Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 357-389

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

I contributi di Mauro Picone alla Balistica razionale. (**)

A MAURO PICONE, in memoriam.

1. - Premessa.

1.1. - L'Accademia Nazionale dei Lincei ha pubblicato, nel 1976, fra le « Biografie e bibliografie degli Accademici Lincei » quella di Mauro Picone (1): alla fine dei brevi cenni biografici sono riportate le seguenti righe: « M. Picone è autore di più di 370 pubblicazioni concernenti le equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali, le equazioni integrali, l'analisi funzionale ed il calcolo delle variazioni, gli sviluppi in serie e l'approssimazione delle funzioni, la geometria differenziale, la *meccanica* (*la balistica in ispecie*) (2), la teoria matematica dell'elasticità, l'automazione del calcolo » . Segue poi un elenco bibliografico di 286 pubblicazioni: da tale elenco risulta che le pubblicazioni che riguardano essenzialmente la Balistica esterna, razionale ed applicata, sono le quindici consecutive elencate dal n. 20 al n. 34, uscite negli anni 1917-1918, la pubblicazione n. 38, del 1919, e una decina di altre pubblicazioni (nn. 57, 89, 91, 93, 99, 111, 114, 134, 148, 277) comprese fra il 1923 e il 1942, ad eccezione dell'ultima, che riporta il testo di una conferenza tenuta a Torino nel 1970.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

L'autore sperava di poter dedicare questo lavoro « A Mauro Picone, nel Suo 92° compleanno » (che ricorreva il 2 maggio 1977): l'improvvisa scomparsa del prof. Picone, avvenuta in Roma l'11 aprile 1977, trasforma la dedica « in memoriam ».

(**) Ricevuto: 28-VII-1977. La Direzione della Rivista di Matematica della Università di Parma è lieta di accogliere questo studio che illustra alcuni aspetti, fra i meno noti, dell'opera dell'insigne Maestro prof. Mauro Picone, che a Parma trascorse gli anni della prima giovinezza e compí gli studi secondari presso l'Istituto Tecnico « M. Melloni ».

(1) Si veda [**12**]$_{14}$.

(2) Il corsivo è nostro.

Scopo di questo studio è di illustrare i contributi, veramente notevoli, apportati da Mauro Picone, in un arco molto ampio di tempio, alla Balistica razionale e di porne in risalto gli aspetti fondamentali, alcuni dei quali anche assai poco noti.

1.2. – Per poter comprendere gli eventi che costrinsero, nel 1916, il prof. Picone ad occuparsi di Balistica, è opportuno presentare un antefatto: mi pare che la cosa migliore sia di riportare alcuni brani (pp. 5-8) da «La mia vita» [**12**]$_{12}$, in cui Picone dice:

«Chiamato alle armi ... nell'aprile del 1916, fui assegnato al 6° Reggimento di Artiglieria ..., col grado di sottotenente della territoriale, senza che io avessi mai prestato, in precedenza, servizio militare e avessi mai visto, da vicino, un cannone. Nel luglio del 1916 ... fui inviato alla fronte di combattimento e assegnato alla I Armata, operante sulle montagne del Trentino. ... Presentatomi al Comando d'artiglieria della I Armata ... a notte inoltrata, ... fui subito ricevuto dal Comandante, Colonnello Baistrocchi, che mi aspettava [e che si era dimostrato interessato ad avere alle sue dipendenze un ufficiale esperto in Calcolo]. Questi prese immediatamente a mostrarmi, sulla carta militare ..., lo schieramento delle dipendenti nostre artiglierie ..., costituite da grossi e medi calibri, situate ... ad una quota che variava dai 400 ai 1000 metri sul livello del mare, alle quali era stato assegnato il compito di battere il Pasubio e l'Alpe di Cosmagnon e i loro rovesci ..., di quota superiore ai 2000 metri .... Egli mi chiese, alla fine, il mio parere in proposito! Si può ben immaginare quanto io ne sia rimasto sbalordito! ... Io risposi ..., forse anche non riuscendo a celargli il mio stupore, che non possedevo nozione alcuna di artiglieria e, tanto meno, del suo impiego tattico. Ma questi ... mi disse: „*Si tratta di risolvere un problema di calcolo e lei deve essere in grado di farlo, si tratta di calcolare i dati da fornire alle nostre artiglierie, per il tiro contro bersagli per i quali le tavole di tiro regolamentari, che esse possiedono, non sono sufficienti*".

Ma, io aggiunsi, non ho neppure nessuna nozione di Balistica, sulla quale, suppongo, devono fondarsi quei calcoli. Allora il Colonnello tirò fuori da una cassetta d'ordinanza un ingiallito voluminoso libro e mi disse: „*Qui c'è il trattato di Balistica di Francesco Siacci* (3), *le do l'ordine di studiarlo e di ricavarne, entro un mese da oggi, il calcolo dei dati di tiro per le nostre artiglierie*". E mi congedò.

Mi misi febbrilmente all'opera, dedicandovi anche la notte ..., pervenendo a spiegarmi le difficoltà, nel calcolo dei dati di tiro, incontrate dai nostri artiglieri, che non potevano essere da essi superate .... Le tavole di tiro regolamentari fornivano i dati di tiro per bersagli posti nello stesso piano orizzontale della batteria, consentendo lievi correzioni, dei dati stessi, ove si fossero verificati dislivelli fra batteria e bersaglio, che non dovevano però superare certi limiti. Ora, fra le gole del Trentino, questi limiti erano di regola sorpassati, ed anche sovente sorpassati fino a tal punto da essere il dislivello fra batteria e bersaglio dello stesso ordine di grandezza della loro mutua distanza orizzontale. ...

---

(3) F. Siacci (1839-1907), il cui celebre trattato di Balistica [**18**]$_1$ fu pubblicato, in varie edizioni e in una traduzione francese [**18**]$_2$ fra il 1870 e il 1892, è fra i massimi pionieri della Balistica razionale classica. I più noti trattati usciti successivamente (si vedano, in particolare, [**2**]$_2$, [**3**]$_2$, [**11**]), sono concordi nel riconoscere i fondamentali contributi a lui dovuti.

Occorreva, senza indugio, rifare, con criteri tutti diversi, le tavole di tiro per le dette artiglierie, fondandosi su taluni perfezionamenti non immediati della Balistica razionale classica, ciò che non poteva essere conseguito che da un matematico (4).

Li ottenni nel mese prescrittomi e a cominciare dal successivo mese di settembre 1916 tutte le artiglierie del 21° Raggruppamento tiravano correttamente con dati calcolati da me. ... Durante la sosta invernale ... si lavorò alacremente ... per la compilazione delle nuove tavole di tiro .... In queste tavole si introdussero — in un secondo tempo — anche i coefficienti ... per la correzione dei dati di tiro in relazione alle variazioni fisiche e dinamiche dell'atmosfera, nonché di quelle del munizionamento e del materiale, risolvendo anche per questo non facile compito, problemi di Matematica. Naturalmente, la necessità di queste ultime correzioni s'impose altresí alle artiglierie operanti in pianura e presso tutti gli eserciti belligeranti. In Francia, ad esempio, per soddisfare tale necessità, si fondò a Parigi un Istituto ove lavoravano matematici famosi, fra i quali ... Émile Borel e Jacques Hadamard, dell'Accademia di Francia. A guerra finita si poté, nonostante ciò, dimostrare (5) che, per il calcolo della correzione da apportare ai dati di tiro, riguardanti la perturbazione provocata sul moto del proietto dal vento, il metodo seguito da noi aveva una razionalità non posseduta da quello adottato dai francesi. I due metodi concordano quando il vento si mantiene costante, in intensità e in direzione, alle varie quote e pertanto i francesi non potevano essere facilmente edotti dell'irrazionalità del loro metodo, poiché nei loro tiri, prevalentemente in pianura, avevano quasi sempre da considerare venti pressoché costanti alle varie quote. Non era invece cosí per noi. ...

Con piacere assolvo l'obbligo di ricordare la preziosa, spesso determinante, collaborazione che mi dettero, nell'adempimento dei difficili compiti sopraindicati, gli indimenticabili amici scomparsi Alessandro Terracini e Antonio Signorini » (6).

1.3. – Il lavoro compiuto negli anni 1916-1918 fu decisivo per uno dei campi dell'attività futura di Picone: quello dell'Analisi numerica e dell'automazione del calcolo. Ciò è pure ricordato in [**12**]$_{12}$, pp. 10-14, ed era stato più volte da lui ribadito quando sosteneva la necessità dell'impiego delle macchine calcolatrici anche da parte del matematico. Ad esempio, in un discorso tenuto nel 1955, in occasione dell'inaugurazione della calcolatrice elettronica dell'INAC, Picone diceva (7):

« Questa necessità apparve alla mia mente — nonostante il purismo scientifico, sano e fecondo purismo scientifico, inculcatole nella Scuola Matematica pisana, da pochi anni lasciata — quando mi trovai, durante la guerra 1915-18, dinanzi ai problemi di tiro che si presentavano alle nostre artiglierie a grande gittata, che operavano sulle Alpi, i quali non potevano essere risoluti se non con l'intervento del matematico. Mi venne cosí, fin d'allora, l'idea di un Istituto, nel quale matematici, muniti dei più potenti strumenti di calcolo, avessero potuto collaborare con cultori di scienze sperimentali o con tecnici per ottenere la concreta risoluzione dei loro problemi di valutazione numerica ». Ed aggiungeva: « Nel 1927, presso la mia cattedra di Calcolo Infinitesimale dell'Università di Napoli, potei realizzare un embrionale Istituto di Calcolo numerico.

(4) Il corsivo è nostro.
(5) Cfr. [**12**]$_5$; si veda anche il n. **6** di questo lavoro.
(6) Si veda anche [**20**], pp. 84-88.
(7) Si veda « La Ricerca Scientifica », anno 26°, n. **1** (1956).

I buoni risultati da questo ottenuti indussero nel 1932, il Consiglio Nazionale delle Ricerche, allora presieduto da Gugliemo Marconi, a trasferire quell'Istituto a Roma, elevandolo al rango di Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo ».

1.4. – Verso la fine del 1973, la lettura, del tutto casuale, di [**12**]$_{12}$ e la « scoperta », pressoché contemporanea, nella biblioteca dell'Istituto Matematico di Parma, di un rarissimo volumetto, ivi conservato dal 1919, dal titolo *Tavole di tiro da montagna. Fascicolo IV* (1918) (8), recante sul frontespizio la seguente dedica, assai sbiadita dal tempo ma ancora leggibile: « *Alla Biblioteca della Scuola Matematica della R. Università di Parma, omaggio di M. Picone* » (9), mi indussero, insieme ad altre ragioni, a mettermi in contatto col prof. Picone (10). Fra queste altre ragioni vi era un certo « metodo di Picone per archi successivi » (11) di cui sentivo talvolta parlare, senza riuscire a trovarne traccia nelle monografie e nei trattati di Balistica che fino ad allora avevo avuto occasione di consultare.

A ciascuno dei più importanti lavori che verranno qui esaminati sarà dedicato un numero, il cui titolo coinciderà a volte col titolo del lavoro originale; qualche altro numero sarà dedicato a dare brevi notizie sui rimanenti lavori. Per comodità del lettore, verranno anche in seguito riportati alcuni passi dei lavori originali, particolarmente di quelli oggi assai difficilmente reperibili.

2. - Formole razionali per la correzione del tiro (1917).

2.1. – Nell'introduzione al suo primo lavoro di Balistica [**12**]$_1$, datato 17 febbraio 1917, M. Picone, rilevata la non attendibilità delle tavole di tiro, allora

(8) Su queste *Tavole* si veda il n. **5.2**.

(9) A Parma Picone aveva vissuto diversi anni e si era diplomato, nel 1903, alla sezione Fisico-matematica dell'Istituto Tecnico « M. Melloni », dove il padre, ingegnere, era professore di Costruzioni (si veda [**12**]$_{12}$, pp. 2-3).

(10) Col prof. Picone sono stato in rapporti, per lo più epistolari (salvo una visita che gli feci a Roma nel maggio 1976), per motivi concernenti quasi esclusivamente i suoi studi di Balistica, dal dicembre 1973 all'aprile 1977 (l'ultima lettera che il prof. Picone mi inviò è datata 1° aprile 1977). Nell'ultima lettera che gli scrissi, il 26 marzo 1977, lo informavo di avere iniziato la stesura di questo lavoro (di cui gli avevo precedentemente dato notizia, ricevendone un vivo apprezzamento); ne ricevetti risposta, con la lettera del 1° aprile, in cui si compiaceva che venissero ricordati i suoi lavori, anche i meno noti, di Balistica, e mi diceva: « La cosa tanto più mi commuove quando penso che ciò avviene a Parma, città nella quale passai dieci anni della mia giovinezza ». Purtroppo quella lettera precedette solo di pochi giorni la Sua scomparsa. Questo mio studio vuole essere un modesto, ma appassionato e doveroso omaggio alla memoria di Mauro Picone, insigne Scienziato e Maestro, col quale ho avuto la fortuna di essere, in questi anni, in cordiali, affettuosi rapporti.

(11) Su tale metodo si veda il n. **8**.

in uso, nel caso di forti angoli di sito, ossia nel tiro con forti dislivelli, cosí prosegue:

« Detta h_0 l'altitudine balistica (ossia quella ben determinata altitudine a cui corrisponde, nella tavola del Saint Robert (12), un valore medio della densità dell'aria nel detto luogo al dato istante), alla quale, nelle tavole di tiro è stato supposto il pezzo, per correggere i dati di tiro forniti dalla tavola, per il tiro contro un segno alla distanza orizzontale x e verticale y dal pezzo, quando il pezzo sia all'altitudine balistica h, è riportato nella tavola un coefficiente H (che sarà funzione di x e di y), che, moltiplicato per $h-h_0$, dà la parte principale Δx della variazione dell'ascissa del punto in cui arriverebbe il proietto, sul piano orizzontale al dislivello y dal pezzo, qualora il proietto venisse lanciato cogli stessi dati di tiro forniti dalla tavola. Si dovrà allora, all'altitudine balistica h del pezzo, tirare con i dati che si ricavano dalle tavole, supponendo che le distanze orizzontale e verticale tra pezzo e segno siano $x-\Delta x$ e y. Nelle tavole di tiro sono, naturalmente, riportati i dati di tiro per un certo numero di particolari valori delle distanze x e y tra origine e segno, Questi dati, a seconda della tavola, possono riferirsi ad un angolo fisso φ di proiezione oppure ad una velocità di grandezza fissa v_0. Nel primo caso la tavola si dice *ad angolo fisso*, nel secondo *a carica fissa*.

Supponendo ora che le distanze $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, orizzontale e verticale, in cui vengono a trovarsi origine e segno, non siano contemplate nelle tavole, ed x e y siano le distanze più prossime, rispettivamente a $x+\Delta x$ e $y+\Delta y$, per le quali nelle tavole si trovano i dati di tiro, supposta l'origine alla stessa altitudine balistica considerata dalle tavole, per un più rapido aggiustamento del tiro, conviene che nelle tavole siano riportati due altri coefficienti di correzione A e B, che saranno funzioni di x e di y, tali che la combinazione $A\Delta x+B\Delta y$ dia, per una tavola ad angolo fisso, la correzione $\Delta\varphi$ da apportarsi a questo angolo, per una tavola a carica fissa, la correzione $\Delta\omega$ da apportarsi a questa carica.

Scopo di questa Nota è di far conoscere un calcolo razionale dei coefficienti H, A e B di correzione. Nei trattati di Balistica a me noti questi coefficienti, in ipotesi più particolari, sono dedotti *empiricamente*. Reputo utile far conoscere questo mio calcolo, che applico appunto nella compilazione delle nuove tavole di tiro ....

Pervengo al menzionato calcolo dei coefficienti imitando il procedimento di Poincaré (13) per lo studio degli integrali, delle equazioni della Meccanica celeste, infinitamente vicini ad un noto integrale, integrando cioè il sistema delle *equazioni alle variazioni*, relative alle variazioni dei parametri h, v_0, φ, per il sistema di equazioni differenziali a cui soddisfano, in funzione dell'inclinazione θ della tangente alla traiettoria, la grandezza v della velocità del centro di massa del proietto, e le coordinate x e y di questo.

In questi giorni il prof. Fubini (14), mediante una nuova e semplicissima concezione del problema, è pervenuto ... ponendosi da un punto di vista affatto nuovo e con mezzi analitici i più elementari, ad una valutazione approssimata dei due coefficienti A e B. E le mie formole conducono, *in prima approssimazione*, a quelle del Fubini ».

---

(12) Si veda [**1**], Tavola IV.

(13) Si veda [**13**], p. 162.

(14) Si veda [**6**]$_1$; si veda anche [**6**]$_2$, p. 218, dove G. Fubini ricorda, di Picone, « una notevole Memoria in corso di stampa », alludendo al lavoro [**12**]$_2$.

2.2. – Mi pare interessante osservare che Picone è stato fra i primi ad adattare (lui dice «imitare») i nuovi metodi della Meccanica celeste di Poincaré al problema principale della Balistica esterna (la quale, come dice P. Charbonnier nella prefazione del suo grande trattato di Balistica razionale [**2**]$_2$, è della Meccanica celeste il ramo terrestre).

Come è noto, i metodi di Poincaré sono stati assai usati in seguito: si veda, ad esempio, l'interessante monografia di K. Popoff [**14**]$_1$ ([15]), che riporta un corso di lezioni, tenute alla Sorbona nel 1924-25, sui metodi d'integrazione di Poincaré e la loro applicazione al problema principale della Balistica esterna (osservo che, purtroppo, il lavoro, in esame, di M. Picone non è ivi citato). Nella prefazione di tale monografia, É. Picard dice:

«La conneissance des travaux modernes sur la théorie analytique des équations différentielles, particulièrement des méthodes d'intégration de Poincaré en mécanique céleste, a permis a M. Popoff, par un choix convenable d'axes de coordonnées, d'obtenir des développements procédant suivant les puissances d'un paramètre figurant dans les équations différentielles .... Les séries ainsi obtenues covergent très rapidement, et l'auteur les compare aux développements donnés par divers auteurs, notamment Siacci et Charbonnier». E, nella introduzione, K. Popoff dice: «Dans ses *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, Henri Poincaré nous a laissé des méthodes précieuses d'intégration des équations différentielles et plus particulièrement des équations de la mécanique céleste. ... Mais il n'a pas touché aux questions de la Balistique .... Pourtant les méthodes de mécanique céleste de Poincaré s'appliquent facilement à la Balistique extérieure, quoique les forces perturbatrices soient ici d'une toute autre nature .... Ses méthodes, bien comprises, donnent des solutions d'une élegance inespérée».

Questi metodi erano stati, anni prima, «ben compresi», e bene applicati, anche da Picone. A questo proposito mi sembra interessante citare quanto dicono T. Levi-Civita e U. Amaldi in [**10**], pp. 42-43, trattando del problema balistico principale:

«Si ricorre ad approssimazioni [delle soluzioni] coi criteri generali della cosí detta *teoria delle perturbazioni*, che è di uso corrente in Meccanica celeste. Questa teoria è dominata da equazioni differenziali lineari, dette *equazioni alle variazioni*. L'applicazione sistematica di queste equazioni ai problemi della Balistica fu considerata nel 1917 dal prof. M. Picone»; e, a questo punto, viene citato il lavoro in esame [**12**]$_1$.

2.3. – Vengono quindi considerate le equazioni alle variazioni per la traiettoria, nel caso in cui la resistenza del mezzo sia diretta, la densità $\delta(y)$ del mezzo sia variabile e la funzione resistente sia la $F(v)$ di Siacci. Con opportuni cambiamenti di variabili, il sistema da integrare diventa il seguente sistema lineare

---

([15]) Della monografia [**14**]$_1$ (che l'Autore dedica a É. Picard, J. Hadamard, P. Charbonnier) esiste una successiva edizione tedesca [**14**]$_2$; una seconda edizione tedesca fu poi curata nel 1954 (si veda [**11**], p. 498). Tale monografia valse a Popoff, nel 1926, il premio Monthyon dell'Accademia delle Scienze di Parigi.

dove le funzioni p, q, r, s sono note funzioni dell'inclinazione θ e α è un « piccolo » parametro positivo (16)

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = p(\theta)\cdot u - \alpha q(\theta)\cdot \eta \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\theta} = r(\theta)\cdot u \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\theta} = s(\theta)\cdot u\,, \end{cases}$$

con le condizioni iniziali

$$(2.2)\qquad u(\varphi) = c\,,\qquad \xi(\varphi) = a\,,\qquad \eta(\varphi) = b\,,$$

essendo φ l'angolo di proiezione, ossia il valore iniziale dell'inclinazione θ.

Tenuto conto che le funzioni u, ξ, η soddisfacenti alle (2.1) e (2.2) sono, al variare del parametro α, funzioni olomorfe di α, cioè rappresentabili in serie di potenze di α, viene usato un procedimento di integrazione per serie, che conduce ad un sistema di equazioni differenziali per i coefficienti $u_n(\theta)$, $\xi_n(\theta)$, $\eta_n(\theta)$ di tali serie; queste equazioni permettono, mediante quadrature, un calcolo ricorrente dei coefficienti. È interessante notare, e in ciò consiste l'eleganza e l'utilità del metodo, che le serie trovate risultano di convergenza assai rapida.

Viene poi effettuato il calcolo approssimato della variazione della traiettoria in funzione dell'inclinazione, considerando i tre casi della variazione dell'altitudine balistica dell'origine, della variazione del modulo della velocità iniziale, della variazione dell'angolo di proiezione; e, successivamente, il calcolo della variazione delle coordinate del punto d'arrivo, ossia il calcolo delle parti principali Δx e Δy delle variazioni subite dalle coordinate x e y del punto d'arrivo, corrispondenti a note variazioni dei parametri h, v_0, φ. Vengono dedotte le formule, già ricordate, di G. Fubini; vengono infine fornite notevoli semplificazioni per il calcolo del coefficiente H di correzione nelle variazioni dell'altitudine balistica dell'origine.

(16) $-\alpha$ rappresenta la media dei valori assunti da $\delta'(y)$ lungo tutta la traiettoria. Cfr. [**12**]$_1$, p. 436.

3. - Tavole di tiro da montagna. Fascicolo I.A: Descrizione ed uso delle tavole (1918).

3.1. – Si tratta della parte iniziale (datata 20 aprile 1918) di « bozze in esperimento » di Tavole di tiro da montagna curate dal Comando di artiglieria della VI Armata, tenuto allora dal Col. Brig. Roberto Segre (17). Tali Tavole (cfr. [**12**]$_3$) sono complessivamente composte di un fascicolo I, di carattere introduttivo, che consta di una parte A (di 60 pagine), contenente la descrizione e l'uso delle tavole, e di una parte B (di 130 pagine), in cui sono esposti i fondamenti scientifici assunti per la loro compilazione; e di fascicoli successivi (II, III, IV), relativi ad alcuni dei più diffusi pezzi di artiglieria di allora.

Nella premessa al Fascicolo I.A, ricordate le difficoltà che si presentavano nel tiro, con forti dislivelli, in montagna, è detto:

« ... conviene che tavole di tiro destinate all'impiego in montagna siano disposte in modo da fornire direttamente i dati di tiro anche per punti situati fuori dall'orizzonte. Dati che, *seguendo metodi proposti dal capitano prof. Mauro Picone* (18), di questo Comando, si poterono — pei rapidi mezzi meccanici e grafici di calcolo, di cui oggidí si dispone (19) — speditamente ottenere col calcolo per archi successivi di fasci di traiettorie .... A parte ciò, ... si è sempre più dimostrato necessario tener conto, nel tiro, delle deviazioni dovute al vento, e delle variazioni della densità dell'aria, del peso del proietto e della velocità iniziale ... (20). Fin da un anno fa erano state compilate tavole di tiro con opportuni coefficienti di correzione. Per le presenti tavole quel lavoro è stato ripreso, e si sono pertanto introdotti quei coefficienti, opportunamente disposti per l'impiego in montagna, eccetto per quanto riguarda le variazioni dovute al vento, per le quali è sembrato opportuno procedere altrimenti (21) ».

---

(17) R. Segre aveva organizzato presso quel Comando un vero e proprio Istituto di ricerche balistiche: si veda quanto dicono M. Picone in [**12**]$_{11}$, p. 74 e pp. 96-98, [**12**]$_{12}$, p. 9, e A. Terracini in [**20**], pp. 84-88.

(18) Il corsivo è nostro.

(19) Su questi « rapidi mezzi », A. Terracini, in [**20**], pp. 86-87, dopo aver ricordato che quel Comando « su proposta di Picone, aveva intrapreso un'opera nel suo genere formidabile », aggiunge « tutti [Picone, Signorini, Terracini e pochissimi altri] lavoravamo con delle macchine calcolatrici prese a prestito dagli Istituti Matematici di varie Università italiane ».

(20) Oltre a queste variazioni, di altre, di cui qui non si parla, si tenne conto, durante quegli anni: mi piace ricordare, se pur di sfuggita, i contributi apportati da F. Severi [**17**], che, come ricorda B. Segre in *L'opera scientifica di Francesco Severi* (Rend. Mat. Appl. (5) **21** (1962), p. 546), « si occupò pure delle correzioni al tiro d'artiglieria dipendenti dalle variazioni di temperatura e di pressione ». E come non ricordare, fra i contributi di allora, il *fonotelemetro* di Pietro Teofilato, e il *telemetro logaritmico* di Oscar Chisini?

(21) Si veda, su ciò, il n. **6** del presente lavoro.

3.2. – Nel § 1 viene trattato il tiro con dislivelli. Riportiamo testualmente:

« Come è ben noto le ordinarie tavole di tiro forniscono *in modo immediato* i dati di tiro per bersagli posti sull'orizzonte del pezzo: per bersagli situati sopra, o sotto l'orizzonte, si hanno dei dati di tiro approssimati mediante la notissima correzione del ΔX_2 [introdotta originariamente per non grandi dislivelli, non grandi angoli di proiezione e per gittate relativamente modeste]. ... L'uso del ΔX_2 per forti dislivelli ... può condurre a errori assai notevoli nei dati di tiro. Ma tale correzione può presentare un altro grave inconveniente: può avvenire, e il caso non è raro, che in base al ΔX_2 sia impossibile ricavare dalle tavole i dati di tiro, pur trattandosi di tiri che in realtà si possono però svolgere. ... In via di massima si può ritenere che la correzione del ΔX_2 conduca a buoni risultati solamente per valori relativamente piccoli dell'angolo di proiezione, dell'angolo di sito e della gittata ».

Vengono forniti svariati esempi a proposito delle affermazioni fatte e vengono poi illustrate le motivazioni che hanno condotto alle nuove tavole:

« Là dove i tiri con forti dislivelli sono regola e non eccezione, e perciò nei tiri in montagna, può rispondere a tutte le esigenze solamente una tavola che assegni direttamente tutti i dati di tiro relativi a bersagli situati indifferentemente sull'orizzonte o fuori di esso, ossia una tavola di tiro a doppia entrata .... In ciascuna tavola le verticali sono denominate alle distanze X fra batteria e bersaglio ...; le orizzontali sono denominate ai dislivelli Y .... Nelle caselle di incrocio delle singole verticali colle singole orizzontali si leggono i vari dati di tiro ».

Le Tavole sono compilate, a seconda delle esigenze, ad angolo fisso (ossia per un fissato angolo di proiezione, al variare della grandezza della velocità iniziale, cioè al variare della carica), e a carica fissa (ossia per una fissata grandezza della velocità iniziale, al variare dell'angolo di proiezione).

3.3. – Nel § 2 vengono trattati i *coefficienti di correzione* per le cause perturbanti il tiro, fra le quali le principali sono: il vento, le variazioni dei parametri della traiettoria, la curvatura e la rotazione terrestre. Per quanto riguarda la correzione dovuta al vento, argomento che sarà ripreso a fondo da Picone nel basilare lavoro [**12**]$_5$, pubblicato nel 1919, ricordato che le tavole sono calcolate nell'ipotesi di assenza di vento, vengono brevemente riassunte le correzioni, già in uso, per effetto del vento: da quelle date dalle classiche formule di Siacci, nell'ipotesi che il vento spiri con la stessa intensità e la stessa direzione lungo tutta la traiettoria, a quelle, allora recentissime, provenienti dalla adozione del cosiddetto « vento balistico » (il *vent balistique* considerato dai francesi, già ricordato al n. **1.2** e su cui si ritornerà al n. **6**). Circa le correzioni adottate è detto:

« Una più adeguata rappresentazione del fenomeno reale si ha però sostituendo ad un vento supposto costante lungo tutta la traiettoria, un vento variabile da un punto all'altro. Tale procedimento fu adottato in queste Tavole ..., dove si fa precisamente l'ipotesi che, lungo la traiettoria, il vento vari in modo continuo in direzione e in intensità, in modo che a tre diverse quote venga rigorosamente a coincidere col vento quale è, a volta a volta misurato ».

Vengono indicati i *sei coefficienti di correzione per il vento* (due, longitudinale e trasversale, per le tre diverse quote) e ne viene specificato l'uso; viene presentata una valutazione rapida delle componenti longitudinale e trasversale del vento, mediante l'uso di un apposito « disco per la correzione del vento ». Vengono quindi trattate le correzioni dovute alla variazione del coefficiente balistico, della velocità iniziale, dell'altitudine, del peso del proietto; per quanto riguarda le correzioni dovute alla curvatura e alla rotazione terrestre si rinvia al Fascicolo I.B.

Nel § 3 viene considerata la preparazione del tiro (distinguendo i due casi del tito ad angolo fisso e a carica fissa), nel § 4 la correzione del tiro (coefficiente e incremento d'aggiustamento; striscie, longitudinale e trasversale, contenenti il 50% dei colpi), nel § 5 la ripresa del tiro. Seguono una Appendice sulle valutazioni della densità dell'aria e della velocità del vento, e varie tavole numeriche.

4. - Tavole di tiro da montagna. Fascicolo I.B: Teoria e metodo di compilazione (1918).

4.1. – Nella presentazione, del Magg. Gen. Roberto Segre (datata 31 ottobre 1918), si legge:

« Nel presente Fascicolo I.B — redatto dal capitano d'artiglieria prof. Mauro Picone, di questo Comando, con la collaborazione, in un punto, (il n. 12), del tenente del genio prof. Alessandro Terracini ([22]), pure di questo Comando — si espongono i fondamenti scientifici posti a base della costruzione di esse tavole. I procedimenti esposti sono tali che, una volta stabilita l'ipotesi fondamentale della balistica esterna, essi assumono aspetto pienamente razionale. Pure facendosi ulteriore appello a risultati di carattere sperimentale, si mostra la possibilità di risolvere tutti i problemi pratici della balistica esterna evitando le formule empiriche (desunte da formule analoghe che sussistono in modo rigoroso nel vuoto, o per certe forme particolari della funzione resistente, ecc.). La soluzione di quei problemi si ottiene per mezzo di formule talvolta meno facilmente calcolabili di quelle empiriche, in quanto la loro applicazione numerica esige integrazioni, ma ogni prevenzione contro tali formule deve cadere di fronte alla facilità e sicurezza del loro calcolo per mezzo di macchine calcolatrici. ... L'uso delle tavole — che ormai dura da più di sei mesi — non ha fatto riscontrare particolari difficoltà d'impiego, oltre quelle naturali derivanti dal voler tener conto di ogni elemento di variazione ».

4.2. – È opportuno tenere presente che i metodi e i risultati presentati da Picone nella Nota $[\mathbf{12}]_1$, già qui illustrata al n. **2**, vengono utilizzati anche

([22]) Si veda anche [**20**], p. 87.

in questo altro lavoro (se ne accennerà al n. **4.3**), che è però di portata notevolmente più vasta ([23]).

Nel § 1 si considerano, nel piano verticale (xy), le equazioni differenziali del moto (del baricentro del proietto)

$$\ddot{x} = -\delta(y)\,\frac{cF(v)}{v}\,\dot{x}, \qquad \ddot{y} = -g - \delta(y)\,\frac{cF(v)}{v}\,\dot{y}, \tag{4.1}$$

$(v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})$, con le condizioni iniziali

$$x(0) = y(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = v_0 \cos\varphi, \qquad \dot{y}(0) = v_0 \operatorname{sen}\varphi, \tag{4.2}$$

dove $F(v)$ è la funzione resistente di Siacci, g il valore dell'accelerazione di gravità nell'origine, c una costante, $\delta(y)$ il valore medio della densità balistica dell'aria alla quota y (assegnato dalla tavola del Saint Robert), v_0 il modulo della velocità iniziale e φ l'angolo di proiezione.

Il sistema (4.1) si trasforma poi, come di consueto, nel sistema equivalente di quattro equazioni del primo ordine, nelle quattro funzioni incognite v, θ, x, y,

$$\begin{cases} \dot{v} = -\delta(y)\,cF(v) - g \operatorname{sen}\theta, & \dot{\theta} = -g\,\dfrac{\cos\theta}{v}, \\ \dot{x} = v\cos\theta, & \dot{y} = v \operatorname{sen}\theta, \end{cases} \tag{4.3}$$

con le condizioni iniziali

$$v(0) = v_0, \qquad \theta(0) = \varphi, \qquad x(0) = y(0) = 0. \tag{4.4}$$

L'integrazione delle equazioni del moto si può però far dipendere da quella di un sistema di due equazioni in due funzioni incognite, seguita da due qua-

---

([23]) Nel prendere in esame questo Fascicolo I.B, non posso fare a meno di ricordare che quando, nel giugno 1976, il prof. Picone me ne inviò una fotocopia (fatta su una rara copia conservata nella biblioteca dell'Accademia dei Lincei), mi scrisse prima una lettera (datata 22 giugno), nella quale diceva: «In questa biblioteca si stanno cercando i fascicoli I.A e I.B delle Tavole di tiro da montagna, fascicoli che certamente sono in tale biblioteca, avendo io ad essa fattone a suo tempo omaggio»; e, in una seconda lettera (datata 23 giugno): «Ho potuto avere prontamente la riproduzione fotostatica del Fascicolo I.B e glielo mando. Naturalmente prima d'inviarglielo ho voluto rileggerlo e Le confesso di averlo trovato soddisfacente»: ciò a quasi sessanta anni dalla originaria stesura!

drature, prendendo per variabile indipendente, anziché il tempo t, l'inclinazione θ: si hanno cosí i due distinti sistemi

$$
(4.5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = v \operatorname{tg}\theta + \delta(y)\, \dfrac{cvF(v)}{g\cos\theta} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{v^2}{g}\operatorname{tg}\theta \qquad\qquad (v(\varphi) = v_0\,,\ y(\varphi) = 0)\,, \end{cases}
$$

$$
(4.6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{v^2}{g} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{v}{g}\sec\theta \qquad\qquad (x(\varphi) = 0\,,\ t(\varphi) = 0)\,. \end{cases}
$$

L'integrazione del sistema delle due equazioni (4.5) nelle due funzioni incognite v e y, seguita dalle due quadrature occorrenti per avere dalle (4.6) la x e la t, fornisce l'integrazione delle equazioni del moto. La prima delle equazioni (4.5), scritta, il più spesso, nella forma

$$
(4.7)\qquad g\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(v\cos\theta) = \delta(y)\, cvF(v)\,,
$$

è l'*equazione dell'odografa*.

L'integrazione approssimata delle equazioni del moto fornisce, come si suol dire in Balistica, la *costruzione della traiettoria per archi successivi*.

Viene quindi esposto un laborioso metodo di integrazione approssimata, che si deduce da note formule di integrazione dell'odografa (4.7) nei casi in cui la densità dell'aria $\delta(y)$ è una costante δ e la funzione resistente $F(v)$ ha una delle due rappresentazioni seguenti

$$
(4.8)\qquad F(v) = a_n v^n\,,
$$

$$
(4.9)\qquad F(v) = av + b\ \text{(}^{24}\text{)}\,.
$$

(24) Ricordiamo che i casi classici di integrabilità, in termini finiti, dell'equazione dell'odografa erano stati dati da Giovanni Bernoulli (1719), nel caso della resistenza monomia (4.8), e dal d'Alembert (1744) nei casi $F(v) = a + b\log v$ e $F(v) = a + bv^n$. Varie altre forme (esattamente quattordici) furono date da Siacci nel 1901 (cfr. [**18**]$_6$; [**18**]$_7$, vol. I, parte II, p. 701); in seguito J. Drach (1914) presentò una classificazione completa dei casi di integrabilità, assai interessante dal punto di vista analitico, che fu poi oggetto, nel 1917, di un'ampia riebolazione da parte di A. Denjoy (allora mobili-

Era noto, sperimentalmente, che per le forme monomie (4.8) il coefficiente a_n e l'esponente n rimangono, con buona approssimazione, costanti al variare del modulo v della velocità entro certi intervalli.

Picone cita il vecchio testo del Cranz [3]$_1$, del 1896 ([25]), e dice:

« Gli estremi di questi intervalli, che designeremo colla denominazione „intervalli (F)", sarebbero:

$$(4.10) \qquad 0\,, \quad 240\,, \quad 295\,, \quad 375\,, \quad 419\,, \quad 550\,, \quad 890\,, \quad 1000\ m/s\,.$$

... La $F(v)$ per i valori di v maggiori di 1000 m/s si può rappresentare con una funzione lineare di v, ponendo (legge di Chapel) $F(v) = 0{,}365v - 96$ ».

Quel « sarebbero » fa comprendere come Picone, anche se non troppo esperto di balistica sperimentale (e certamente del tutto all'oscuro delle pazienti e numerose prove che dovevano essere effettuate, per avere quei minuziosi dati numerici riportati, in assai attrezzati poligoni sperimentali), avesse il motivato sospetto che alcuni di quei dati, trovati sperimentalmente oltre venti anni prima in condizioni ben diverse (calibri diversi, sistemi di rigatura e proietti con caratteristiche diverse, ecc.), potessero dare pieno affidamento. Ma, pressato dagli eventi che sappiamo e con quelle limitazioni di tempo, di luoghi, di mezzi che sappiamo, doveva necessariamente servirsi delle « condizioni al contorno » che trovava, se pur a malincuore e magari limitandosi a far trasparire le sue perplessità con quel « sarebbero ». Vedremo che, molti anni dopo, riprendendo alcuni di quei problemi in tutt'altre condizioni (coi mezzi dell'Istituto di Calcolo da lui fondato, ecc.), si preoccuperà di dare alla funzione resistente la massima generalità possibile ([26]).

Sono quindi riportate (p. 17) le varie forme monomie (4.8) della $F(v)$ per ciascuno dei sette intervalli (F) di estremi (4.10). I coefficienti, positivi, a_n risultano sempre assai piccoli, di ordine compreso fra 10^{-2} e 10^{-11}, e gli esponenti n della velocità hanno i valori 2 (resistenza quadratica), 3 (resistenza cubica),

---

tato presso il centro di ricerche balistiche della Commissione di Gâvre). Nella « Conclusione » del suo acuto studio, che è riportato anche nel I volume (pp. 498-519) del trattato [2]$_2$, il Denjoy, rilevata « la puissance de la méthode de M. Drach » e osservato che « il est cependant juste de rendre hommage au profond sens mathématique de Siacci », constata che il problema, eminentemente pratico, di ottenere tutte le espressioni della funzione resistente che rendano integrabile per quadrature l'equazione dell'odografa « trouve sa solution totale et relativement simple dans l'application des résultats fondamentaux de la théorie des fonctions de variable complexe ».

([25]) Il successivo e ben noto trattato di Balistica del Cranz [3]$_2$ fu pubblicato, in tre volumi più un supplemento, fra il 1925 e il 1936.

([26]) Si vedano i lavori [12]$_6$, [12]$_7$, [12]$_8$, che saranno considerati ai nn. 7 e 8.

5, poi ancora 3, 2, e quindi 1,70 e 1,55. Vengono calcolate le funzioni v, y, x, t, definite dalle (4.5) e (4.6), mediante classiche formule ricorrenti di integrazione approssimata.

Viene osservato che il grado di approssimazione che si può raggiungere col metodo usato è teoricamente illimitato e che le formule trovate, di rapidissimo calcolo meccanico, forniscono risultati con errori quasi inapprezzabili. Un apparente difetto del metodo sta nella sostituzione della funzione continua $\delta(y)$ con una funzione discontinua definita in modo conveniente: si mostra però che tale sostituzione ha influenza inapprezzabile sui risultati.

Vengono poi indicati vari accorgimenti che rendono il metodo di integrazione approssimata esposto di celerissima applicabilità: fra questi particolarmente interessante è la constatazione che, *senza errori sensibili*, si può sostituire alla funzione resistente $F(v)$ data sui *sette intervalli* di estremi (4.10), una funzione definita in modo più semplice, e precisamente, per la forma monomica (4.8), definita su *tre soli intervalli*, di estremi

$$0\,, \qquad 240\,, \qquad 400\,, \qquad 700\,, \tag{4.11}$$

con legge quadratica per i due intervalli estremi e con legge biquadratica per l'intervallo centrale; mentre per la forma lineare (4.9) si assume

$$F(v) = 0{,}364v - 95{,}18 \qquad \text{per } v > 620\ m/s\,, \tag{4.12}$$

anziché quella (con coefficienti leggermente diversi) già indicata per $v > 1000\ m/s$.

Questi accorgimenti, adottati da Picone, portano ad una grande semplificazione in tutto il procedimento di calcolo della traiettoria.

4.3. – Nel § 2 si considerano le variazioni dei parametri della traiettoria: viene utilizzato il lavoro di Picone [**12**]$_1$, ispirato all'opera di Poincaré [**13**], già da noi ricordata. Ci limitiamo, per brevità, a riportare (da p. 35) il seguente teorema, che ha costituito il fondamento per il calcolo dei coefficienti di correzione inseriti nelle nuove Tavole: « Note le parti principali delle variazioni degli elementi della traiettoria, per variazioni e della velocità iniziale e dell'angolo di proiezione, sono immediatamente anche note le parti principali delle variazioni degli stessi elementi per variazione dell'altitudine balistica dell'origine del moto e, con quadratura, per variazioni del parametro c ([27]) e del valore dell'accelerazione di gravità ».

([27]) Che figura nelle (4.1), (4.3), (4.5).

Al n. 12 (pp. 43-44) è riportata una formula dimostrata da A. Terracini [28].

Nel § 3 si tratta della variazione della legge di dipendenza fra la densità dell'aria e l'altitudine; in particolare viene affrontato e risolto il seguente importante problema: « Integrate le equazioni del moto per una certa funzione $\delta(y)$, rappresentante la densità balistica dell'aria alla quota y, calcolare le variazioni degli integrali per un'assegnata variazione $\delta^*(y)$ dell'indicata funzione ».

Nel § 4 si indicano due procedimenti per la correzione sperimentale delle traiettorie calcolate per archi successivi: assai interessante e veramente precorritrice dei tempi è la seguente idea, allora, di fatto, irrealizzabile (p. 56): « Disponendo di esatte riproduzioni fotografiche di traiettorie, si potrebbe verificare fino a qual punto l'ipotesi fondamentale della balistica [29] approssima la realtà ». E viene subito aggiunto: « Non è però qui il luogo di discutere questa ipotesi »; viene quindi presentato « un procedimento più razionale per la correzione delle traiettorie secondo i risultati dell'esperienza, che consentirebbe altresí di attenuare l'influenza di un'eventuale insufficiente approssimazione dell'ipotesi fondamentale della balistica ».

Anche qui si resta colpiti dal modo cosí raffinato di affrontare questi difficili problemi, e dalle idee avanzate qui espresse. Mi pare interessante osservare che, quasi trenta anni dopo, A. Signorini, nell'introduzione alla sua fondamentale Memoria [**19**]$_3$, dice che, riguardo al problema balistico principale, il metodo delle perturbazioni « si è rivelato cosí efficace nelle molteplici applicazioni fattene nell'Istituto nazionale per le applicazioni del Calcolo » (allora diretto da Mauro Picone) e ritiene « che si possa andare oltre *abbinando il metodo delle perturbazioni alla fotografia di effettive traiettorie* » [30].

4.4. – Nel § 5 si procede all'integrazione di speciali equazioni differenziali che si presentano nello studio delle perturbazioni del moto. Nel § 6 si affronta il problema, assai impegnativo e che sarà poi ripreso da Picone nella basilare Memoria [**12**]$_5$, del calcolo della perturbazione dovuta al vento. Posto il problema, viene dapprima riportato il metodo di integrazione di Siacci, valido nelle ipotesi di un vento costante (sia al variare del tempo che al variare del punto) e di componente verticale nulla, e della densità dell'aria costante; viene

(28) Si veda anche [**20**], p. 87.

(29) Ossia: Il moto della proiezione del centro di massa del proietto, sul piano di proiezione (xy), soddisfa alle equazioni (4.1).

(30) Un procedimento di registrazione fotografica delle traiettorie era stato studiato da J. Kampé de Fériet (1925) e comunicato al *Congres International de Mécanique appliquée* di Zurigo del 1926: si veda [**3**]$_2$, Bd. II, pp. 189-190, Bd. III, p. 54 e pp. 338-340; [**4**], p. 30 e p. 53. Il Kampé de Fériet è pure citato, per i suoi successivi studi sulle perturbazioni delle traiettorie, in [**4**], p. 32.

quindi calcolata la perturbazione dovuta ad un vento comunque variabile: questo metodo di Picone conduce a due sistemi di equazioni differenziali il cui esame fornisce un elegante teorema (p. 81), che assume una forma assai semplice nel caso in cui il mezzo resistente abbia densità costante e la funzione resistente sia proporzionale alla velocità; viene infine mostrato come le formule teoriche trovate possano essere tradotte per il loro impiego pratico.

Nel § 7 si studia la *derivazione*, ossia il problema della deviazione dei proietti dal piano verticale (xy), che consiste nella determinazione della coordinata z del baricentro del proietto. I calcoli conducono ad una formula (p. 92) molto simile alle formule empiriche allora note.

Nel § 8 si procede al calcolo delle perturbazioni dovute alla rotazione terrestre e alla variazione dell'accelerazione di gravità durante il moto. Dopo la dimostrazione che, in certe condizioni, *a parità di ascissa*, la deviazione provocata dal moto della Terra è maggiore (ad esempio, anche doppia) nel mezzo resistente che nel vuoto, mentre invece, *a parità di tempo*, è minore, non manca una «frecciata» (p. 101): si mette in guardia dal seguire la tendenza «che pare sussista» (e si cita una «recente pubblicazione»), di adottare formule, valevoli nel vuoto, per il calcolo della perturbazione provocata dal moto terrestre.

Nel § 9 si fa il calcolo dei dati di tiro tenendo conto della forma della Terra, assimilata all'ellissoide di Bessel; segue poi una Nota sul calcolo delle striscie contenenti il 50% dei colpi che arrivano sopra un qualunque piano di sito; vengono infine riportate varie tavole numeriche.

5. - Cenno sugli altri lavori degli anni 1917-1918.

5.1. – I tre lavori fino ad ora esaminati contengono i contributi più importanti di Picone relativi al periodo 1916-1918. Esistono però svariate altre pubblicazioni a lui dovute (anche se a volte il suo nome figura al più nei titoli, in espressioni quali «sistema tenente Picone», «sistema Picone»), uscite quasi tutte a cura di Comandi di artiglieria e, attualmente, di assai difficile reperibilità. Tali pubblicazioni sono elencate ai nn. 21-26 e 29-34 della bibliografia riportata in $[\mathbf{12}]_{14}$; i lavori già da noi considerati ai nn. **2**, **3**, **4** corrispondono rispettivamente ai nn. 20, 27, 28 di tale elenco.

Il primo di questi altri lavori $[\mathbf{12}]_2$, sul tiro dei medi e dei grossi calibri in montagna, pubblicato sulla «Rivista d'Artiglieria e Genio», si riferisce ad argomenti già qui ricordati; gli altri riguardano svariate tavole di tiro, che comprendono, come dice Picone in $[\mathbf{12}]_{11}$, tutti i calibri allora in servizio, dai pezzi da 75 al pezzo di 305/17.

Le più importanti e raffinate sono costituite dalle «Tavole di tiro da montagna» $[\mathbf{12}]_3$, per artiglierie di medio e di grosso calibro, e precisamente dai fascicoli II (pp. 159), III (pp. 217), IV (pp. 231).

5.2. – Di questi, esamineremo brevemente il fascicolo IV (datato agosto 1918) ([31]). Le tavole, che riguardano un pezzo da 149A, sono divise in sette parti (ciascuna a « doppia entrata »), relative a sette diverse cariche, corrispondenti rispettivamente alle velocità iniziali di 245, 314, 353, 389, 458, 539, 625 m/s. La tavola relativa ad una data carica è, a sua volta, divisa in tre serie di tabelle, che vengono minuziosamente descritte.

Le tavole permettono: 1) il calcolo dei dati di tiro per condizioni atmosferiche medie; 2) il calcolo dei dati di tiro per condizioni atmosferiche « quali si vogliano » e per variazioni del peso del proietto; 3) la correzione del tiro (aggiustamento e rettifica). Contengono poi una interessante e assai raffinata parte grafica (in scala 1:25.000), costituita, per ciascuna delle varie cariche, dai diagrammi dei fasci delle traiettorie corrispondenti ad angoli di proiezione varianti di 2° in 2° da − 10° a 40°. Su ciascuna tavola grafica, tracciata a vari colori, sono anche riprodotte le linee di eguale scostamento e le curve di livello delle traiettorie, che costituiscono l'abaco per le proiezioni quotate.

6. - Sul calcolo della perturbazione dovuta al vento (1919).

6.1. – Nella dettagliata premessa (pp. 55-63) di questa impegnativa Memoria [**12**]$_5$, posta la questione di come approssimare le perturbazioni del moto dei proietti provocate da un vento comunque variabile, vengono ricordati i risultati di Didion e di Siacci, ottenuti, per un vento orizzontale costante, nella seguente ipotesi fondamentale: « L'aria in movimento esercita sopra un proietto quella resistenza che eserciterebbe se essa fosse in quiete e se il proietto fosse animato da una velocità che risulta dalla composizione di quella che effettivamente esso ha e della contraria alla velocità dell'aria ».

Viene quindi preso in esame il cosiddetto *vent balistique*, già qui ricordato. Riportiamo dalle pp. 56-63:

« Una soluzione empirica della questione è stata adottata presso le artiglierie francesi e inglesi, introducendo, insieme alla ipotesi fondamentale, la seguente ulteriore „ipotesi del vento balistico": *l'azione perturbatrice di un vento qualunque, costante in uno strato d'aria di spessore determinato, è proporzionale all'intervallo di tempo durante il quale il proietto rimane nel detto strato d'aria.*

Con questa ipotesi semplificatrice è stato possibile organizzare presso gli eserciti francese e inglese, il servizio aerologico per l'artiglieria in modo che il calcolo ... delle correzioni da apportare ... fosse il più semplice e il più rapido possibile ... ([32]). Sta il

([31]) Già qui ricordato al n. **1.4**.

([32]) Da una nota a piè di p. 56 riportiamo: « L'ipotesi del vento balistico e il calcolo delle perturbazioni provocate da un vento comunque variabile, fondato su quella ipotesi, sono stati proposti dal matematico francese É. Borel e sostenuti ... dall'Ufficio di studi di balistica di Parigi ..., nel quale erano anche i matematici J. Hadamard, H. Lebesgue, P. Montel ».

fatto però, com'è dimostrato in questo lavoro, che l'ipotesi del vento balistico è in contraddizione con l'ipotesi fondamentale, in forza della quale viene poi sempre calcolato l'effetto perturbatore del vento balistico. ... La soluzione empirica che si deduce dall'ipotesi del vento balistico appare dunque irrazionale, ed essa è ben lungi dal fornire, sia pure, una prima approssimazione del fenomeno perturbatore, posto che la perturbazione avvenga secondo l'ipotesi messa a fondamento. Principalmente per questa ragione, per l'artiglieria della VI Armata, sono stati da me proposti ed attuati ... altri metodi di correzione per le perturbazioni dovute al vento, ... per quanto questi metodi non consentano la rapidità di calcolo consentita da quella del vento balistico. Altra ragione contraria all'adozione del vento balistico da parte della VI Armata sta nella natura montuosa del terreno sul quale questa Armata operava: è possibile, infatti, affidare alle stazioni aerologiche il calcolo del vento balistico ... nel solo caso che fra ogni batteria e i rispettivi obiettivi vi sia dislivello nullo o trascurabile. ...

Scopo principale del presente lavoro è di dare la risoluzione generale del seguente problema: *Noto il moto di un proietto nell'aria in quiete, determinare le perturbazioni che subirà questo moto per effetto di un movimento dell'aria affatto arbitrario.* ... La risoluzione del problema ora enunciato è stata razionalmente conseguita appoggiandosi sull'ipotesi fondamentale.

Per il confronto fra la soluzione razionale del problema e quella che si ottiene coll'ipotesi del vento balistico ... si dimostra che, scelte a caso due perturbazioni, si possono trovare quanti si vogliono esempi di moti dell'aria per i quali, mentre il calcolo poggiato sulla sola ipotesi fondamentale fornisce **una** delle due perturbazioni, il calcolo poggiato sulle due ipotesi messe insieme fornisce **l'altra** perturbazione.

Rimangono però sempre due questioni di capitale importanza da studiare e sono le seguenti: *a*) *L'ipotesi fondamentale rappresenta la realtà delle cose?*; *b*) *Fino a che punto i risultati da essa forniti approssimano quelli dell'esperienza?*

Un primo esame sommario della questione *a*) fa subito vedere che l'ipotesi fondamentale avrebbe una certa probabilità di rappresentare con approssimazione la realtà delle cose nel caso del proietto sferico che si muove di moto traslatorio .... Ma nel caso generale dei proietti oblunghi e ogivati dell'artiglieria non parrebbe che questa ipotesi rappresenti bene il fenomeno reale ([33]) ....

Quanto alla questione *b*), si dovrà attendere la risposta dalla esperienza. I risultati di questo lavoro potranno forse essere sfruttati per il conseguimento di una sicura risposta. La possibilità in cui questi risultati pongono di valutare, colla approssimazione che si vuole, la perturbazione di un vento comunque variabile, *nella sola ipotesi fondamentale,* farà sí che, ove l'esperienza non confermasse le valutazioni teoriche, sarebbe legittimo e doveroso l'abbandono di quella ipotesi e il conseguente studio teorico ed sperimentale di altra ipotesi. Ma evidentemente, fino a che il calcolo delle perturbazioni dovute al vento si condurrà mettendo insieme all'ipotesi fondamentale quella, in contraddizione, del vento balistico, i risultati dell'esperienza non avranno alcun significato ».

6.2. – Vengono poi considerate e studiate « le equazioni alle variazioni per le variazioni nei parametri della traiettoria »; viene ripreso, allo scopo di fare

---

([33]) Ad avvalorare questa conclusione, Picone cita il lavoro, allora recentissimo, di G. Fubini [**6**]$_3$.

successivi confronti, il metodo di Siacci per il calcolo della perturbazione dovuta ad un vento costante.

Viene quindi presentata la parte essenziale del lavoro (pp. 75-89), col calcolo della perturbazione dovuta ad un vento comunque variabile, e viene mostrato come le formule trovate possano, con tutta l'approssimazione che si desidera, essere tradotte per l'uso pratico: tale approssimazione consiste nel sostituire, al vento reale, un vento che ad n quote considerate $y_1, y_2, \dots, y_n$ coincida col reale, mentre alla quota variabile y abbia le componenti, longitudinale e trasversale, che si ottengono, da quelle calcolate alle n quote, mediante formule di interpolazione di grado $n-1$. Viene ricordato che nelle nuove « Tavole di tiro da montagna » era stato dato ad n il valore 3, prendendo poi per y_1 la quota di m 200, per y_2 la quota alla metà dell'ordinata massima, per y_3 questa ordinata massima: risultavano cosí determinati sei coefficienti di correzione per le perturbazioni dovute al vento, che contribuivano ulteriormente a rendere quelle Tavole assai raffinate.

Dopo i risultati trovati viene infine facilmente dimostrata (pp. 92-96) l'incompatibilità dell'ipotesi del vento balistico con l'ipotesi fondamentale.

6.3. – Osserviamo che, nella breve monografia [**4**], d'Adhemar dedica alla correzione delle perturbazioni dovute al vento solo poche righe e, pur citando una decina di Autori, non cita Picone (di cui poi citerà unicamente il lavoro [**12**]$_6$ del 1930). Dopo aver ricordato che « Lebesgue et Borel ont donnée une définition judicieuse de ce *vent moyen*, qui est employé pour la correction », aggiunge: « La correction de vent peut avoir une valeur notable, mais elle n'à aucun sens si le vent est irrégulier », e cita, a questo proposito, il lavoro di P. Boutroue, *Sur le vent balistique* (Mémor. Artill. Franç., 1926). Alla fine della bibliografia riporta poi, come « post-scriptum », l'indicazione della relazione della Commissione di Balistica, presentata da Hadamard [**9**] e pubblicata nel 1922.

7. - Sul moto dei gravi in un mezzo resistente (1930-1931).

7.1. – A oltre dieci anni di distanza dai lavori finora considerati, nel 1930, in due brevi Note [**12**]$_6$ pubblicate sul Bollettino della Unione Matematica Italiana, e il cui contenuto fa parte di una lettera al prof. T. Levi-Civita (ispirata dalla lettura delle pagine dedicate allo studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni del moto dei gravi nell'atmosfera, contenute nelle *Lezioni di Meccanica razionale* di T. Levi-Civita e U. Amaldi), Picone riprende lo studio de le proprietà essenziali del moto dei gravi nell'atmosfera, lasciando alla resistenza da questa opposta ampia generalità, e studia poi, in ipotesi particolari, il comportamento del modulo della velocità lungo la traiettoria ed il comportamento di questa al variare della velocità iniziale e dell'angolo di proiezione.

7.2. – A seguito di alcune osservazioni di G. Scorza-Dragoni, contenute in una elegante Nota [**16**] pubblicata sullo stesso Bollettino, Picone pubblica nel 1931, fra le « Relazioni scientifiche » del Bollettino, il lavoro [**12**]$_7$. Si tratta, rispetto ai vecchi lavori, come dice Picone, di una « nuova esposizione che apporta perfezionamenti che, per certi riguardi, ritengo definitivi, con l'indicazione di alcune applicazioni ». E prosegue:

« Ponendomi, in primo luogo, nelle generalissime ipotesi sulla resistenza contemplate dal dott. Scorza-Dragoni, ritrovo, col mio vecchio procedimento, i notevoli risultati da lui ottenuti. Questo procedimento ha forse il vantaggio di una maggiore semplicità, laddove può, come qui mostro, essere senz'altro applicato anche allo studio del moto sulla verticale (*). In secondo luogo, considerando ipotesi più particolari, apporto una correzione ai teoremi IV e VI della mia Nota citata ([34]), le cui dimostrazioni, come mi ha fatto osservare il dott. Scorza-Dragoni, sono insufficienti; pervenendo inoltre a nuovi risultati nella ricerca del minimo della velocità, alla quale già il Siacci ebbe a dedicare un ampio ben noto lavoro ([35]) ».

Questo studio di Picone è, fra quelli dedicati alla Balistica, uno dei più noti e dei più citati: ad esempio, esso è ricordato in [**10**], p. 22, « per una trattazione [del problema principale della Balistica esterna] che evita il cambiamento della variabile indipendente t », ed è ampiamente riportato nelle due edizioni della notissima opera di G. Sansone [**15**] (parte II: pp. 319-333 della I edizione; pp. 341-356 della II edizione). Non ci soffermeremo quindi ulteriormente su di esso.

8. - Il metodo di Picone per l'integrazione del sistema di equazioni differenziali della Balistica esterna (1932).

8.1. – Questo metodo di calcolo delle traiettorie fu presentato da Picone all'Accademia « Leonardo da Vinci » di Napoli, e pubblicato nella voluminosa Memoria [**12**]$_8$, di quasi novanta pagine, di cui i due terzi comprendono tavole numeriche e grafiche. Oltre a fornire con grande approssimazione gli elementi essenziali della traiettoria, il metodo risulta di applicazione assai comoda.

Viene dapprima sottoposto ad una rielaborazione il classico metodo di integrazione di Cauchy-Lipschitz per i sistemi normali di equazioni differenziali e viene quindi stabilito un nuovo teorema relativo alla validità del metodo. Tale teorema permette, nei vari casi particolari, di assegnare intervalli di esi-

(*) Nell'apprendere, durante la revisione delle bozze, della scomparsa dell'insigne matematico inglese John E. Littlewood (avvenuta il 6 settembre 1977, all'età di 92 anni), non posso fare a meno di ricordare che il *tenente* Littlewood diede, circa sessanta anni fa, contributi allo studio del moto sulla verticale (*tiro verticale*) col cosiddetto « metodo inglese »: tale metodo è dettagliatamente riportato in [**2**]$_2$, t. II, pp. 775-778.

([34]) Si veda [**12**]$_6$.

([35]) Si veda [**18**]$_5$; si vedano inoltre [**19**]$_1$ e [**19**]$_2$.

stenza della soluzione *più larghi* dei soliti; esso viene applicato sia a ritrovare risultati già noti, sia a trovare alcuni risultati nuovi. È poi descritto un procedimento di maggiorazione dell'errore di approssimazione: su tale procedimento Picone aveva presentato, lo stesso anno, la Nota Lincea [**12**]$_9$ ([36]) nella quale dava un perfezionamento del metodo di Cauchy-Lipschitz.

Il metodo di integrazione cosí perfezionato, che risulta, oltre che di applicazione assai comoda, anche convergente « con insperata rapidità », viene in [**12**]$_8$ applicato all'integrazione del sistema di equazioni differenziali del problema principale della Balistica esterna, in ipotesi, sulla resistenza opposta dal mezzo, più vicine alla realtà rispetto ad altre precedentemente considerate.

8.2. – Dopo aver ricordato che è questo « un nuovo metodo che può essere adottato nelle ipotesi più generali della resistenza del mezzo », Picone cosí prosegue:

« Considereremo anzi condizioni iniziali di moto di un proietto che non sono state finora contemplate ... per assodare alcune circostanze del moto che non si lasciano facilmente prevedere in modo generale dallo studio diretto delle equazioni differenziali, come sarebbe per esempio quella dell'esistenza o meno di più minimi per la grandezza della velocità del proietto e quella dell'angolo di proiezione cui corrisponde la massima gittata. Per dare ai calcoli un fondamento analitico abbiamo impiegato una rappresentazione analitica approssimata della funzione resistente $F(v)$, imponendo a tale rappresentazione di prestarsi ad un calcolo rapido. Abbiamo perciò sostituito alla $F(v)$ di Siacci, una $F(v)$ tale che la curva di equazione, nel piano v, F, $F = F(v)$, rappresenti un ramo di iperbole che passi per il punto (0, 0) e vi abbia per tangente l'asse delle v, che passi inoltre per il punto

$$v = 240\,, \qquad F = 0{,}00018\cdot(240)^2 = 6{,}2208$$

ed abbia per asintoto l'asintoto di Chapel di equazione $F = 0{,}365v - 96$ ».

Viene quindi calcolata l'espressione analitica della $F(v)$, che, per comodità nei calcoli successivi, è stata poi tabulata per valori di v da 300 a 1200 m/s. Nella tavole (v. Tavola I) v varia di metro in metro e, corrispondentemente, $F(v)$ è data con sei cifre decimali. L'esame della tavola mostra che i valori della F sono molto vicini a quelli di Siacci.

Viene poi considerata per la densità $\delta(y)$ dell'atmosfera la forma esponenziale (legge di Bessel) ([37])

$$\delta(y) = \delta_0 \exp\,[-\,\alpha y] \qquad (\alpha = 0.000111)\,. \tag{8.1}$$

([36]) Il teorema di maggiorazione ivi trovato è riportato anche in [**15**], parte II, pp. 279-280.

([37]) Il primo a trattare il caso della densità variabile fu Legendre (1782), che assumeva per la densità dell'atmosfera la legge iperbolica $\delta(y) = \delta_0/(1 + \alpha y)$, associata al caso della resistenza quadratica: si veda [**3**]$_2$, Bd. I, p. 550; [**11**], p. 209.

La Tavola II fornisce i valori di $\exp[-\alpha y]$, per valori di y compresi fra 0 e 29.000 m (con passo di 25 m), con sette cifre decimali ([38]).

Per le condizioni iniziali del moto si dà al modulo v_0 della velocità iniziale il valore $v_0 = 1200\ m/s$ e all'angolo di proiezione φ si danno, successivamente, i tre valori di 45°, 47° 30′, 50°. Tenuto conto delle solite altre convenzioni, le equazioni differenziali del moto si scrivono

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -c\exp[-\alpha y]F(v) - g\operatorname{sen}\theta \\ &\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -g\frac{\cos\theta}{v} \\ &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\operatorname{sen}\theta \\ &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\cos\theta \end{aligned}\right. \tag{8.2}$$

(dove δ_0 per comodità è stato conglobato nella costante c) con le condizioni iniziali

$$x(0) = 0\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad \theta(0) = \varphi\,, \qquad v(0) = v_0\,. \tag{8.3}$$

Conviene assumere, fra le funzioni incognite, anziché l'inclinazione θ il suo seno, ossia porre $\operatorname{sen}\theta = s$, con che le equazioni (8.2) assumono la forma

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -c\exp[-\alpha y]F(v) - gs \\ &\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{v}(1-s^2) \\ &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = sv \\ &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\sqrt{1-s^2}, \end{aligned}\right. \tag{8.4}$$

([38]) Per meglio apprezzare cose già dette e alcune osservazioni successive, riportiamo qui i valori, arrotondati per semplicità a due cifre decimali, della funzione $\exp[-\alpha y]$

1, 0.95, 0.89, 0.57, 0.33, 0.11, 0.04,

rispettivamente per i valori di y (in metri).

0, 500, 1000, 5000, 10.000, 20.000, 29.000.

Questi valori fanno comprendere gli errori, anche assai gravi, che si commettevano nel fare l'ipotesi semplificatrice della densità dell'aria costante.

con le condizioni iniziali

$$(8.5) \qquad x(0)=0\,, \qquad y(0)=0\,, \qquad s(0)=\operatorname{sen}\varphi\,, \qquad v(0)=v_0\,.$$

8.3. – Il metodo di Picone per l'integrazione del sistema (8.4) consiste in ciò:

Si calcolano le soluzioni v, s, y del sistema delle prime tre equazioni (8.4), di minuto secondo in minuto secondo, cominciando dall'istante iniziale $t=0$, applicando il metodo di Cauchy-Lipschitz col perfezionamento apportato da Picone in [**12**]$_9$ e tenendo conto della formula di maggiorazione per l'errore di approssimazione ivi trovata (la quale fornisce altresí il necessario fondamento all'effettivo calcolo numerico delle soluzioni). Il calcolo delle x può essere effettuato dopo quello delle v, s, y, con una quadratura, secondo quanto indica l'ultima delle (8.4).

Diviso il primo secondo del moto in n parti uguali, mediante i punti $0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n=1$, si avrà dalle (8.4)

$$v'(0) = -gs(0) - c\exp[-\alpha y(0)]F(v(0))\,,$$

$$s'(0) = -\frac{g}{v(0)}\left(1-s^2(0)\right)\,,$$

$$y'(0) = s(0)v(0)\,;$$

derivando le prime tre delle (8.4) e calcolandole per $t=0$, si ottiene

$$v''(0) = -gs'(0) + c\exp[-\alpha y(0)]\{\alpha F(v(0))\,y'(0) - F'(v(0))\,v'(0)\}\,,$$

$$s''(0) = \frac{g}{v^2(0)}\{(1-s^2(0))\,v'(0) + 2s(0)s'(0)v(0)\}\,,$$

$$y''(0) = s'(0)v(0) + s(0)v'(0)\,.$$

Risulta pertanto, nel punto t_1,

$$v(t_1) = v(0) + t_1v'(0) + \frac{t_1^2}{2!}v''(0)\,,$$

$$s(t_1) = s(0) + t_1s'(0) + \frac{t_1^2}{2!}s''(0)\,,$$

$$y(t_1) = y(0) + t_1y'(0) + \frac{t_1^2}{2!}y''(0)\,.$$

Ottenuti cosí i valori approssimati di v, s, y nel punto t_1, le (8.4) e le espressioni calcolate per $v''(t)$, $s''(t)$, $y''(t)$ danno i valori approssimati delle derivate prime e seconde di dette funzioni nello stesso punto t_1, e dopo ciò si potrà porre

$$v(t_2) = v(t_1) + (t_2 - t_1)v'(t_1) + \frac{(t_2 - t_1)^2}{2!} v''(t_1) ,$$

$$s(t_2) = s(t_1) + (t_2 - t_1)s'(t_1) + \frac{(t_2 - t_1)^2}{2!} s''(t_1) ,$$

$$y(t_2) = y(t_1) + (t_2 - t_1)y'(t_1) + \frac{(t_2 - t_1)^2}{2!} y''(t_1) ,$$

e cosí via per $t = t_3$, ecc.

A conclusione, Picone osserva:

« Il calcolo esposto è rapidissimo e numericamente comodo. Arrivati ai valori approssimati di v, s, y nel punto $t_n = 1$, noi sappiamo che tali valori, per n crescente all'infinito, tendono ai valori effettivi delle dette funzioni nel punto 1; si tratta ora di stabilire a quali valori di n basta arrestarci per assicurare che l'errore di approssimazione di cui sono affette le v, s, y calcolate cade entro i limiti che occorre imporci ».

A tale scopo usa la formula di maggiorazione già nominata; dà poi una « valutazione pratica » dell'errore di approssimazione.

8.4. – La traiettoria viene calcolata limitatamente al suo ramo al disopra dell'orizzonte (ossia al disopra dell'asse x) e vengono indicate le limitazioni della grandezza v della velocità valevoli nel caso dell'angolo di proiezione $\varphi = 50°$. Segue subito, ricordando una nota proprietà della traiettoria valida qualunque sia la resistenza opposta dal mezzo, che la grandezza della velocità nel ramo della traiettoria al disopra dell'orizzonte è superiormente limitata dalla grandezza v_0 della velocità iniziale.

Per trovare poi un numero che limiti inferiormente v, Picone desume da un suo precedente teorema sulla velocità minima (cfr. [**12**]$_7$, p. 159, Teorema IX) il seguente teorema di confronto: « Se durante il moto riesce

$$c \exp[-\alpha y] F(v) \leqslant av^2 , \tag{8.6}$$

il minimo della grandezza di v non scende al disotto del minimo della grandezza della velocità del moto di un punto materiale lanciato con la stessa velocità iniziale e con lo stesso angolo di proiezione in un mezzo in cui la resistenza sia rappresentata da av^2 ».

In tal modo la grandezza della velocità è data, in funzione dell'inclinazione θ, dalla formula

$$\frac{g v_0^2 \cos^2 \varphi}{g \cos^2 \theta + 2 a v_0^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \int\limits_{\theta}^{\varphi} \frac{d\sigma}{\cos^3 \sigma}} . \tag{8.7}$$

Se si fa la tavola del rapporto $F(v)/v^2$, si trova che tale rapporto risulta superiormente limitato dal numero 0.000352, e si può pertanto dire che sussiste la (8.6) qualora si assuma

$$a = 0.0000704 . \tag{8.8}$$

Il calcolo della tavola della funzione (8.7) (curato dalla dott. D'Ascia dell'Istituto di Calcolo di Napoli) è stato fatto dando ad a il valore (8.8), a v_0 il valore 1200 m/s, a φ il valore di 50°; da tale tavola si desume che la funzione (8.7) ha valori non inferiori a 200, per cui si conclude che: « Nel ramo della traiettoria al disopra dell'orizzonte la grandezza della velocità del proietto lanciato con angolo di proiezione $\varphi = 50°$ e con velocità iniziale $v_0 = 1200\ m/s$ soddisfa sempre alla limitazione $200 \leqslant v \leqslant 1200$ ».

Seguono poi (dopo alcune osservazioni sulle traiettorie, alle quali accenneremo al n. **8.5**) molte accuratissime tavole numeriche, i cui calcoli, come è ricordato nella premessa, sono stati eseguiti dalla dott. Lidia Toscani. Oltre alle tavole già ricordate, le successive riguardano le tre traiettorie corrispondenti ai tre angoli di proiezione considerati: esse danno, in corrispondenza dei valori di t (intervallati di 0.25 secondi per i primi due secondi, di 0.5 secondi fino a 7 secondi, di 1 secondo in seguito), i valori di sen $\theta = s$, $\cos\theta$, x, y, v, e i valori delle loro derivate prime e seconde. Segue una tavola grafica coi diagrammi delle tre traiettorie trovate (in esse è indicato un minimo per la velocità poco oltre il vertice ed un massimo poco prima del punto di caduta); ed una seconda tavola col diagramma della velocità in funzione del tempo, nel caso $\varphi = 50°$.

8.5. – Per le tre traiettorie calcolate, in corrispondenza dei tre angoli di proiezione

$$\varphi = 45° , \qquad \varphi = 47° 30' , \qquad \varphi = 50° ,$$

sono state trovate le rispettive gittate (in metri)

$$X = 45046.777\,, \qquad X = 45907.136\,, \qquad X = 46443.014\,,$$

ossia gittate crescenti al crescere di φ da 45° a 50°. Si conclude che: « Nelle traiettorie considerate, con velocità iniziale di grandezza costante uguale a 1200 m/s, quella di gittata massima corrisponde ad un angolo di proiezione certamente maggiore di 50° ».

Nel vuoto la gittata massima corrisponde all'angolo di proiezione di 45°, mentre nell'aria, per le traiettorie che si hanno con velocità iniziali moderate e con valori non troppo alti del coefficiente balistico, la gittata massima, come è noto, si ottiene per angoli di proiezione minori di 45°. Picone cosí conclude: « Vediamo dunque che col progredire dei mezzi per dare forti velocità iniziali ai proietti e a questi forme e peso che ne aumentino il coefficiente balistico, le gittate massime si raggiungono per valori dell'angolo di proiezione maggiori di 45° ».

È stato qui toccato l'interessante « problema della massima gittata », che aveva per lungo tempo assillato gli studiosi di Balistica: sulla possibilità di raggiungere tale gittata con un angolo di proiezione superiore a 45° molti studi erano stati compiuti già nell'ottocento, pur con le limitazioni dovute alle consuete « ipotesi semplificatrici ». Classici in proposito sono i risultati di Astier (1877), che, nel caso di una resistenza monomia $F(v) = a_n v^n$, aveva dimostrato la possibilità di raggiungere gittate massime per $\varphi > 45°$ nel caso $n \geqslant 5$ (39), e di Siacci (1887), che aveva migliorato tale risultato dimostrandolo valido per $n > 2 + \sqrt{2}$ (40). Ma allora le velocità iniziali e i coefficienti balistici erano assai bassi rispetto a quelli, di circa mezzo secolo dopo, di cui parla Picone (41).

3.6. – Osserviamo infine che questo « metodo di Picone » (come, del resto, i precedenti suoi metodi dei « sette intervalli » o dei « tre intervalli », già considerati al n. **4.2**) è uno dei numerosi *metodi di costruzione della traiettoria per archi successivi*, e precisamente un *metodo numerico*. L'origine dei metodi per archi successivi è assai antica: già Tartaglia (1537), con un rudimentale *metodo grafico* approssimava la traiettoria atmosferica con tre archi, e precisamente

(39) Il teorema di Astier è riportato in [**2**]$_2$, t. I, pp. 452-459.

(40) Si veda [**18**]$_3$ e [**18**]$_4$. La dimostrazione di Siacci è anche riportata in [**2**]$_2$, t. II, pp. 219-224.

(41) Su questo problema si veda anche quanto è detto in [**10**], pp. 37-38, per le traiettorie negli alti strati dell'atmosfera: alcuni di quei concetti erano già stati assai lucidamente espressi da Siacci nella sua Nota [**18**]$_4$, del 1889 (cfr. pp. 240-241).

con due tratti rettilinei, l'uno secondo la linea di proiezione e l'altro sulla verticale del punto di caduta, raccordati da un arco di cerchio (tale metodo già anticipava, in un certo senso, il fatto che il ramo discendente della traiettoria atmosferica è dotato di un asintoto verticale); molti altri metodi grafici furono successivamente basati su costruzioni per punti o per tangenti (42). Metodi grafici furono quelli di Poncelet (1827), di Didion (1848), e numerosi altri (43). I metodi numerici risalgono invece ad Eulero (1753), che diede un metodo valido per la resistenza quadratica ($n = 2$), generalizzato assai più tardi dal metodo di Gâvre (1897) al caso di n qualsiasi; fra i tanti altri ci limitiamo a ricordare quelli di Siacci, via via perfezionati fra il 1880 e il 1896 e spesso brevemente indicati come «Siacci I» (1880), «Siacci II» (1888), «Siacci III» (1896) (44), e quelli, attualmente assai usati per l'elaborazione automatizzata delle tavole di tiro, di Runge e Kutta.

Accanto a questi metodi numerici si inseriva il metodo di Picone, che troviamo poi riportato su alcuni trattati, relativamente recenti, di Balistica: ad esempio, F. Galanzino, in [**7**], vol. I, ne riporta assai brevemente il procedimento di calcolo (pp. 248-251) e cita il lavoro originale [**12**]$_8$; R. Giuliano, in [**8**] vi dedica il capitolo VI del I volume (pp. 269-281) e la Tavola 38 del II volume (45). Il Giuliano, allora docente di Balistica esterna alle Scuole di Applicazione di Torino, ricorda, trattando dei fondamenti del metodo di Picone, che esso era stato usato per la compilazione di tavole di tiro per artiglierie contraeree (per le quali interessano grandi velocità iniziali e grandi angoli di proiezione) e che continuava ad essere anche allora (1956) usato.

9. - Altri contributi. Osservazioni.

9.1. – I contributi successivi (46) riguardano prevalentemente la Balistica applicata e, in particolare, il tiro da aeromobili (tempi di caduta, velocità e angolo di caduta, ritardazione, gittata). Essi appaiono in quattro «Prefazioni» di altrettante pubblicazioni riservate dell'INAC; e, infine, in due conferenze

---

(42) Uno dei metodi per punti più noti ed usati (anche fino a tempi recenti) era basato sul teorema di Pascal (1640) dell'esagono semplice inscritto in una conica.

(43) Si veda, ad esempio, [**3**]$_2$, Bd. I.

(44) Si veda [**3**]$_2$, Bd. I, pp. 170-178; [**11**], pp. 215-218.

(45) Tali trattati, scritti per i Corsi superiori tecnici di Artiglieria e per le Scuole di Applicazione, e pubblicati in edizioni «fuori commercio», sono assai difficilmente reperibili.

(46) Si vedano i nn. 99, 111, 114, 134, 148, 277 dell'elenco riportato in [**12**]$_{14}$. Le pubblicazioni n. 99 e n. 277 riportano il testo di due conferenze.

riguardanti l'artiglieria italiana nella prima guerra mondiale ([47]), tenuta l'una a Roma (1934), l'altra a Torino (1970). Quest'ultima ([48]), che Picone tenne alle Scuole di Applicazione, e che abbiamo già avuto occasione di citare ai nn. **3.1**, e **5.1**, ha un notevole interesse, oltre che dal punto di vista tecnico-scientifico anche dal punto di vista storico: sono, in particolare, trattati gli svariati problemi che dovevano essere allora affrontati e risolti (e che sono stati qui descritti ai nn. **2-6**); fra gli organizzatori di quell'intenso lavoro emerge la figura di R. Segre, già qui più volte ricordato.

9.2. – Abbiamo già osservato che molti dei lavori di Picone qui esaminati, in particolare i primi, sono assai poco conosciuti. Quei lavori sono anche assai raramente citati: abbiamo ricordato, in proposito, le monografie di Popoff [**14**] e di d'Adhemar [**4**]. Anche i due grandi trattati di Balistica usciti nei dieci anni successivi a quei lavori del 1917-1919, quello di P. Charbonnier [**2**]$_2$ (1921-1927) e quello di C. Cranz [**3**]$_2$ (1925-1927, con un supplemento del 1936), non citano mai Picone. A parte il quasi anonimato di molte di quelle sedici pubblicazioni, quasi tutte curate da Comandi militari, le prime due [**12**]$_1$, [**12**]$_2$ e l'ultima [**12**]$_5$ erano comparse su riviste assai note anche in campo internazionale; la seconda e l'ultima, in particolare, sulla specializzata « Rivista d'Artiglieria e Genio », che, fondata nel 1884, pubblicava quattro volumi ogni anno e che aveva acquisito una notevole notorietà per i fondamentali lavori di Siacci (e successivamente di Parodi, Bianchi, Cavalli) in essa contenuti.

A questo proposito è bene osservare che, del primo trattato [**2**]$_2$, previsto in sei volumi, uscirono solo i primi due, entrambi dedicati alla Balistica razionale (il primo ai teoremi generali, il secondo alle teorie balistiche, per oltre 1400 pagine complessive, cosí da farne il più completo trattato del genere); il manoscritto di tali volumi, come dichiara l'Autore nella prefazione, fu depositato all'Institut de France nel gennaio 1918 ([49]): tale data giustifica appieno la mancata citazione di lavori di Picone, i primi dei quali, pur iniziati nel 1916, uscirono certamente verso la fine del 1917 (e che anno quel 1917!). Non è invece giustificata la mancata citazione da parte del Cranz (e conservata anche nel supplemento del 1936, nonostante i successivi lavori di Picone; del resto il Cranz non cita nemmeno gli importanti contributi del Drach e del Denjoy, già da noi ricordati al n. **4.2**). Ciò, però, non deve eccessivamente sorprendere, se si tiene conto del fatto che spesso i cultori delle scienze balistiche (alle quali si erano pur dedicati in passato Tartaglia, Galileo, Newton, Giovanni Ber-

---

([47]) Sullo stesso argomento si veda anche il lavoro n. 57 dell'elenco in [**12**]$_{14}$, pubblicato a Catania nel 1923.

([48]) Si veda [**12**]$_{11}$.

([49]) E gli valse il premio Poncelet per l'anno 1919.

noulli, d'Alembert, Eulero, Legendre) operavano piuttosto isolati rispetto all'ambiente delle Università e dei Politecnici. Eccezioni furono, da noi, Francesco Siacci, il quale, oltre che docente di Balistica esterna alla Scuola di Applicazione di Artiglieria e Genio di Torino, fu professore di Meccanica razionale e di Meccanica superiore nella stessa Università e, in seguito (dal 1893), in quella di Napoli; e pochi altri, che provenivano invece dall'ambiente universitario, come Filippo Burzio e Carlo Jachino. A questo fatto, del resto, accennava lo stesso Charbonnier quando, nella prefazione del suo trattato [**2**]$_2$, lamentava che la Balistica fosse « presque totalement ignorée des professeurs de Mécanique et des savants, n'ayant nulle part de chaire d'enseignement ».

9.3. – In questi anni il prof. Picone mi accennò più volte, in alcune lettere e anche durante una indimenticabile conversazione, che, dei suoi lavori di Balistica, quelli ai quali si sentiva maggiormente « affezionato » erano il Fascicolo I.B e la Memoria sul calcolo della perturbazione dovuta al vento (che condensavano, sostanzialmente, l'enorme lavoro da lui compiuto negli anni 1916-1919). Ritengo che tali sue preferenze, oltre al valore intrinseco dei due lavori (ed al fatto, certo non trascurabile, che furono lavori, del periodo giovanile, svolti in circostanze assai singolari e per le quali « a posteriori » è certamente caro il ricordo: e ciò traspare da molte sue citazioni, alcune delle quali qui ricordate, relative a quel periodo), siano dovute anche ad un'altra ragione, assai poco nota ma che risulta chiaramente da due delle sue pubblicazioni, non di Balistica, e precisamente da [**12**]$_{13}$ e [**12**]$_{10}$. Da esse appare che alcune delle difficoltà di tipo fisico-matematico che in quegli anni gli si presentarono, furono da lui superate anche attraverso i consigli e le ispirazioni (anche nel senso di: ispirazioni suscitate dalla acquisita conoscenza di certi metodi matematici) che gli vennero da due grandissimi Maestri: Tullio Levi-Civita e Vito Volterra.

Col Levi-Civita ebbe allora rapporti di una certa frequenza, da lui stesso ricordati in un breve discorso [**12**]$_{13}$ che tenne nel recente Convegno Internazionale dedicato al centenario della nascita del Levi-Civita. Disse allora:

« Conobbi Tullio Levi-Civita, nella Sua casa ospitale di Padova, durante la guerra 1915-1918, sempre ivi gentilmente accolto da Lui e dalla Sua eletta Signora .... Sbalzato verso le applicazioni della Matematica alla Balistica ... ebbi allora ... incoraggiamenti e suggerimenti di somma efficacia per riuscire nell'adempimento di quel nuovo non facile compito. Io andavo a trovare Levi-Civita partendo da Schio ..., durante la notte, in un autocarro addetto ai rifornimenti, per arrivare a Padova, facendo anche qualche chilometro a piedi, nella mattinata. Egli mi accoglieva sempre festosamente e si intratteneva con me per lo studio di alcuni problemi di Balistica che Gli sottoponevo ([50]).

([50]) Il Levi-Civita aveva anche dato contributi specifici alla Balistica con un lavoro, del 1906, che è da lui citato in [**10**], p. 54, e dal Cranz in [**3**]$_2$, Bd. I, pp. 458, 461, 562.

Da ciò trassi sempre grandi benefici per l'adempimento dei nuovi varii compiti di tiro. Un giorno Egli mi fece trovare sul Suo scrittoio una macchina calcolatrice Brunswiga che mi prestò per portarla a Schio, al Comando d'artiglieria, onde adoperarla. Ciò ci permise di fare, in tempo utile, i lunghi non facili calcoli necessari per la compilazione delle nuove tavole di tiro .... Che fine abbia fatto quella macchina calcolatrice, lo ignoro. Il Levi-Civita ebbe la delicatezza, in Lui innata, di non chiedermelo mai ».

Del Volterra, nella commemorazione [**12**]$_{10}$ che ne fece a Palermo nel 1956, in occasione del cinquantesimo anniversario della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, dal Volterra fondata ([51]), Picone dice:

« Sono classiche le fruttuose applicazioni alla Fisica del concetto di Volterra di variazioni successive di una funzione di linea », e aggiunge che lui stesso « ebbe la ventura di applicare utilmente lo stesso concetto per il calcolo ..., durante la prima guerra mondiale, della perturbazione del moto dei proietti d'artiglieria, dovuta ad un movimento dell'aria, osservato lungo i punti della traiettoria che il proietto stesso avrebbe percorso qualora l'aria fosse stata in quiete ([52]) ».

E più avanti racconta un singolare episodio, che descrive un fortuito incontro, avvenuto nel 1916, fra il tenente Picone e l'anziano capitano Volterra, già da tempo assai noto come scienziato e da oltre dieci anni (e ciò era ed è assai meno noto) senatore per le sue benemerenze scientifiche e le singolari capacità organizzative. Dice:

« Recatomi, sul finire del 1916, al Comando supremo ..., trovai, in un'anticamera di un ufficio, in paziente attesa d'essere ricevuto, niente di meno che il Senatore Volterra, in divisa di capitano del Genio .... Si discorse a lungo; fu infatti, fortunatamente per me, lunga l'attesa del capitano Volterra .... Egli, con la Sua solita affabilità e chiara visione delle cose, mi espose le Sue idee sulla necessità di organizzare immediatamente una collaborazione fra Scienza e Tecnica .... Trovai così un primo, autorevolissimo ed estremamente incoraggiante consenso all'idea ... di un Istituto per le Applicazioni del Calcolo (che potei realizzare circa dieci anni dopo, all'Università di Napoli) ».

E ricorda ancora, a riprova della « assoluta umiltà » del Volterra, che questi « in una Sua memoria sul tiro per l'artiglieria aeronautica ([53]), pubblicata nel 1916 dall'Istituto centrale aeronautico, si limitava ad apporvi il solo suo titolo di ,,Tenente del Genio'' ».

9.4. – Abbiamo inteso mettere in risalto, in queste note, insieme ai notevoli contributi apportati da Mauro Picone a svariati problemi delle scienze balistiche, anche alcuni aspetti del suo metodo di lavoro, improntato sempre ad acuto spirito critico ed alla massima generalità; abbiamo infine ritenuto

---

([51]) Picone ricorda, in [**12**]$_{10}$, che « il primo congresso della Società fu tenuto a Parma nel 1907, sotto la presidenza, unanimemente voluta, del Volterra ».

([52]) Si veda, a questo proposito, oltre al lavoro [**12**]$_5$, la Nota Lincea [**12**]$_4$, che Picone pubblicò lo stesso anno 1919 (nel cui titolo è ricordato quel concetto di Volterra).

([53]) Si veda [**21**].

di non trascurare alcuni episodi utili a mostrare in quali condizioni si fosse trovato inizialmente costretto ad operare.

Ci sembra interessante concludere con un accostamento a quanto si fa attualmente, in Balistica, per impostare i procedimenti che conducono, con l'uso dei moderni metodi dell'Analisi funzionale e dell'Analisi numerica (delle quali Picone è stato pioniere e maestro), alla elaborazione automatizzata delle tavole di tiro: il sistema di equazioni differenziali del moto, nella forma completa, oltre a « nuovi » parametri (quali il numero di Mach, il coefficiente di resistenza aerodinamica, ecc.) comprende anche, in ogni punto, le tre componenti del vettore vento. I « vecchi » sei coefficienti di correzione per il vento contenuti nelle Tavole di Picone di circa sessanta anni fa (e lo studio era stato fatto da un punto di vista più generale, ossia tenendo conto di $2n$ coefficienti, ed era stato allora ritenuto più che sufficiente assumere $n = 3$ ([54])), anche attualmente non sfigurano, in quanto il metodo di Runge e Kutta, che viene ora di solito usato, riconduce i calcoli dal continuo al discreto.

Ad avvalorare ciò ricordiamo che in un recente lavoro di D. Dainelli [**5**], in cui è studiato un modello matematico per riprodurre col calcolo le traiettorie balistiche in condizioni fisiche reali, viene ricordato che « alla determinazione della forza aerodinamica [del mezzo] ... deve concorrere la considerazione del vento con intensità e direzione fisiche vere lungo la traiettoria, come da tempo è stato dimostrato ed è ormai nella pratica », ed è citato, a questo punto, proprio il lavoro di Picone [**12**]$_5$; poche righe dopo, accennando al problema dinamico completo del moto, è poi citato il basilare lavoro di A. Signorini [**19**]$_3$, in cui tale problema è, a fondo, trattato. Ritroviamo cosí, ancor qui accomunati, i nomi e i contributi di Picone e di Signorini, a circa sessanta anni dalle loro prime, comuni e singolari, esperienze di giovani, già valentissimi, studiosi.

Bibliografia.

[1] G. BIANCHI, *Corso teorico-pratico di Balistica esterna*, Pasta, Torino 1910.

[2] P. CHARBONNIER: [•]$_1$ *Traité de Balistique extérieure*, Libr. Polytecnique, Paris 1904; [•]$_2$ *Traité de Balistique extérieure*, t. I, II (*Balistique extérieure rationnelle*), Doin et Gauthier-Villars, Paris 1921, 1927.

[3] C. CRANZ: [•]$_1$ *Compendium der theoretischen äusseren Ballistik*, Teubner, Leipzig 1896; [•]$_2$ *Lehrbuch der Ballistik*, Bd. I (1925), II (1926), III (1927), Ergänzungsband (1936), Springer, Berlin.

[4] R. D'ADHEMAR, *La Balistique extérieure*, Mémor. Sci. Math., fasc. 65, Gauthier-Villars, Paris 1934.

([54]) Si vedano i nn. **3.3**, **6.2**.

[5] D. DAINELLI, *Elementi per un particolare modello matematico in Balistica esterna*, in « Applicazioni del Calcolo, Scritti offerti a Mauro Picone nel Suo 90° compleanno », Veschi, Roma 1975, 201-215.

[6] G. FUBINI: $[\cdot]_1$ *Alcune formole di Balistica esterna con speciale riguardo al problema della correzione del tiro*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) **26**, 1° sem. (1917), 151-161; $[\cdot]_2$ *Osservazioni sul calcolo della traiettoria di un proietto*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) **26**, 1° sem. (1917), 214-219; $[\cdot]_3$ *Alcune osservazioni relative ai problemi secondari della Balistica esterna*, in « Scritti Matematici offerti ad Enrico D'Ovidio », Bocca, Torino 1918, 158-163.

[7] F. GALANZINO, *Balistica esterna*, vol. I, II, III, Libreria dello Stato, Roma 1943-1956.

[8] R. GIULIANO, *Balistica esterna*, vol. I, II, Castello, Torino 1955-56.

[9] J. HADAMARD, *Rapport sur les travaux examinés par la Commission de Balistique*, Mémor. Artill. Franç., t. I (1922).

[10] T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Nozioni di Balistica esterna*, Zanichelli, Bologna 1935.

[11] H. MOLITZ und R. STROBEL, *Äussere Ballistik*, Springer-Verlag, Berlin 1963.

[12] M. PICONE: $[\cdot]_1$ *Formole razionali per la correzione del tiro*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **52** (1916-1917), 430-449; $[\cdot]_2$ *Sul tiro dei medi e dei grossi calibri in montagna*, Riv. Artigl. Genio, **34**, vol. III e IV (1917), pp. 31 (55); $[\cdot]_3$ *Tavole di tiro da montagna*: fasc. I.A, *Descrizione ed uso delle tavole* (pp. 60); fasc. I.B, *Teoria e metodo di compilazione* (pp. 130); fasc. II, *Mortaio da* 210 (pp. 159); fasc. III (pp. 217) e fasc. (IV (pp. 231), *Cannone da* 149A, Comando Artigl. VI Armata, 1918; $[\cdot]_4$ *Le equazioni alle variazioni, per cause perturbatrici variabili, nel concetto di Volterra di variazione prima per una funzione di linea*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) **28** (1919), 127-131; $[\cdot]_5$ *Sul calcolo della perturbazione del moto dei proietti dovuta al vento*, Riv. Artigl. Genio, **36**, vol. III (1919). 55-98; $[\cdot]_6$ *Sul moto dei gravi nell'atmosfera*, Boll. Un. Mat. Ital., **9** (1930), 96-102 e 125-132; $[\cdot]_7$ *Sul moto dei gravi in un mezzo resistente*, Boll. Un. Mat. Ital., **10** (1931), 150-167; $[\cdot]_8$ *L'applicazione del metodo Cauchy-Lipschitz all'integrazione del sistema di equazioni differenziali della Balistica esterna*, Atti Accad. « Leonardo da Vinci » Napoli (12) **2** (1932), 1-27 (e pp. 59 di Tavole); $[\cdot]_9$ *Maggiorazione dell'errore d'approssimazione nel metodo d'integrazione Cauchy-Lipschitz dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6) **15** (1932), 859-864; $[\cdot]_{10}$ *Commemorazione di Vito Volterra pronunciata a Palermo il* 15 *settembre* 1956, *cinquantesimo anniversario della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, Ricerca Scient., **26** (1956), 3277-3289; $[\cdot]_{11}$ *L'ar-*

(55) Al n. 21 dell'elenco bibliografico riportato in $[12]_{14}$ viene indicata solo la seconda parte (pp. 5-15 del vol. IV) di questo lavoro di Picone; viene ivi dimenticata la prima parte (pp. 216-235 del vol. III).

tiglieria italiana nella prima guerra mondiale, Scuole di Applicazione, Torino, Conferenze 1970-1971, 67-98; [•]$_{12}$ *La mia vita*, Tip. Bardi, Roma 1972, pp. 18; [•]$_{13}$ *Discorso tenuto nel Convegno Internazionale per la celebrazione del centenario della nascita di Tullio Levi-Civita* (17-19 *dicembre* 1973), Tip. Bardi, Roma 1974, pp. 4; [•]$_{14}$ *Biografie e bibliografie degli Accademici Lincei: Mauro Picone*, a cura dell'Accad. Naz. Lincei, Roma 1976, 491-505 (56).

[13] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, Gauthier-Villars, Paris 1892.

[14] K. Popoff: [•]$_1$ *Les méthodes d'intégration de Poincaré et le problème général de la Balistique extérieure*, Gauthier-Villars, Paris 1925; [•]$_2$ *Das Hauptproblem der äusseren Ballistik*, Math. Anw. **11**, Leipzig 1932.

[15] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, parte I, II, 2ª ediz., Zanichelli, Bologna 1948, 1949.

[16] G. Scorza-Dragoni, *Il moto dei gravi in un mezzo resistente*, Boll. Un. Mat. Ital., **10** (1931), 141-149.

[17] F. Severi, *Sulle correzioni al tiro d'artiglieria dipendenti dalle variazioni di temperatura e di pressione*, Ist. Veneto Sci. Lett. Arti Atti Cl. Sci. Mat. Natur., **78**, parte II (1919), 297-322.

[18] F. Siacci: [•]$_1$ *Balistica*, 2ª ediz., Casanova, Torino 1888; [•]$_2$ *Balistique extérieure*, Berger-Levrault, Paris 1892; [•]$_3$ *Sugli angoli di massima gittata*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (4) **3**, 2º sem. (1887), 211-216; [•]$_4$ *Sulla soluzione dei problemi del tiro curvo e sull'angolo di massima gittata*, Riv. Artigl. Genio, **6**, vol. III (1889), 227-241; [•]$_5$ *Sulla velocità minima*, Riv. Artigl. Genio, **18**, vol. I (1901), 287-297; [•]$_6$ *Alcune nuove forme di resistenza che riducono il problema balistico alle quadrature*, Riv. Artigl. Genio, **18**, vol. III e IV (1901), pp. 67; [•]$_7$ *Scritti scientifici*, vol. I, II, III, Provveditorato Generale dello Stato, Roma 1928.

[19] A. Signorini: [•]$_1$ *Un teorema di confronto in Balistica esterna e alcune sue applicazioni*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **43** (1919), 357-393; [•]$_2$ *Sulla velocità minima*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) **31**, 2º sem. (1922), 101-104; [•]$_3$ *Complementi alla Dinamica dei giroscopi e equazioni del problema completo della Balistica esterna*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **1** (1946), 1-41.

[20] A. Terracini, *Ricordi di un matematico*, Cremonese, Roma 1968.

[21] V. Volterra, *Metodo di calcolo degli elementi di tiro per artiglieria aeronautica*, Rend. Ist. Centr. Aeronautico, Roma 1916.

Summary.

A reasoned presentation of Mauro Picone's remarkable—and in part hardly known—contributions to Rational Ballistics.

(56) Per informazioni bibliografiche più complete si rimanda all'elenco bibliografico riportato in [**12**]$_{14}$.

* * *