepsilon$.

$\boldsymbol{T}_7$. *Tutte e sole le connessioni a campo* $\boldsymbol{J}$ *parallelo della classe* $\mathcal{N}$, *sono rappresentate, in ogni punto* x *di* $\boldsymbol{V}$, *dalla*

$$\Lambda = \Gamma = S(\Gamma) + \sigma\boldsymbol{W}\Omega\bar{E} + \boldsymbol{K}(\bar{S}) + \boldsymbol{K}^*\Omega\bar{E} + N \text{ (25)}\,, \tag{25}$$

dove Γ *è una arbitraria connessione simmetrica ed* $\bar{S}$, $\bar{E}$ *sono arbitrari tensori di* $\mathcal{T}_\sigma$, $\mathcal{T}_\varepsilon$, *rispettivamente.*

Sussiste, inoltre, il seguente *teorema di caratterizzazione*

$\boldsymbol{T}_8$. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una connessione* ϱ_+, ϱ_0, *di Martinelli, rispettivamente, sia della classe* $\mathcal{N}$ *è che*

$$c_2^1(c_1^2(T_\Lambda \otimes \boldsymbol{J})) = 0\,. \tag{26}$$

9. - Dimostrazioni.

Tenute presenti le definizioni delle connessioni ϱ_- e delle connessioni di Eckmann-Frölicher (n. **5**), dalla $\boldsymbol{O}_7$ del lavoro [7]$_1$ segue subito l'osservazione $\boldsymbol{O}_5$.

Per dimostrare il teorema $\boldsymbol{T}_6$, si noti anzitutto che per una arbitraria connessione Λ della classe ϱ_+, ϱ_0 e di Martinelli risulta, rispettivamente

$$T_\Lambda = \boldsymbol{Q}\bar{E}\,, \qquad T_\Lambda = (\boldsymbol{Q}^*-\boldsymbol{K})\bar{E}\,, \qquad T_\Lambda = (\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K})\bar{E}\,, \tag{27}$$

con $\bar{E}$ appartenente a $\mathcal{T}_\varepsilon$ (n. **5**). Se Λ appartiene anche ad $\mathcal{N}$, in base alla proprietà $\boldsymbol{P}_3$ e tenuto conto della $(10)_1$, dovrà essere, rispettivamente

$$\varepsilon\omega\boldsymbol{Q}\bar{E} = 0\,, \qquad \varepsilon\omega\boldsymbol{Q}^*\bar{E} = 0\,, \qquad \varepsilon\omega\boldsymbol{Q}\bar{E} = 0\,.$$

---

(25) $S(\Gamma)$ è un tensore di $\mathcal{T}_\sigma$ introdotto da G. B. Rizza in [7]$_1$, p. 237.

In altri termini si tratta di determinare in $\mathscr{T}_\varepsilon$ le soluzioni delle equazioni

$$\boldsymbol{\theta} X = \frac{4n}{n-2}\varepsilon\omega \boldsymbol{Q} X = 0 \;, \qquad \tilde{\boldsymbol{\theta}} X = 4\varepsilon\omega \boldsymbol{Q}^* X = 0 \;.$$

Queste, tenuto conto che $\boldsymbol{\theta}$ e $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ sono omomorfismi idempotenti in $\mathscr{T}_\varepsilon$ (n. **4**, proprietà $\boldsymbol{P}_2$), in base ad un noto lemma ([26]) sono date da $(1-\boldsymbol{\theta})E$ e $(1-\tilde{\boldsymbol{\theta}})E$, con E arbitrario in $\mathscr{T}_\varepsilon$. Si perviene così, tenute presenti le (27), alle (22), (23) e (24).

Inversamente le connessioni A date dalle (22), (23), (24) appartengono rispettivamente alle classi ϱ_+, ϱ_0 e delle connessioni di Martinelli (n. **5**). Inoltre, tenuta presente la prima relazione della proprietà $\boldsymbol{P}_1$ e la $\boldsymbol{P}_2$, risulta

$$\varepsilon\omega\boldsymbol{Q}(1-\boldsymbol{\theta})E = 0 \;,\; \varepsilon\omega(1-\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{K})(1-\tilde{\boldsymbol{\theta}})E = 0 \;,\; \varepsilon\omega(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K})(1-\boldsymbol{\theta})E = 0 \;.$$

Pertanto esse appartengono anche alla classe $\mathscr{N}$ in virtù della proprietà $\boldsymbol{P}_3$.

Per quanto concerne il teorema $\boldsymbol{T}_7$ tenuta presente la (31) del lavoro [**7**]$_2$ per le connessioni a campo $\boldsymbol{J}$ parallelo ed appartenenti ad $\mathscr{N}$ deve anzitutto essere

$$\omega T_A = \omega(\boldsymbol{K}^* \bar{\bar{E}} + N) = 0 \;.$$

Questa condizione, tenuto conto della prima relazione della $\boldsymbol{P}_1$, del fatto che $N = \boldsymbol{K}(N)$ ([27]) e della proprietà $\boldsymbol{P}_3$ del n. **6** si riduce a $\omega\bar{\bar{E}} = 0$. In base al teorema $\boldsymbol{T}_1$ del lavoro [**5**]$_2$, segue $\bar{\bar{E}} = \boldsymbol{\Omega}E$ con E arbitrario in $\mathscr{T}_\varepsilon$. Si perviene così alla (25).

Inversamente, se A è data dalla (25), tenuta presente la (31) del lavoro [**7**]$_2$, A è a campo $\boldsymbol{J}$ parallelo. Inoltre, ricordato che è $\boldsymbol{K}(N) = N$, dalla (5) e dalla $(10)_1$, tenuto conto che $\omega\omega^* = 0$, risulta

$$\omega T_A = \omega\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{\Omega}E + \omega N = \omega\boldsymbol{\Omega}E = 0 \;,$$

e pertanto A appartiene ad $\mathscr{N}$. Il teorema $\boldsymbol{T}_7$ è così dimostrato.

Per il teorema $\boldsymbol{T}_8$, infine, si noti che in [7]$_2$ le connessioni ϱ_+, ϱ_0, di Martinelli sono rispettivamente caratterizzate dalle condizioni

$$T_A = \boldsymbol{W}T_A \;, \qquad T_A = \boldsymbol{W}\alpha\boldsymbol{W}T_A \;, \qquad T_A = \alpha\boldsymbol{W}\alpha\boldsymbol{W}T_A \;.$$

([26]) Vedi p. es. N. Bourbaki [**1**]$_2$, Proposition 1, p. 7.

([27]) Rif. nota ([11]).

Tenuta presenta la (7) si dimostra che in tutti e tre i casi la condizione $\omega T_A = 0$ si traduce nella condizione $\omega \boldsymbol{W} T_A = 0$, che equivale a

$$c_2^1(c_1^2(T_A \otimes \boldsymbol{J})) = 0.$$

Ciò prova l'asserto.

Bibliografia

[1] N. Bourbaki: [•]$_1$ *Algèbre* 3, Hermann, Paris 1958; [•]$_2$ *Algèbre* 8, Hermann, Paris 1958.

[2] B. Eckmann: [•]$_1$ *Sur lès structures complèxes et presque complèxes,* Colloque Internationale de Géométrie Différentielle, C.N.R.S., Strasbourg 1953; [•]$_2$ *Cours sur les variétés complèxes,* C.I.M.E., III ciclo, Varenna, Cremonese, Roma 1956.

[3] S. Golab, *On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections,* Tensor, N.S. **29** (1975), 249-254.

[4] V. Mangione, *Su alcune classi di connessioni di una varietà quasi complessa,* Riv. Mat. Univ. Parma (2) **9** (1968), 139-153.

[5] V. Mangione e A. Vezzani: [•]$_1$ *Due classi di connessioni sulle varietà riemanniane e quasi hermitiane,* Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino **34** (1975-76), 97-110; [•]$_2$ *Teoremi di rappresentazione per le connessioni della classe $\mathscr{D}$ e di alcune sue sottoclassi notevoli,* Riv. Mat. Univ. Parma (4) **2** (1976), 277-285.

[6] E. Martinelli: [•]$_1$ *Punti di vista geometrici nello studio delle varietà a struttura complessa,* C.I.M.E., III ciclo, Varenna, Cremonese, Roma 1956; [•]$_2$ *Sulle varietà a struttura complessa,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **43** (1957), 313-324.

[7] G. B. Rizza: [•]$_1$ *Sulle connessioni di una varietà quasi complessa,* Ann. Mat. (4) **68** (1965), 233-254; [•]$_2$ *Teoremi di rappresentazione per alcune classi di connessioni di una varietà quasi complessa,* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **1** (1969), 9-25; [•]$_3$ *Connessioni metriche sulle varietà quasi hermitiane,* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **1** (1969), 163-181.

[8] J. A. Schouten, *Ricci Calculus,* 2nd Ed., Springer-Verlag, Berlin 1954.

[9] G. Vranceanu, *Leçons de géométrie différentielle* I, Bucaresti 1957.

[10] K. Yano, *Differential Geometry of complex and almost complex spaces,* Pergamon Press, Oxford 1965.

[11] K. Yano and S. Bochner, *Curvature and Betti numbers,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1953.

Summary

The set $\mathscr{N}$ of connections with vanishing torsion vector are studied. Representation and characterization theorems for the set $\mathscr{N}$ on real manifold, and for some remarkable subset of $\mathscr{N}$ on riemannian or almost complex manifolds are obtained.

* * *