Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 347-356

DANIELA MONTEVERDI (*)

Questioni di completezza relative a particolari categorie rappresentabili. (**)

1. - Introduzione.

È ben noto il concetto di funtore rappresentabile e l'importanza che esso riveste nello studio della teoria delle categorie. Sono state studiate generalizzazioni di tale definizione ad esempio in [3], [4] e [5].

Nello spirito di [3] ho formulato un'altra estensione, inconfrontabile con quella sopra citata, giundendo così al concetto di categoria comma-contro rappresentabile.

Ho rivolto la mia attenzione ai problemi di completezza, come primo passo per analizzare tematiche riguardanti la teoria dei modelli.

2. - Categorie comma-contro.

Definizione. Date tre categorie $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$ e dati due funtori $\mathscr{F}: \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ covariante e $\mathscr{G}: \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ controvariante, vogliamo definire la categoria $\mathscr{F}$ comma-contro $\mathscr{G}$, che indicheremo con $\mathscr{F} \searrow \mathscr{G}$. Gli oggetti sono le terne ordinate (A, B, f), dove $A \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{C}$, $B \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{D}$, $f: \mathscr{F}(A) \to \mathscr{G}(B)$ in $\mathscr{E}$; se (A, B, f) e (A', B', f') sono oggetti di $\mathscr{F} \searrow \mathscr{G}$ allora porremo $(h, k): (A, B, f) \to (A', B', f')$ in $\mathscr{F} \searrow \mathscr{G}$ se $h: A \to A'$ in $\mathscr{C}$, $k: B \to B'$ in $\mathscr{D}$ e $f = \mathscr{G}(k) f' \mathscr{F}(h)$ (1) (2).

(*) Indirizzo: Ist. Mat., Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 14-VII-1977.

(1) Nella terminologia di P. Freyd, $\mathscr{F} \searrow \mathscr{G}$ così definita è una proto-categoria, ma diventa una categoria definendo i morfismi come quaterne $(h, k, f, f'): (A, B, f) \to (A', B', f')$.

(2) $\mathscr{F} \searrow \mathscr{G}$ risulta essere limite di un diagramma analogo a quello che serve per definire le categorie comma (cfr. [1]). Con $\Gamma_1: \mathscr{F} \searrow \mathscr{G} \to \mathscr{C}$ e $\Gamma_2: \mathscr{F} \searrow \mathscr{G} \to \mathscr{D}$ indicheremo gli ovvi funtori proiezioni.

Osservazione 1. È banale osservare che se $(A, B, f) \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{F} \searrow \mathscr{G}$, $x\colon X \to A$ in $\mathscr{C}$ e $y\colon Y \to B$ in $\mathscr{D}$, allora

$$(X, Y, \mathscr{G}(y) f \mathscr{F}(x)) \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{F} \searrow \mathscr{G} \qquad \text{e} \qquad (x, y)\colon (X, Y, \mathscr{G}(y) f \mathscr{F}(x)) \to (A, B, f)\,.$$

Per comodità si indicherà nel seguito il morfismo $\mathscr{G}(y) f \mathscr{F}(x)$ di $\mathscr{E}$ con la scrittura $f \circ (x, y)$, da leggersi, con evidente abuso di linguaggio, f composto con (x, y). Notiamo allora che se (A, B, f) e (A', B', f') sono oggetti di $\mathscr{F} \searrow \mathscr{G}$, se $h\colon A \to A'$ in $\mathscr{C}$ e $k\colon B \to B'$ in $\mathscr{D}$, la coppia $(h, k)\colon (A, B, f) \to (A', B', f')$ è un morfismo in $\mathscr{F} \searrow \mathscr{G}$ se e soltanto se $f = f' \circ (h, k)$.

Con questa notazione se $x'\colon X' \to X$ e $y'\colon Y' \to Y$ si avrà allora

(1) $$(f \circ (x, y)) \circ (x', y') = f \circ (xx', yy')\,.$$

Osservazione 2. La corrispondenza che ai funtori $\mathscr{F}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ e $\mathscr{G}\colon \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ associa la categoria $\mathscr{F} \searrow \mathscr{G}$ è la «funzione oggetto» di un funtore

$$\searrow\, \colon \mathrm{Funct}\,(\mathscr{C}, \mathscr{E})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Funct}\,(\mathscr{D}^{\mathrm{op}}, \mathscr{E}) \to \mathrm{Cat}\,.$$

Date due trasformazioni naturali $\psi\colon \mathscr{F}' \to \mathscr{F}$, $\varphi\colon \mathscr{G} \to \mathscr{G}'$, denoteremo con $\psi \searrow \varphi$ il funtore fedele [3] da $\mathscr{F} \searrow \mathscr{G}$ in $\mathscr{F}' \searrow \mathscr{G}'$ che associa ad $(A, B, f) \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{F} \searrow \mathscr{G}$ l'oggetto $(A, B, \varphi(B) f \psi(A))$ di $\mathscr{F}' \searrow \mathscr{G}'$ e al morfismo $(h, k)\colon (A, B, f) \to$ $\to (A', B', f')$ di $\mathscr{F} \searrow \mathscr{G}$ il morfismo $(h, k)\colon (A, B, \varphi(B) f \psi(A)) \to (A', B', \varphi(B') f \psi(A'))$ di $\mathscr{F}' \searrow \mathscr{G}'$. Denoteremo il morfismo $\varphi(B) f \psi(A)$ di $\mathscr{E}$ con $(\psi, \varphi) \circ f$ (a parole: (ψ, φ) composto con f).

Se φ (rispettivamente ψ) è la trasformazione identica, allora anzichè $(\psi, \varphi) \circ f$ si scriverà talora più semplicemente $\varphi \circ f$ (rispettivamente $\psi \circ f$).

Siano $\mathscr{F}''\colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ covariante e $\mathscr{G}''\colon \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ controvariante e si abbiano due trasformazioni naturali, $\psi'\colon \mathscr{F}'' \to \mathscr{F}'$ e $\varphi'\colon \mathscr{G}' \to \mathscr{G}''$; usando le notazioni introdotte, si ha

(2) $$(\psi', \varphi') \circ ((\psi, \varphi) \circ f) = (\psi\psi', \varphi'\varphi) \circ f\,,$$

(3) $$(\psi, \varphi) \circ (f \circ (x, y)) = ((\psi, \varphi) \circ f) \circ (x, y)\,.$$

3. - Categorie comma-contro rappresentabili.

Definizione. Una categoria comma-contro dicesi *rappresentabile* se ammette oggetto finale.

---

[3] È sottinteso che bisognerebbe passare dalle proto-categorie in questione alle categorie associate.

Un oggetto finale di $\mathscr{F}\searrow\mathscr{G}$ si dirà anche *oggetto rappresentante* di $\mathscr{F}\searrow\mathscr{G}$ [4].

Fissato $\mathscr{F}:\mathscr{C}\to\mathscr{E}$, si consideri la sottocategoria piena di Funct $(\mathscr{D}^{\text{op}}, \mathscr{E})$, che indicheremo con ${}_{\mathscr{F}}\mathscr{R}$ costituita da tutti e soli i funtori covarianti $\mathscr{G}:\mathscr{D}\to\mathscr{E}$ tali che $\mathscr{F}\searrow\mathscr{G}$ sia rappresentabile.

In tutto il paragrafo $\mathscr{A}$ denoterà un fissato schema di diagrammi; sia $D:\mathscr{A}\to{}_{\mathscr{F}}\mathscr{R}$ un diagramma.

Per ogni $I\in\operatorname{Ob}\mathscr{A}$, porremo $\mathscr{G}_I=D(I)$ e indicheremo nel seguito con (A_I, B_I, u_I) un arbitrario, ma fissato, oggetto finale di $\mathscr{F}\searrow\mathscr{G}_I$; se $m: I\to J$ in $\mathscr{A}$, porremo $\varphi_m=D(m)$. Dunque $\varphi_m:\mathscr{G}_I\to\mathscr{G}_J$ per ogni $m: I\to J$.

Per l'Osservazione 2, $(A_I, B_I, \varphi_m\circ u_I)\in\operatorname{Ob}\mathscr{F}\searrow\mathscr{G}_J$; quindi esiste una ed una sola coppia (h_m, k_m) che sia un morfismo, cioè tale che

$$\varphi_m\circ u_I = u_J\circ(h_m, k_m)\,. \tag{4}$$

In tal modo il funtore $D:\mathscr{A}\to{}_{\mathscr{F}}\mathscr{R}$ induce due funtori: $P:\mathscr{A}\to\mathscr{C}$ e $Q:\mathscr{A}\to\mathscr{D}$ tali che, se $I\in\operatorname{Ob}\mathscr{A}$ allora $P(I)=A_I$ e $Q(I)=B_I$, e se $m: I\to J$ in $\mathscr{A}$ allora $P(m)=h_m: A_I\to A_J$ e $Q(m)=k_m: B_I\to B_J$.

Date le categorie $\mathscr{H}$ e $\mathscr{K}$, comunque preso un oggetto $K\in\operatorname{Ob}\mathscr{K}$, chiameremo *funtore valutazione su* K il funtore $e(B)$: $\operatorname{Funct}(\mathscr{K},\mathscr{H})\to\mathscr{H}$, definito da $e(B)(\mathscr{F})=\mathscr{F}(B)$, $e(B)(\varphi)=\varphi(B)$.

Lemma 1. *Sia* $U: {}_{\mathscr{F}}\mathscr{R}\to\operatorname{Funct}(\mathscr{D}^{\text{op}},\mathscr{E})$ *il funtore inclusione, sia* $(\pi_I: \mathscr{L}\to\mathscr{G}_I)_{I\in\operatorname{Ob}\mathscr{A}}$ *un limite di* UD *e siano* $(\alpha_I: M\to A_I)_{I\in\operatorname{Ob}\mathscr{A}}$ *e* $(\beta_I: N\to B_I)_{I\in\operatorname{Ob}\mathscr{A}}$ *limiti di* P *e* Q *rispettivamente. Supponiamo che* (M, N, u) *sia un oggetto di* $\mathscr{F}\searrow\mathscr{L}$ *e* (A_I, B_I, u_I) *un oggetto finale di* $\mathscr{F}\searrow\mathscr{G}_I$ *tali che*

$$\pi_I\circ u = u_I\circ(\alpha_I, \beta_I)\,. \tag{5}$$

Allora (M, N, u) *è finale.*

Dimostrazione. Sia (X, Y, x) un qualunque oggetto di $\mathscr{F}\searrow\mathscr{L}$. Poichè $(X, Y, \pi_I\circ x)\in\operatorname{Ob}\mathscr{F}\searrow\mathscr{G}_I$, esiste una ed una sola coppia $(f_I, g_I): (X, Y)\to\to(A_I, B_I)$, tale che

$$\pi_I\circ x = u_I\circ(f_I, g_I) \qquad \text{per ogni } I\in\operatorname{Ob}\mathscr{A}\,. \tag{6}$$

[4] Per giustificare tale nomenclatura si ponga $\mathscr{E}=\text{Ens}$, $\mathscr{C}=\mathscr{D}$, $\mathscr{F}$ uguale al funtore costante di valore 1 e sia $\mathscr{A}\to\mathscr{F}\searrow\mathscr{G}$ l'ugualizzatore delle proiezioni Γ_1 e Γ_2. Allora $\mathscr{G}:\mathscr{C}\to\text{Ens}$ è rappresentabile nel senso di [2] se e solo se $\mathscr{A}$ ha oggetto finale.

Si considerino i diagrammi $P: \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ e $Q: \mathscr{A} \to \mathscr{D}$ e le famiglie $(f_I: X \to A_I)_{I \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}}$, $(g_I: Y \to B_I)_{I \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}}$. Per la (4) e la (6) e poichè $\mathscr{L}$ è limite di UD si ha:

$$u_J \circ (h_m f_I, k_m g_I) = u_J \circ (h_m, k_m) \circ (f_I, g_I) = \varphi_m \circ u_I \circ (f_I, g_I) =$$
$$= \varphi_m \circ \pi_I \circ x = \pi_J \circ x = u_J \circ (f_J, g_J) ,$$

da cui $h_m f_I = f_J$ e $k_m g_I = g_J$. Dunque le famiglie sono compatibili per i rispettivi diagrammi. Ma essendo M e N limiti per P e Q rispettivamente, esiste uno ed uno solo $f: X \to M$ ed esiste uno ed un solo $g: Y \to N$ tali che

$$\alpha_I f = f_I , \qquad \beta_I g = g_I . \tag{7}$$

Da ciò e dall'ipotesi (5), per ogni $I \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ si ha

$$\pi_I \circ u \circ (f, g) = u_I \circ (\alpha_I, \beta_I) \circ (f, g) = u_I \circ (f_I, g_I) = \pi_I \circ x .$$

Quindi $(f, g): (X, Y, x) \to (M, N, u)$.

Vediamo ora che (f, g) è unico. Supponiamo che esista $(f', g'): (X, Y, x) \to (M, N, u)$; allora $u \circ (f', g') = x$, cioè per ogni $I \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$, $\pi_I \circ u \circ (f', g') = \pi_I \circ x = u_I \circ (\alpha_I f, \beta_I g)$. Ma anche $\pi_I \circ u \circ (f', g') = u_I \circ (\alpha_I, \beta_I) \circ (f', g') = u_I \circ (\alpha_I f', \beta_I g')$. Da cui $\alpha_I f = \alpha_I f'$ e $\beta_I g = \beta_I g'$. Per l'unicità di f e g nelle (7) si ha $f = f'$ e $g = g'$.

Lemma 2. *Siano α_I, β_I, π_I come nel Lemma* 1. *Esiste allora un $(M, N, u) \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{F} \searrow \mathscr{L}$ che soddisfa la* (5).

Dimostrazione. Fissato $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$, sia $e(X): \mathrm{Funct}(\mathscr{D}^{\mathrm{op}}, \mathscr{E}) \to \mathscr{E}$ il funtore valutazione su X. La famiglia $\big(\mathscr{G}_I(\beta_I) u_I \mathscr{F}(\alpha_I): \mathscr{F}(M) \to \mathscr{G}_I(N)\big)_{I \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}}$ è compatibile per il diagramma $e(N)UD: \mathscr{A} \to \mathscr{E}$. Sia, infatti, $m: I \to J$; allora, essendo M e N limiti di P e Q rispettivamente, per la (4) si ha:

$$\varphi_m \circ u_I \circ (\alpha_I, \beta_I) = u_J \circ (h_m, k_m) \circ (\alpha_I, \beta_I) = u_J \circ (h_m \alpha_I, k_m \beta_I) = u_J \circ (\alpha_J, \beta_J) .$$

Ma poichè $\mathscr{L}(N)$ è limite per $e(N)UD$, esiste uno ed un solo $u: \mathscr{F}(M) \to \mathscr{L}(N)$ tale che $\pi_I \circ u = u_I \circ (\alpha_I, \beta_I)$.

Teorema 1. *Se $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$ sono complete, allora ${}_{\mathscr{F}}\mathscr{R}$ è completa.*

Dimostrazione. Sia $(\pi_I\colon \mathscr{L} \to \mathscr{G}_I)_{I \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}}$ un limite di UD. Ovviamente, $\mathscr{F} \searrow \mathscr{L}$ è vertice di un limite di D, nella categoria $\mathrm{Funct}(\mathscr{D}^{\mathrm{op}}, \mathscr{E})$; sarà quindi sufficiente provare che $\mathscr{F} \searrow \mathscr{L} \in {}_{\mathscr{F}}\mathscr{R}$ cioè che $\mathscr{F} \searrow \mathscr{L}$ è rappresentabile.

Per il Lemma 1 (e con le notazioni in esso introdotte) basterà dimostrare che esiste un $(M, N, u) \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{F} \searrow \mathscr{L}$ soddisfacente la (4), il che è assicurato dal Lemma 2.

Fissato $\mathscr{G}\colon \mathscr{D}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{E}$ si consideri la sottocategoria piena di $\mathrm{Funct}(\mathscr{C}, \mathscr{E})^{\mathrm{op}}$, che indicheremo con $\mathscr{R}_{\mathscr{G}}$ costituita da tutti e soli i funtori covarianti $\mathscr{F}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ tali che $\mathscr{F} \searrow \mathscr{G}$ sia rappresentabile.

Teorema 2. *Se $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ sono complete ed $\mathscr{E}$ è cocompleta, allora $\mathscr{R}_{\mathscr{G}}$ è completa.*

Dimostrazione. Sia $V\colon \mathscr{R}_{\mathscr{G}} \hookrightarrow \mathrm{Funct}(\mathscr{C}, \mathscr{E})^{\mathrm{op}}$ e sia $(\varrho_I\colon \mathscr{F}_I \to \mathscr{M})_{I \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}}$ un colimite di $VD\colon \mathscr{A} \to \mathscr{R}_{\mathscr{G}}$. Con considerazioni analoghe a quelle del Teorema 1, si prova che $\mathscr{M} \searrow \mathscr{G}$ è rappresentabile, cioè che esiste un $u\colon \mathscr{M}(M) \to \mathscr{G}(N)$ tale che (M, N, u) sia un oggetto finale di $\mathscr{M} \searrow \mathscr{G}$.

Riutilizzando le notazioni usate per il Lemma 1 si ha

Teorema 3. *Se $\mathscr{E}$ è completa, se*

$$\varprojlim UD = \varprojlim D = (\pi_I\colon \mathscr{L} \to \mathscr{G}_I)_{I \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}} \tag{8}$$

e se (M, N, l) è oggetto rappresentante di $\mathscr{F} \searrow \mathscr{L}$, allora P e Q hanno limite, di vertice M ed N rispettivamente.

Dimostrazione. Per ogni $m\colon I \to J$ siano h_m, k_m definiti dalla (4). Poichè $(M, N, l) \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{F} \searrow \mathscr{L}$, si ha che $(M, N, \pi_I \circ l) \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{F} \searrow \mathscr{G}_I$; detto (α_I, β_I) l'unico morfismo da $(M, N, \pi_I \circ l)$ ad (A_I, B_I, u_I), si ha

$$\pi_I \circ l = u_I \circ (\alpha_I, \beta_I)\,. \tag{9}$$

Si considerino i diagrammi P e Q e le famiglie $(\alpha_I\colon M \to A_I)_{I \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}}$ e $(\beta_I\colon N \to B_I)_{I \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}}$ rispettivamente. In virtù di (4), (9), (8), per ogni $m\colon I \to J$ in $\mathscr{A}$, si ha

$$u_J \circ (h_m \alpha_I, k_m \beta_I) = u_J \circ (h_m, k_m) \circ (\alpha_I, \beta_I) = \varphi_m \circ u_I \circ (\alpha_I, \beta_I) =$$

$$= \varphi_m \circ \pi_I \circ l = \pi_J \circ l = u_J \circ (\alpha_J, \beta_J)\,.$$

Ne segue $h_m \alpha_I = \alpha_J$ e $k_m \beta_I = \beta_J$, quindi le famiglie sono compatibili per i rispettivi diagrammi.

Siano ora $(x_I\colon X \to A_I)_{I \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}}$ e $(y_I\colon Y \to B_I)_{I \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}}$ famiglie compatibili per i diagrammi P e Q rispettivamente. Si ha che $(X, Y, u_I \circ (x_I, y_I)) \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{F} \searrow \mathscr{G}_I$. Si consideri il diagramma $e(Y)D\colon \mathscr{A} \to \mathscr{E}$ e la famiglia $(\mathscr{G}_I(y_I) u_I \mathscr{F}(x_I)\colon \mathscr{F}(x) \to \to \mathscr{G}_I(y))_{I \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}}$. Poichè, per la (4)

$$\varphi_m \circ u_I \circ (x_I, y_I) = u_J \circ (h_m, k_m) \circ (x_I, y_I) = u_J \circ (x_J, y_J) ,$$

la famiglia è compatibile. Essendo $\mathscr{L}(Y)$ limite per $e(Y)D$, esiste uno ed un solo $x\colon \mathscr{F}(X) \to \mathscr{L}(Y)$ tale che

$$\pi_I \circ x = u_I \circ (x_I, y_I) \qquad \text{per ogni } I \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{A} . \tag{10}$$

Quindi $(X, Y, x) \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{F} \searrow \mathscr{L}$.

Dimostreremo poco oltre che una coppia $(u, v)\colon (X, Y) \to (M, N)$ è un morfismo $(u, v)\colon (X, Y, x) \to (M, N, l)$ se e solo se per ogni $I \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{A}$, $\alpha_I u = x_I$ e $\beta_I v = y_I$: L'asserto segue allora dal fatto che (M, N, l) è finale.

Sia dunque $(u, v)\colon (X, Y, x) \to (M, N, l)$. Allora

$$l \circ (u, v) = x . \tag{11}$$

Ora, per ogni $I \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{A}$, per le (10), (11) e (9) si ha

$$u_I \circ (x_I, y_I) = \pi_I \circ x = \pi_I \circ l \circ (u, v) = u_I \circ (\alpha_I, \beta_I) \circ (u, v) = u_I \circ (\alpha_I u, \beta_I v) ,$$

da cui, per l'unicità di (x_I, y_I), segue $x_I = \alpha_I u$ e $y_I = \beta_I v$. Viceversa, siano $u\colon X \to M$ e $v\colon Y \to N$ tali che $\alpha_I u = x_I$ e $\beta_I v = y_I$. Poniamo $x' = l \circ (u, v)\colon \mathscr{F}(X) \to \mathscr{L}(Y)$. Per ogni $I \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{A}$ si ha

$$\pi_I \circ x' = \pi_I \circ l \circ (u, v) = u_I \circ (\alpha_I, \beta_I) \circ (u, v) = u_I \circ (x_I, y_I) = \pi_I \circ x ,$$

da cui $x = x'$.

Un teorema analogo sussiste per $\mathscr{R}_{\mathscr{G}}$.

4. - Categoria delle categorie comma-contro rappresentabili.

Si consideri la sottocategoria piena $\mathscr{R}$ di $\mathrm{Funct}(\mathscr{C}, \mathscr{E})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Funct}(\mathscr{D}^{\mathrm{op}}, \mathscr{E})$ così definita: $(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ appartiene ad $\mathscr{R}$ se e solo se $\mathscr{F} \searrow \mathscr{G}$ è rappresentabile; sia $W\colon \mathscr{R} \hookrightarrow \mathrm{Funct}(\mathscr{C}, \mathscr{E})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Funct}(\mathscr{D}^{\mathrm{op}}, \mathscr{E})$ il funtore di inclusione. Siano $\mathscr{A}$ uno schema di diagrammi e $D\colon \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ un diagramma fissato. Per ogni $I \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ indicheremo con $(\mathscr{F}_I, \mathscr{G}_I)$ l'oggetto $D(I)$; se $m\colon I \to J$ in $\mathscr{A}$ indicheremo con $(\psi_m, \varphi_m)\colon (\mathscr{F}_I, \mathscr{G}_I) \to (\mathscr{F}_J, \mathscr{G}_J)$ il morfismo $D(m)$.

Se vale la condizione

$$(\alpha) \qquad \text{per ogni } I, J \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}, \quad (\mathscr{F}_I, \mathscr{G}_J) \in \mathscr{R},$$

allora il funtore D induce due funtori: $\bar{P}\colon \mathscr{A}^2 \to \mathscr{C}$ e $\bar{Q}\colon \mathscr{A}^2 \to \mathscr{D}$, definiti come segue.

Se $I, H \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ e $\mathscr{F}_I \searrow \mathscr{G}_H$ è rappresentabile con (A_H^I, B_H^I, u_H^I), allora $\bar{P}(I, H) = A_H^I$ e $\bar{Q}(I, H) = B_H^I$. Siano ora $m\colon I \to J$ e $n\colon H \to H$ in $\mathscr{A}$; allora $(A_H^I, B_H^I, (\psi_m, \varphi_m) \circ u_H^I) \in \mathscr{F}_J \searrow \mathscr{G}_K$. Questa categoria è rappresentabile con (A_K^J, B_K^J, u_K^J). Si definisce allora $\bar{P}(m, n) = h_n^m$ e $\bar{Q}(m, n) = k_n^m$, dove $(h_n^m, k_n^m)\colon (A_H^I, B_H^I) \to (A_K^J, B_K^J)$ è l'unica coppia tale che

$$u_K^J \circ (h_n^m, k_n^m) = (\psi_m, \varphi_n) \circ u_H^I . \tag{12}$$

Lemma 3. *Sia $\mathscr{E}$ completa e cocompleta e sia*

$$\varprojlim WD = \big((\varrho_I, \pi_H)\colon (\mathscr{M}, \mathscr{L}) \to (\mathscr{F}_I, \mathscr{G}_H)\big)_{(I,H) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}^2} .$$

Sia inoltre $(M, N, l) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{M} \searrow \mathscr{L}$ e siano

$$(\alpha_H^I\colon M \to A_H^I)_{(I,H) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}^2} \qquad e \qquad (\beta_H^I\colon N \to B_H^I)_{(I,H) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}^2} \tag{13}$$

famiglie compatibili per $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ rispettivamente. Allora (M, N, l) è finale per $\mathscr{M} \searrow \mathscr{L}$ se e soltanto se le (13) *sono limiti.*

Dimostrazione. Siano $x\colon X \to M$ e $y\colon Y \to N$ in $\mathscr{E}$. Se (X, Y, v) è un oggetto di $\mathscr{M} \searrow \mathscr{L}$ esiste uno ed un solo morfismo

$$(x_H^I, y_H^I)\colon \big(X, Y, (\varrho_I, \pi_H) \circ v\big) \to (A_H^I, B_H^I, u_H^I) \qquad \text{in } \mathscr{F}_I \searrow \mathscr{G}_H . \tag{14}$$

Inoltre, essendo (M, N, l) un oggetto di $\mathscr{M} \searrow \mathscr{L}$, il morfismo

$$(\alpha_H^I, \beta_H^I)\colon \big(M, N, (\varrho_I, \pi_H) \circ l\big) \to (A_H^I, B_H^I, u_H^I) \qquad \text{è unico in } \mathscr{F}_I \searrow \mathscr{G}_H . \tag{15}$$

Allora le due seguenti condizioni sono equivalenti:

$$(\alpha_H^I, \beta_H^I) \circ (x, y) = (x_H^I, y_H^I) \qquad \text{per ogni } (I, H) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}^2, \tag{16}$$

$$l \circ (x, y) = v \,. \tag{17}$$

Infatti, componendo la (16) a sinistra con u_H^I, per le (14) e (15) si ottiene

$$(\varrho_I, \pi_H) \circ l \circ (x, y) = (\varrho_I, \pi_H) \circ v \,,$$

da cui la (17). Viceversa, componendo a sinistra la (17) con (ϱ_I, π_H), si ottiene

$$u_H^I \circ (\alpha_H^I, \beta_H^I) \circ (x, y) = u_H^I \circ (x_H^I, y_H^I) \,,$$

da cui la (16).

Si osservi che la (17) equivale a dire che $(x, y)\colon (X, Y, v) \to (M, N, l)$. Ora, supponendo M e N limiti, esiste un'unica coppia (x, y) soddisfacente la (16), quindi (M, N, l) è finale.

Viceversa, se (M, N, l) è finale, la coppia (x, y) è l'unica che soddisfa la (17), da cui l'universalità di M e N.

Siano E_1 ed E_2 le proiezioni da $\mathrm{Funct}(\mathscr{C}, \mathscr{E})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Funct}(\mathscr{D}^{\mathrm{op}}, \mathscr{E})$.

Teorema 4. *Se $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ sono complete ed $\mathscr{E}$ è completa e cocompleta, allora il diagramma $D\colon \mathscr{A} \to \mathscr{R}$ ha limite e $\varprojlim D = \varprojlim WD$.*

Dimostrazione. Sia

$$(\varrho_I\colon \mathscr{F}_I \to \mathscr{M})_{I \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}} = \varprojlim E_1 WD \,, \qquad \text{sia} \qquad (\pi_I\colon \mathscr{L} \to \mathscr{G}_I)_{I \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}} = \varprojlim E_2 WD$$

e siano $(\alpha_I^H\colon M \to A_H^I)_{(I,H) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}^2}$ e $(\beta_H^I\colon N \to B_H^I)_{(I,H) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}^2}$ limiti di $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ rispettivamente. Per valutazione su M ed N rispettivamente si ha

$$\big(\varrho_I(M)\colon \mathscr{F}_I(M) \to \mathscr{M}(M)\big)_{I \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}} = \varinjlim e(M) E_1 WD \tag{18}$$

e

$$\big(\pi_I(N)\colon \mathscr{G}_I(N) \to \mathscr{L}(N)\big)_{I \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}} = \varprojlim e(N) E_2 WD \,. \tag{19}$$

Si consideri la famiglia (doppia)

$$\big(\mathscr{G}_H(\beta_H^I)\, u_H^I \mathscr{F}_I(\alpha_H^I)\colon \mathscr{F}_I(M) \to \mathscr{G}(N)\big)_{(I,H) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}^2} \,. \tag{20}$$

Se $m\colon I \to J$ e $n\colon H \to K$ in $\mathscr{A}$, per la (12) e poichè M e N sono limiti di $\bar{P}$

e $\bar{Q}$ si ha:

$$(\psi_m, \varphi_m)\circ u^I_H \circ(\alpha^I_H, \beta^I_H) = u^J_K\circ(h^m_n, k^m_n)\circ(\alpha^I_H, \beta^I_H) =$$
$$= u^J_K\circ(h^m_n\alpha^I_H, k^m_n\beta^I_H) = u^J_K\circ(\alpha^J_H, \beta^J_K) = (\psi_m, \varphi_n)\circ u^J_K,$$

quindi la famiglia (20) è (doppiamente) compatibile per i diagrammi $e(M)E_1WD$ ed $e(N)E_2WD$.

Per le (18) e (19) esiste allora uno ed un solo $l: \mathscr{M}(M)\to\mathscr{L}(N)$ tale che

$$(\varrho_I, \pi_H)\circ l = u^I_H\circ(\alpha^I_H, \beta^I_H), \qquad I, H\in \operatorname{Ob}\mathscr{A}. \tag{21}$$

Essendo M ed N limiti di $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ rispettivamente, l'oggetto $(M, N, l)\in \in\mathscr{M}\searrow\mathscr{L}$, per il lemma precedente, è oggetto finale.

Usando le notazioni del teorema precedente si dimostra il

Teorema 5. *Se $\mathscr{E}$ è completa e cocompleta, se*

$$\varprojlim D = \varprojlim WD = \big((\varrho_I, \pi_H): (\mathscr{M}, \mathscr{L})\to(\mathscr{F}_I, \mathscr{G}_H)\big)_{(I,H)\in\operatorname{Ob}\mathscr{A}^2}$$

e se (M, N, l) è oggetto finale di $\mathscr{M}\searrow\mathscr{L}$, allora $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ hanno limite, di vertice M ed N rispettivamente.

Dimostrazione. Comunque presi $(I, H)\in\operatorname{Ob}\mathscr{A}^2$, $\big(M, N, (\varrho_I, \pi_H)\circ l\big)\in \in\operatorname{Ob}\mathscr{F}_I\searrow\mathscr{G}_H$. Quindi esiste una ed una sola coppia $(\alpha^I_H, \beta^I_H): (M, N)\to \to(A^I_H, B^I_H)$, tale che

$$(\varrho_I, \pi_H)\circ l = u^I_H\circ(\alpha^I_H, \beta^I_H). \tag{24}$$

Si considerino i diagrammi $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ e le famiglie $(\alpha^I_H: M\to A^I_H)_{(I,H)\in\operatorname{Ob}\mathscr{A}^2}$ e $(\beta^I_H: N\to \to B^I_H)_{(I,H)\in\operatorname{Ob}\mathscr{A}^2}$. Si ha, per le (12) e (24):

$$u^J_K\circ(h^m_n\alpha^I_H, k^m_n\beta^I_H) = u^J_K\circ(h^m_n, k^m_n)\circ(\alpha^I_H, \beta^I_H) = (\psi_m, \varphi_n)\circ u^I_H\circ(\alpha^I_H, \beta^I_H) =$$
$$= (\psi_m, \varphi_n)\circ(\varrho_I, \pi_H)\circ l = (\varrho_J, \pi_K)\circ l = u^J_K\circ(\alpha^J_K, \beta^J_K),$$

da cui, per l'unicità di (α^J_K, β^J_K), si deduce $h^m_n\alpha^I_H = \alpha^J_K$ e $k^m_n\beta^I_H = \beta^J_K$. Quindi le famiglie sono compatibili per i rispettivi diagrammi.

Essendo (M, N, l) finale per $\mathscr{M}\searrow\mathscr{L}$, per il Lemma 3, esse sono anche limiti per $\bar{P}$ e $\bar{Q}$.

Bibliografia.

[1] S. MAC LANE, *Category for working mathematician*, Springer Verlag, Berlin 1971.

[2] S. MAC LANE and G. BIRKHOFF, *Algebra*, Mursia, Milano 1975.

[3] C. MARCHINI, *Funtori rappresentabili e formule di Horn*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **12** (1973), 335-347.

[4] D. PUMPLUN, *Universelle und spezielle probleme*, Math. Ann. **198** (1972), 131-146.

[5] M. SERVI, *Su alcuni funtori che conservano le SH*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **3** (1974), 291-308.

Summary.

We introduce the concept of comma-contro representable category and we study completeness questions concerning these categories.

* * *