Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 391-399

VITTORIO E. BONONCINI (*)

Soluzioni periodiche di equazioni differenziali del secondo ordine. (**)

Introduzione.

Nel presente lavoro consideriamo l'equazione differenziale del secondo ordine $x'' = f(t, x)$ ove f è continua in E^2, periodica di periodo $\tau = 2\pi/\omega$ in t e soddisfacente la condizione di simmetria $f(-t, -x) = -f(t, x)$. Nel n. **2** diamo un teorema che assicura l'esistenza di almeno una soluzione periodica $x(t)$ di periodo τ e dispari e diamo inoltre una stima $R \geqslant |x(t)|$ per il valore assoluto delle soluzioni periodiche delle quali dimostriamo l'esistenza. Il teorema di esistenza è basato sull'uso del teorema del punto unito di Schauder, sull'uso del processo alternativo di Cesari e su precise valutazioni della norma di certi operatori lineari in classi di funzioni continue in $[0, \tau]$. Nel n. **4** ci occupiamo delle suddette valutazioni e nel n. **3** diamo alcuni esempi.

1. - Il problema dell'esistenza di soluzioni periodiche di perturbazione è stato studiato anni fa da diversi autori, in particolare da Gambill ed Hale [**1**] e da Cesari $[\mathbf{2}]_1$, per sistemi $x' + Ax = \varepsilon f(t, x)$ ove A è una matrice costante di tipo $n \times n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f(t, x)$ funzione periodica in t ed ε è un piccolo parametro. Successivamente Cesari $[\mathbf{2}]_2$ sviluppò il metodo alternativo così da includere situazioni ove non vi sono piccoli parametri e queste considerazioni diedero luogo ad altri studi e lavori di Hale, Knobloch, Mawhin, Sanchez, Kannan, Sather e altri $[\mathbf{2}]_3$. Ad esempio Cesari mostrò che l'equazione $x'' + x^3 = \operatorname{sen} t$ ha sempre una soluzione periodica di periodo 2π $[\mathbf{2}]_2$ ed

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Generale e Finanziaria, Università, 40126 Bologna, Italia.
(**) Ricevuto: 2-VIII-1977.

Hale studiò il problema dell'esistenza di soluzioni periodiche in relazione a proprietà di simmetria del sistema ([**3**], pag. 267).

Nel presente lavoro, nell'indirizzo di Cesari, consideriamo l'equazione scalare $x''=f(t,x)$ e mostriamo che se $f(t,x)$ è continua in E^2, periodica in t di periodo $\tau=2\pi/\omega$, con $f(-t,-x)=-f(t,x)$, e se esistono due numeri $R>0$, $R'>0$ tali che $1{,}26627\omega^{-2}R'\leqslant R$ e $|f(t,x)|\leqslant R'$ per $|x|\leqslant R$, allora esiste una soluzione periodica dispari $x(t)$ di periodo τ con $|x(t)|\leqslant R$.

2. - L'esistenza di soluzioni periodiche.

Consideriamo l'equazione differenziale del secondo ordine

$$x''=f(t,x)\,, \tag{1}$$

ove $f(t,x)$ è una funzione continua in E^2 e periodica in t di periodo $\tau=2\pi/\omega$. Segue che ogni possibile soluzione $x(t)$ di periodo τ appartiene allo spazio S di tutte le funzioni $x(t)$, $-\infty<t<+\infty$, continue e periodiche di periodo τ. Ogni elemento $x(t)$ di S ha la serie di Fourier

$$x(t)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\,\mathrm{sen}\,n\omega t)\,.$$

Se si assume in S come norma $\|x\|=\sup_t|x(t)|$, risulta che S è uno spazio di Banach. Se f denota l'operazione definita da $fx=f[t,x(t)]$ con $x\in S$, allora $f\colon S\to S$. Indichiamo con P l'operazione definita da $Px=\tau^{-1}\int_0^\tau x(t)\,dt$ [**2**]$_1$, il valore medio di x, e pertanto $P\colon S\to S$, $PP=P$ (cioè P è idempotente). Inoltre se I è l'operazione identica, $S_0=PS$, $S_1=(I-P)S$, si ha che S ha la decomposizione $S=S_0+S_1$ (somma diretta). Ogni elemento x di S_1 ha la serie di Fourier

$$x(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\,\mathrm{sen}\,n\omega t)\,.$$

Se indichiamo con $y=Jx$ l'unica primitiva di x periodica di periodo τ a media nulla e con $z=Hx=J(Jx)$ la primitiva di y anch'essa a media nulla, allora y e z hanno le serie di Fourier

$$y(t)=Jx=\sum_{n=1}^{\infty}[-(b_n/n\omega)\cos n\omega t+(a_n/n\omega)\,\mathrm{sen}\,n\omega t]\,,$$

$$z(t)=Hx=\sum_{n=1}^{\infty}[-(a_n/n^2\omega^2)\cos n\omega t-(b_n/n^2\omega^2)\,\mathrm{sen}\,n\omega t]\,.$$

Pertanto $J: S_1 \to S_1$, $H: S_1 \to S_1$ sono operatori lineari e continui e nel n. 4 determineremo le norme $\|P\|$, $\|J\|$, $\|H\|$, $\|H(I-P)\|$ di questi operatori. Qui è necessario dire che troveremo $\|H(I-P)\| = 1{,}26627\omega^{-2}$.

Se x è una soluzione della (1) allora $x'' = fx$ e necessariamente $x'' \in S_1$. Applicando l'operatore $H(I-P)$ risulta $H(I-P)x'' = H(I-P)fx$, onde $(I-P)x = H(I-P)fx$ e quindi

$$x = Px + H(I-P)fx\,, \tag{2}$$

ossia $x = Tx$ ove T è l'operatore definito da $Tx = Px + H(I-P)fx$. Questa è l'equazione ausiliaria $[2]_3$. Segue che x è un punto unito di T. Inversamente, se $x = Tx$ è un punto unito di T, si ha $x = a + H(I-P)\,fx$ con $a = Px$ quindi $x'' = (\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2)H(I-P)fx$ ed anche $x'' = (I-P)fx$, ossia $x'' - f[t, x(t)] = -Pf[t, x(t)]$. Segue che se $x = Tx$ è una soluzione dell'equazione ausiliaria (2), allora x è una soluzione dell'equazione (1) se e soltanto se $Pfx = 0$, vale a dire se

$$\tau^{-1} \int_0^\tau f[t, x(t)]\,\mathrm{d}t = 0\,. \tag{3}$$

Questa è l'equazione di biforcazione o equazione determinante $[2]_3$.

Occupiamoci qui del caso in cui sia $f(-t, -x) = -f(t, x)$. Denotiamo con S_d il sottospazio di tutti gli elementi $x \in S$ con $x(t)$ periodica di periodo $2\pi/\omega$, continua e dispari, ossia $x(-t) = -x(t)$, e pertanto $Px = 0$ cioè $S_d \subset S_1$, inoltre $fx \in S_d$ per ogni $x \in S_d$, ossia $f: S_d \to S_d$ e $Pfx = 0$ per ogni $x \in S_d$. La equazione di biforcazione (3) è identicamente soddisfatta e nell'equazione ausiliaria (2) necessariamente $Px = 0$.

Teorema. *Sia $f(t, x)$ continua in E^2 con $f(t+\tau, x) = f(t, x)$, $\tau = 2\pi/\omega$, $f(-t, -x) = -f(t, x)$, e siano R, R' costanti positive tali che* $1{,}26627\omega^{-2} \cdot R' \leqslant R$ *e $|f(t, x)| \leqslant R'$ per $|x| \leqslant R$. In queste ipotesi l'equazione $x'' = f(t, x)$ ha almeno una soluzione $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, periodica di periodo τ, dispari, con $|x(t)| \leqslant R$.*

Dimostrazione. Per $x \in S_d$ e quindi $Px = 0$, l'equazione di biforcazione (3) è identicamente soddisfatta e l'equazione ausiliaria (2) si riduce a $x = H(I-P)fx$. Per $x \in S_d$, $\|x\| \leqslant R$, si ha $fx \in S_d$, $\|fx\| \leqslant R'$, $\|H(I-P)fx\| \leqslant 1{,}26627\omega^{-2}R' \leqslant R$ e quindi la sfera $\Sigma = [x \in S_d \mid \|x\| \leqslant R]$ è trasformata in se stessa dalla trasformazione T, ossia $T: \Sigma \to \Sigma$. La sfera Σ è certamente un insieme chiuso e convesso in S_d. Dimostriamo che T è una trasformazione compatta. Invero se $\{x_n\}$ è una successione in Σ allora, per le ipotesi fatte, si ha $\|x_n\| \leqslant R$, $\|fx_n\| \leqslant R'$ e se $y_n = H(I-P)fx_n$, allora $y_n' = J(I-P)fx_n$ e le funzioni periodiche e continue $y_n(t)$, $y_n'(t)$ sono equilimitate ed equiassolutamente continue. In base al teorema di Ascoli si può pertanto affermare che la successione $\{y_n\}$ possiede una sottosuccessione che è uniformemente convergente. Per il teorema di Schauder la trasformazione $T: \Sigma \to \Sigma$ possiede almeno un punto unito $x = Tx \in \Sigma \subset S_d$ e come si è detto l'equazione di biforcazione (3) è identicamente soddisfatta.

Si noti che non è stato necessario garantire che la trasformazione T sia una contrazione dato che si è usato il teorema del punto unito di Schauder e non quello di Banach.

3. - Esempi.

(*a*) L'equazione

$$x'' = ax^3 + b \operatorname{sen} t\,,$$

con a, b reali, possiede una soluzione periodica di periodo 2π se si può determinare un numero $R > 0$ tale che $1{,}26627\,\big(|a|R^3 + |b|\big) \leqslant R$.

Per essere $1{,}26627 < 9/7$ basta verificare che $(9/7)\,\big(|a|R^3 + |b|\big) \leqslant R$. Ad esempio per $|a| + |b| \leqslant 7/9$, $R = 1$ questa relazione è soddisfatta. Si può concludere che l'equazione $x'' = (1/3)\,(x^3 + \operatorname{sen} t)$ ha almeno una soluzione $x(t)$ periodica di periodo 2π, dispari, con $|x(t)| \leqslant 1$.

(*b*) L'equazione

$$x'' = a \operatorname{sen} F(x) + p(t) \qquad (a \text{ reale})\,,$$

ove $p(t)$ è una qualsiasi funzione periodica di periodo $2\pi/\omega$, continua e dispari, e $F(x)$ è una qualunque funzione continua e dispari, ha sempre almeno una soluzione $x(t)$ periodica dello stesso periodo e dispari.

Infatti, posto $b = \|p(t)\| = \max |p(t)|$, si ha $|f(t, x)| = |a \operatorname{sen} F(x) + p(t)| \leqslant$ $\leqslant |a| + b$, ossia $R' = |a| + b$, e pertanto la condizione $1{,}26627\omega^{-2} R' = 1{,}26627\omega^{-2} \cdot$ $\cdot \big(|a| + b\big) \leqslant R$ è sempre soddisfatta prendendo $R = 1{,}26627\omega^{-2}\big(|a| + b\big)$.

Per esempio l'equazione

$$x'' = \operatorname{sen}\,(x^{1/3}) + \operatorname{sen} t\,,$$

con $a = 1$, $b = 1$, $\omega = 1$, $F(x) = x^{1/3}$, ha almeno una soluzione $x(t)$ periodica di periodo 2π e dispari con $|x(t)| \leqslant 18/7 < 2{,}58$ avendo sostituito nel calcolo 1,26627 con 9/7.

Si noti che qui $F(x)$ non è lipschitziana e pertanto non c'è da aspettarsi che T come trasformazione di S_d in S_d sia lipschitziana e tanto meno una contrazione.

Come altro esempio l'equazione

$$x'' = (1/6)\,\mathrm{sen}\,(12x) - (1/6)\,\mathrm{sen}\,(2t)\,,$$

con $a = 1/6$, $b = 1/6$, $\omega = 2$, ha almeno una soluzione $x(t)$ periodica di periodo π e dispari con $|x(t)| \leqslant (9/7)(1/4)(1/6 + 1/6) = 3/28$ (si è sostituito 1,26627 con $9/7$).

(*c*) L'equazione $x'' = f(t, x)$, con $f(t, x)$ periodica in t di periodo $\tau = 2\pi/\omega$, $f(-t, -x) = -f(t, x)$, $|f(t, x)| \leqslant a + \alpha|x|$, a ed α costanti positive, e $1{,}26627 \cdot \omega^{-2}\alpha < 1$, ha almeno una soluzione periodica $x(t)$ di periodo τ e dispari con $x(t) \leqslant R = (1 - 1{,}26627\omega^{-2}\alpha)^{-1} 1{,}26627\omega^{-2}\, a$.

Infatti per $|x| \leqslant R$ si ha $|f(t, x)| \leqslant a + \alpha R = R'$ e la condizione $1{,}26627\omega^{-2} \cdot R' \leqslant R$ diviene $1{,}26627\omega^{-2}(a + \alpha R) \leqslant R$ e questa è certo verificata se si prende R come è è indicato sopra. Come già si è fatto si può sostituire 1,26627 con $9/7$.

Per esempio per l'equazione

$$x'' = \mathrm{arctg}\, x + (7/18)\,x + \mathrm{sen}\, t\,,$$

con $\omega = 1$, $\tau = 2\pi$, $\alpha = 7/18$, $a = 1 + \pi/2$, si ha $(9/7)\alpha = 1/2 < 1$ e perciò tale equazione ha almeno una soluzione $x(t)$ periodica di periodo 2π, dispari, con $|x(t)| \leqslant R = 2 \cdot 9a/7 = (18/7)(1 + \pi/2)$.

4. - Stime degli operatori.

(*a*) Sia $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, una funzione continua, periodica di periodo 1. Dimostriamo che esiste una funzione $y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, verificante le condizioni

$$y'(t) = x(t)\,, \qquad \int_0^1 y(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Si ha $y(t) = \int_0^t x(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + c$ e imponendo la condizione assegnata deve risultare $\int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t x(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + c = 0$ onde, integrando per parti, si deduce

$$c = \int_0^1 (-1 + \alpha)\,x(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Segue che

$$(J^*x)(t) = y(t) = \int_0^t x(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + \int_0^1 (-1 + \alpha)\,x(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \int_0^1 K(t, \alpha)\,x(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\,,$$

ove $K(t, \alpha) = \alpha$ se $0 \leqslant \alpha \leqslant t \leqslant 1$, $K(t, \alpha) = -1 + \alpha$ se $0 \leqslant t < \alpha \leqslant 1$ e pertanto

$$\|J^* x\| \leqslant \|x\| \max \int_0^1 |K(t, \alpha)|\, d\alpha ,$$

ove $\int_0^1 |K(t, \alpha)|\, d\alpha = 2^{-1}[t^2 + (1-t)^2]$. Il massimo dell'integrale si ha per $t = 0$ e $t = 1$ e il massimo è uguale a $1/2$. Si ha quindi $\|J^*x\| \leqslant 2^{-1}\|x\|$ e $\|J^*\| \leqslant 1/2$. D'altra parte se prendiamo $x(t) = 1$, abbiamo $(J^*x)(t) = y(t) = t - 1/2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, e dunque $\|J^*x\| = 1/2$ e $\|J^*\| \geqslant 1/2$. Ne segue che $\|J^*\| = 1/2$. In altre parole, per ogni $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, esiste una unica funzione continua a media nulla $y = J^*x$ e si ha $\|J^*x\| \leqslant (1/2)\|x\|$ e $\|J^*\| = 1/2$.

In questi calcoli non abbiamo supposto che x sia a media zero, quindi J^* non è l'operatore J o $J(I-P)$.

(*b*) La $x(t)$ sia la funzione considerata in (*a*) però a media zero. In questa ipotesi si può aggiungere a $K(t, \alpha)$ una qualunque costante γ, o una qualunque funzione della sola t, senza che l'integrale $\int_0^1 K(t, \alpha)x(\alpha)\, d\alpha$ cambi di valore perchè $\int_0^1 \gamma(t)x(\alpha)\, d\alpha = \gamma(t)\int_0^1 x(\alpha)\, d\alpha = 0$, ossia si può sostituire a $K(t, \alpha)$ il nucleo $K'(t, \alpha) = K(t, \alpha) + \gamma(t)$.

Osservato per esempio che il salto di $K(t, \alpha)$ e quindi di $K'(t, \alpha)$ rispetto ad α nel punto $\alpha = t$ è uguale a -1, si può determinare $\gamma(t)$ in modo che i limiti sinistro e destro di $K'(t, \alpha)$ per $\alpha \to t - 0$ e $\alpha \to t + 0$ siano rispettivamente $1/2$ e $-1/2$. Allo scopo basta scegliere $\gamma(t)$ in modo che risulti $t + \gamma(t) = 1/2$ e $-1 + t + \gamma(t) = -1/2$, ossia $\gamma(t) = 1/2 - t$. Ne risulta che $K'(t, \alpha) = 2^{-1} + \alpha - t$ se $0 \leqslant \alpha \leqslant t \leqslant 1$, $K'(t, \alpha) = -2^{-1} + \alpha - t$ se $0 \leqslant t < \alpha \leqslant 1$. Il nucleo $K'(t, \alpha)$ ha valori compresi fra -2^{-1} e 2^{-1}. Inoltre, per ogni $0 \leqslant t \leqslant 1$ fisso, possiamo pensare $K'(t, \alpha)$ come funzione periodica della sola α di periodo 1, $\Phi(\alpha)$, $-\infty < \alpha < +\infty$, definita da $\Phi(\alpha) = \alpha - 1/2$ per $0 \leqslant \alpha < 1$, a meno dello spostamento $\alpha = \alpha' - t$. Si ha quindi

$$\int_0^1 |K'(t, \alpha)|\, d\alpha = 2 \int_0^{1/2} (2^{-1} - \alpha)\, d\alpha = 1/4 ,$$

e

$$y(t) = (Jx)(t) = \int_0^1 K'(t, \alpha)x(\alpha)\, d\alpha , \qquad |y(t)| = |(Jx)(t)| \leqslant \|x\| \int_0^1 |K'(t, \alpha)|\, d\alpha ,$$

ossia $\|y\| = \|Jx\| \leqslant 4^{-1}\|x\|$ e $\|J\| \leqslant 4^{-1}$. D'altra parte se prendiamo la funzione a media nulla $x(t) = 1$ se $0 \leqslant t \leqslant 2^{-1}$, $x(t) = -1$ se $2^{-1} < t \leqslant 1$, allora $y(t) = t - 1/4$ se $0 \leqslant t \leqslant 2^{-1}$, $y(t) = -t + 3/4$ se $2^{-1} \leqslant t \leqslant 1$ con $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1/4$

e dunque $\|J\| \geqslant 4^{-1}$. Ne segue che $\|J\| = 4^{-1}$. In altre parole per ogni $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, a media nulla, $y(t) = Jx$ verifica la relazione $\|Jx\| \leqslant 4^{-1}\|x\|$, con $\|J\| = 4^{-1}$. Notiamo che la particolare funzione $x(t)$ che abbiamo scelta non è continua, ma essa può essere resa continua per interpolazione lineare tra $2^{-1} - \varepsilon$ e $2^{-1} + \varepsilon$ con ε piccolo quanto si vuole. Corrispondentemente la $y(t)$ varia con ε di tanto poco quanto si vuole e così le norme. Dunque $\|J\| = 4^{-1}$ quando J opera su funzioni continue $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, a media nulla.

(c) Si noti che $Px = \int_0^1 x(t)\,dt$ e pertanto $\|Px\| \leqslant \|x\|$, ossia $\|P\| \leqslant 1$. Assumendo $x(t) = 1$ si vede che $\|P\| \geqslant 1$ e quindi $\|P\| = 1$. Ne risulta che $\|I - P\| \leqslant 1 + 1 = 2$. Se per ogni n intero positivo denotiamo con $x_n(t)$ la funzione $x_n(t) = 1$ se $0 \leqslant t \leqslant 1 - n^{-1}$, $x_n(t) = -1$ se $1 - n^{-1} < t \leqslant 1$, allora $\|x_n\| = 1$, $Px_n = 1 - 2n^{-1}$, e $y_n(t) = x_n - Px_n$ è la funzione $y_n(t) = 2n^{-1}$ se $0 \leqslant t \leqslant 1 - n^{-1}$, $y_n(t) = -2 + 2n^{-1}$ se $1 - n^{-1} < t \leqslant 1$, con $\|y_n\| = 2 - 2n^{-1}$. Dunque $\|y_n\| = (2 - 2n^{-1})\|x_n\|$, $\|I - P\| \geqslant 2 - 2n^{-1}$ per ogni n, $\|I - P\| \geqslant 2$, e infine $\|I - P\| = 2$.

Se si combina con il risultato in (b) si ricava che $\|J(I - P)\| \leqslant 4^{-1} \cdot 2 = 2^{-1}$. Tuttavia possiamo dimostrare che ancora si ha $\|J(I - P)\| = 4^{-1}$ e pertanto $\|J(I - P)x\| \leqslant 4^{-1}\|x\|$ per ogni funzione continua $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Infatti se $z = (I - P)x$ e $y = Jz = J(I - P)x$ risulta

$$z(t) = x(t) - \int_0^1 x(\alpha)\,d\alpha\,,$$

$$y(t) = \int_0^1 K(t, \alpha)x(\alpha)\,d\alpha - (t - 1/2)\int_0^1 x(\alpha)\,d\alpha = \int_0^1 K''(t,\alpha)x(\alpha)\,d\alpha\,,$$

ove $K''(t, \alpha) = \alpha - (t - 1/2) = 2^{-1} + \alpha - t$ se $0 \leqslant \alpha \leqslant t \leqslant 1$, $K''(t, \alpha) = -1 + \alpha - (t - 1/2) = -2^{-1} + \alpha - t$ se $0 \leqslant t < \alpha \leqslant 1$, e quindi $K''(t, \alpha) = K'(t, \alpha)$ e cioè il nucleo che abbiamo costruito in (b). Dunque $\|y\| \leqslant 4^{-1}\|x\|$, ossia $\|J(I - P)\| \leqslant 1/4$. D'altra parte per la funzione $x(t) = 1$ se $0 \leqslant t \leqslant 2^{-1}$, $x(t) = -1$ se $2^{-1} < t \leqslant 1$ abbiamo $Px = 0$, $z = (I - P)x = x$ e, come si è visto in (b), $\|y\| = 4^{-1}$, $\|x\| = 1$, onde $\|J(I - P)\| \geqslant 4^{-1}$. Abbiamo quindi $\|J(I - P)x\| \leqslant 4^{-1}\|x\|$ per ogni funzione continua $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, e $\|J(I - P)\| = 4^{-1}$.

(d) Per quanto riguarda i valori di $\|H\|$ e $\|H(I - P)\|$ abbiamo $(d)_1$: $Hx = J(Jx)$ per $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, continua e a media zero e quindi $\|Hx\| \leqslant 4^{-2}\|x\|$ e analogamente $(d)_2$: $H(I - P)x = J[J(I - P)x]$ per qualunque $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, continua e pertanto $\|H(I - P)x\| \leqslant 4^{-2}\|x\|$. D'altra parte, per ogni funzione continua $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, e $y = H(I - P)x = J[J(I - P)x]$, si ha

$$y(t) = \int_0^1 K'(t, \alpha)\,d\alpha \int_0^1 K'(\alpha, \beta)x(\beta)\,d\beta = \int_0^1 K_0(t, s)x(s)\,ds\,,$$

con

$$K_0(t, s) = \int_0^1 K'(t, \alpha) K'(\alpha, s)\, d\alpha =$$

$$= \begin{cases} -12^{-1} + 2^{-1}(t-s) - 2^{-1}(t-s)^2 & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1\,, \\ -12^{-1} + 2^{-1}(s-t) - 2^{-1}(s-t)^2 & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Considerata la funzione $v(u) = -12^{-1} + 2^{-1}u - 2^{-1}u^2$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, si prova che

$$\int_0^1 |K_0(t, s)|\, ds = \int_0^1 |v(u)|\, du\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1\,.$$

La funzione $v(u) = 24^{-1} - 2^{-1}(u - 2^{-1})^2$ è tale che $v(1/2 + u) = v(1/2 - u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1/2$, ha i due zeri $u_1 = 6^{-1}(3 - \sqrt{3})$, $u_2 = 6^{-1}(3 + \sqrt{3}) = 1 - u_1$ e l'integrale $\int_0^1 |v(u)|\, du$ ha il valore $\sqrt{3}/54$. Si ha quindi

$$\|H(I-P)\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 |K_0(t, s)|\, ds = \sqrt{3}/54\,.$$

Abbiamo dimostrato che $(d)_3$: $\|Hx\| \leqslant (\sqrt{3}/54)\|x\|$ per ogni $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, continua e a media nulla e che $(d)_4$: $\|H(I-P)x\| \leqslant (\sqrt{3}/54)\|x\|$ per qualunque $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, continua, e che la costante indicata è la migliore possibile, cioè, in breve, che $\|H\| = \sqrt{3}/54$, $\|H(I-P)\| = \sqrt{3}/54$.

(*e*) Per funzioni continue $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, periodiche di periodo $\tau = 2\pi/\omega$, la funzione $y = J^*x$, pure periodica, a media nulla e in generale discontinua nei punti t multipli di τ, con $dy/dt = x(t)$ in $[0, 2\pi/\omega]$, $Py = 0$, ha la proprietà $\|J^*x\| = \|y\| \leqslant (\pi/\omega)\|x\|$ con $\|J^*\| = \pi/\omega$. Analogamente $\|H(I-P)x\| \leqslant (\sqrt{3}/54)(2\pi/\omega)^2\|x\|$. Poichè

$$\sqrt{3}/54 = 0{,}032075\,, \qquad 4\pi^2 = 39{,}478417\,, \qquad (\sqrt{3}/54)\,4\pi^2 = 1{,}26627\,,$$

si ha $\|H(I-P)x\| \leqslant 1{,}26627\omega^{-2}\|x\|$ con $\|H(I-P)\| = 1{,}26627\omega^{-2}$.

Infatti la trasformazione $t = 2\pi s/\omega$ dà luogo alla relazione $dy/ds = (2\pi/\omega)\cdot x(2\pi s/\omega)$ e il risultato segue da (*a*) e da (*d*).

Se $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, periodica di periodo $\tau = 2\pi/\omega$, ha media nulla, allora per la funzione $y = Jx$, unica primitiva di x a media nulla e continua in $-\infty < t < +\infty$, si ha $\|y\| = \|Jx\| \leqslant (\pi/2\omega)\|x\|$ con $\|J\| = \pi/2\omega$. Analogamente $\|Hx\| = \|J(Jx)\| \leqslant (\sqrt{3}/54)(2\pi/\omega)^2\|x\| = 1{,}26627\omega^{-2}\|x\|$ con $\|H\| = 1{,}26627\omega^{-2}$. Questo segue da (*b*) e da (*d*) con lo stesso ragionamento.

Bibliografia.

[1] R. A. GAMBILL and J. K. HALE, *Subharmonic and ultraharmonic solutions for weakly nonlinear systems*, J. Rat. Mech. Anal. **5** (1956), 333-398.

[2] L. CESARI: $[\bullet]_1$ *Existence theorems for periodic solutions of non linear lipschitzian differential systems and fixed point theorems*, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Ann. Math. Stud. Princeton, New York **5** (1960), 115-172; $[\bullet]_2$ *Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations*, Contributions to differential equations, Ed. Wiley, **1** (1963), 149-187; $[\bullet]_3$ *Functional analysis, nonlinear differential equations and the alternative method*, 1-197 (dal libro: L. CESARI, R. KANNAN, J. D. SCHUUR, *Nonlinear functional analysis and differential equations*, Ed. Dekker, New York 1976).

[3] J. K. HALE, *Ordinary differential equations*, Wiley N. Y. - Interscience (1969).

* * *