Riv. Mat. Univ. Parma (4) 4 (1978), 139-142

FABIO BRUNELLI (*)

Sul corpo delle funzioni meromorfe di uno spazio analitico reale (**)

Sia V una varietà complessa compatta; indicati rispettivamente con Γ_V e M_V l'anello delle funzioni olomorfe su V e il corpo delle funzioni meromorfe su V, è noto che tras $M_V \leqslant \dim V$ e inoltre, se V è algebrica, tras $M_V = \dim V$ [**1**].

Vogliamo provare che, nel caso reale, non si ottiene un risultato analogo; dimostreremo infatti il seguente

Teorema. *Sia V uno spazio analitico reale irriducibile supporto di fascio coerente e sia* $\dim V \geqslant 1$; *allora, detto Γ_V l'anello delle funzioni analitiche su V,* tras $\Gamma_V = +\infty$.

Ricordiamo che uno spazio analitico reale V si dice «supporto di fascio coerente» se esiste un fascio di anelli locali $\mathscr{F}$ su V, supp $\mathscr{F} = V$, tale che per ogni punto $x \in V$ esiste un intorno aperto $U \ni x$ tale che $(U, \mathscr{F}|_U)$ è isomorfo, come spazio $\boldsymbol{R}$-anellato, a un modello locale di spazio analitico reale $(S, \mathcal{O}_U/\mathscr{T})$, (dove $\mathcal{O}_U$ è il fascio dei germi di funzioni analitiche su $\boldsymbol{R}^n$ ristrette a U e S è un chiuso in U definito da $f_1 = \ldots = f_k = 0$, $f_i \in \Gamma_U(\mathcal{O}_U)$, $\mathscr{T}$ è il fascio di ideali generato dalle f_i).

Osserviamo che il teorema non è vero se $\dim V = 0$, essendo V in questo caso formato da un solo punto.

Dimostrazione. Proveremo il teorema prima nel caso che V sia una varietà di dimensione uno.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico «L. Tonelli», Università, Via Derna 1, 56100 Pisa, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (CNR). — Ricevuto: 12-VII-1977.

È noto [4]$_1$ che le componenti connesse di V, in queste ipotesi, sono (differenziabilmente e quindi analiticamente) isomorfe a circonferenze o a rette. Basterà quindi provare il teorema per $V = S^1$ e per $V = \boldsymbol{R}$. Consideriamo il caso $V = S^1$; costruiamo una famiglia di funzioni analitiche reali su S^1 di trascendenza infinita su $\boldsymbol{R}$. Sia $\tilde{F} = \{e^{\lambda z}\}$ dove $z \in \boldsymbol{C}$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, e restringiamo ogni funzione di $\tilde{F}$ a S^1. Se proviamo che $\tilde{F}$ ha trascendenza infinita su $\boldsymbol{R}$, allora $F = \{\boldsymbol{Re}(e^{\lambda z})\}$ sarà, come cercavamo, una famiglia di funzioni analitiche reali su S^1 di trascendenza infinita su $\boldsymbol{R}$. Dobbiamo dimostrare dunque che per ogni scelta di un intero q esistono q funzioni di $\tilde{F}$ che sono algebricamente indipendenti su $\boldsymbol{R}$. Procediamo per induzione: supponiamo che per un intero q esistano $e^{\lambda_1 z}, \ldots, e^{\lambda_q z}$ trascendenti su $\boldsymbol{R}$, scegliamo $\lambda_{q+1} \in R$ tale che non appartenga all'estensione di Q mediante $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$. Allora le funzioni $e^{\lambda_1 z}, \ldots, e^{\lambda_q z}, e^{\lambda_{q+1} z}$ sono trascendenti, poiché se esistesse tra loro una relazione algebrica non banale

$$P(e^{\lambda_1 z}, \ldots, e^{\lambda_q z}, e^{\lambda_{q+1} z}) = \sum_{i=1}^{q+1} a_i (e^z)^{\lambda_i n_i} \equiv 0, \tag{1}$$

otterremo delle relazioni algebriche tra gli esponenti; questo perchè, in generale, data una relazione del tipo $\sum a_1 e^{\mu_i z}$, con $\mu_i \neq \mu_k$, $\forall i, k$, essa è identicamente nulla se e solo se $a_i = 0$ per ogni i. Nel nostro caso non è possibile che esista alcuna relazione algebrica tra gli esponenti della (1) per l'ipotesi induttiva e per come abbiamo scelto λ_{q+1}.

Consideriamo ora il caso $V = \boldsymbol{R}$. Basta notare che $S^1 = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ e che, detta $\pi: \boldsymbol{R} \to S^1$ la proiezione canonica, π induce un morfismo iniettivo $\pi^*: \Gamma_{S^1} \to \Gamma_{\boldsymbol{R}}$. Ma abbiamo già provato che Γ_{S^1} ha trascendenza infinita e dunque anche $\operatorname{tras} \Gamma_{\boldsymbol{R}} = +\infty$. In questo caso il teorema è quindi dimostrato.

Supponiamo ora che V sia uno spazio analitico reale supporto di fascio coerente e $\dim V = n > 1$.

Sia x un punto regolare di V, cioè V è localmente isomorfo in x a un $\boldsymbol{R}^p$, per qualche $p \leqslant n$. Poichè $\dim V = n$, possiamo scegliere x in modo che V sia localmente isomorfo in x a un $\boldsymbol{R}^p$ con $p > 1$. Sia dunque U un intorno di x in V, $U \simeq \boldsymbol{R}^p$, $p > 1$. Possiamo allora immergere $S^1 \to U$ e, per il teorema B [**3**], $p: \Gamma_V \to \Gamma_{S^1}$ è surgettiva. Dalla prima parte della dimostrazione si ha che $\operatorname{tras} \Gamma_{S^1} = +\infty$ e dunque anche in questo caso $\operatorname{tras} \Gamma_V = +\infty$.

Per concludere la dimostrazione del teorema resta da esaminare il caso che V sia uno spazio analitico reale di dimensione uno. Osserviamo che qui non occorre specificare che V sia supporto di fascio coerente poichè da [**4**]$_2$ si ha che ogni spazio analitico reale di dimensione uno è coerente.

Ricordiamo che una complessificazione di uno spazio analitico reale V è uno spazio analitico complesso $\tilde{V}$, munito di una anti-involuzione $\sigma\colon \tilde{V} \to \tilde{V}$ tale che la parte fissa di V rispetto a σ è isomorfa a V. Sia dunque $\tilde{V}$ una complessificazione di V. Possiamo supporre che $\tilde{V}$ sia uno spazio di Stein [**2**]. Sia ora $\Gamma^{R}_{\tilde{V}}$ l'anello delle funzioni olomorfe su $\tilde{V}$, invarianti per l'anti-involuzione σ: cioè $f \in \Gamma^{R}_{\tilde{V}}$ se e solo se $f(x) = \overline{f(\sigma(x))}$ per $x \in \tilde{V}$, e inoltre f assume valori reali su V. Osserviamo che, pur di scegliere $\tilde{V}$ in modo che ogni componente connessa intersechi V in un aperto di V, l'applicazione

$$\Gamma^{R}_{\tilde{V}} \to \Gamma_{V}$$

è iniettiva. Basterà quindi provare il teorema per $\Gamma^{R}_{\tilde{V}}$. Sia $\{x_n\}$ una successione divergente di punti di $\tilde{V}$, e sia $y_n = \sigma(x_n)$. Vogliamo costruire una funzione $\tilde{\psi} \in \Gamma^{R}_{\tilde{V}}$ tale che $\lim\limits_{n\to\infty} |\tilde{\psi}(x_n)| = +\infty$. Associamo ad ogni x_n un numero reale $\varphi(x_n)$, in modo che $\lim\limits_{n\to\infty} |\varphi(x_n)| = +\infty$, e poniamo $\varphi(\sigma(x_n)) = \varphi(y_n) = \overline{\varphi(x_n)}$. Per il teorema B è possibile estendere questa funzione φ (definita su $\{x_n\}$ e su $\{y_n\}$) ad una funzione $\tilde{\varphi}$ definita su $\tilde{V}$. $\tilde{\varphi}$ in generale non apparterrà a $\Gamma^{R}_{\tilde{V}}$, ma se consideriamo la funzione

$$\tilde{\psi}(x) = \tfrac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}(x) + \overline{\tilde{\varphi}(\sigma(x))}\right)$$

$\tilde{\psi}$ verifica le proprietà richieste, cioè $\psi \in \Gamma^{R}_{\tilde{V}}$ e inoltre, poichè $\tilde{\psi}(x_n) = \tilde{\varphi}(x_n)$ per ogni n, $\lim\limits_{n\to\infty} |\tilde{\psi}(x_n)| = +\infty$. Consideriamo ora la famiglia di funzioni di $\Gamma^{R}_{\tilde{V}}$ così definita $F = \{f_1 = \tilde{\psi}, f_2 = e^{\tilde{\psi}}, f_3 = e^{\tilde{\psi}}, \dots\}$. F è di trascendenza infinita, poichè se esistesse un numero finito di funzioni di F algebricamente dipendenti, siano $f_{i_1}, \dots, f_{i_k}$, con $i_1 < \dots < i_k$, allora per esempio f_{i_k} si potrebbe esprimere mediante una relazione algebrica delle $f_{i_1}, \dots, f_{i_{k-1}}$, cioè

$$f_{i_k} = P(f_{i_1}, \dots, f_{i_{k-1}}) \tag{2}$$

ma f_{i_k} diverge su $\{x_n\}$ di ordine di infinito maggiore di $P(f_{i_1}, \dots, f_{i_{k-1}})$ e pertanto la (2) non è possibile.

Il teorema è così provato.

Bibliografia

[**1**] A. Andreotti and W. Stoll, *Analytic and algebraic dependence of meromorphic functions*, Springer Verlag, Berlin 1971.

[**2**] H. Grauert, *On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds*, Ann. of Math. **68** (1958), 460-472.

[3] L. HÖRMANDER, *An introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand, Princeton 1966.

[4] A. TOGNOLI: $[\bullet]_1$ *Sulla classificazione dei fibrati analitici reali E-principali*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **23** (1969), 75-86; $[\bullet]_2$ *About the set of non coherence of a real analytic variety*, C.I.M.E. Singularities of analitic spaces. Cremonese, Roma 1975.

Resumé

Dans cet article on veut démontrer le théorème suivant: Soit V un espace analytique réel qui adment une structure cohérente; soit dim $V \geqslant 1$; *alors, si Γ_V est l'anneau des fonctions analytiques sur V*, tras $\Gamma_V = +\infty$.

* * *