Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 247-254

V. Mangione e A. Vezzani (*)

Sulle connessioni J-semisimmetriche di una varietà quasi hermitiana. (**)

1. - Introduzione.

In letteratura si trovano lavori, anche recenti, sulle connessioni semisimmetriche con particolare riferimento a problemi di curvatura.

Nello stesso ordine di idee nella presente nota si studiano, su di una varietà quasi hermitiana, *le connessioni J-semisimmetriche* introdotte da G. B. Rizza nel 1965. Si stabilisce dapprima un *teorema di rappresentazione* per le connessioni J-semisimmetriche metriche (teor. T_1, n. **3**). Una successiva osservazione consente di ritrovare una caratterizzazione delle varietà kähleriane dovuta a S. Donnini.

L'osservazione O_2 e il teorema T_2 del n. **4**, quest'ultimo concernente le varietà kähleriane, derivano dal confronto tra i *tensori di curvatura di Riemann, di Ricci* e *la curvatura scalare*, relativi ad una connessione J-semisimmetrica, e i corrispondenti tensori e scalari classici.

I teoremi T_3, T_4, T_5, T_6 del n. **5** precisano poi geometricamente per quali campi vettoriali le nozioni di *rotore*, *divergenza*, di *derivata di Lie del tensore metrico g e di quello della struttura quasi complessa J*, relativi ad una connessione J-semisimmetrica, coincidono con quelle classiche.

Infine, le osservazioni O_3, O_4 (n. **5**, **6**) danno condizioni sufficienti perchè una connessione J-semisimmetrica si riduca alla connessione di Levi-Civita (condizioni di simmetria). L'osservazione O_5 (n. **6**) fornisce una semplice caratterizzazione delle connessioni J-semisimmetriche che appartengono ad una classe introdotta e studiata da P. Enghis.

(*) Indirizzo: Ist. di Mat. Università, 43100 Parma, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 6-IV-1977.

2. - Preliminari.

Sia V una varietà a struttura quasi complessa di classe C^r $(r \geqslant 3)$ e di dimensione reale $2n$, x un punto di V, τ lo spazio vettoriale tangente a V in x, τ^* lo spazio vettoriale duale.

Sia poi J il campo tensoriale di classe C^s $(s \geqslant 2)$ che definisce la struttura di V (¹).

Indicato con J anche l'isomorfismo anti-involutorio definito dalla struttura quasi complessa nello spazio vettoriale τ, τ^*, si ha

$$(1) \qquad \tilde{v} = Jv = c_1^1(J \otimes v), \qquad \tilde{w} = Jw = -\, c_1^1(J \otimes w), \qquad (v \in \tau\,,\; w \in \tau^*) \text{ (}^2\text{)}\,.$$

Il carattere anti-involutorio di J è conseguenza della relazione

$$(2) \qquad c_1^1(J \otimes J) = -\,\delta \qquad (\delta \text{ tensore di Kronecker})\,.$$

Si consideri ora su V una connessione affine A e sia T_A la torsione di A; *la connessione si dirà J-semisimmetrica se e solo se esiste un campo vettoriale covariante, t, tale che in ogni punto x di V si abbia*

$$(3) \qquad T_A = \varepsilon(t \otimes J) \text{ (}^3\text{)}\,.$$

Ovviamente se è $t = 0$ la connessione è simmetrica.

Per il seguito conviene assumere t di classe C^1.

La connessione si dirà *speciale* se il campo t risulterà il gradiente di una funzione f di classe C^2.

Se su V è assegnata una struttura riemanniana mediante un campo tensoriale simmetrico g di tipo $(0, 2)$, e inoltre risulta

$$(4) \qquad c_1^1 c_1^1(g \otimes J \otimes J) = g\,,$$

la varietà quasi complessa V è una *varietà quasi hermitiana* (⁴).

(¹) Nel seguito una stessa lettera indicherà, a seconda del contesto, un campo di tensori su V o il tensore di quel campo nel punto x di V.

(²) In generale c_k^j è l'applicazione tensoriale di contrazione relativa all'j-simo indice di controvarianza e al k-simo indice di covarianza.

(³) Le connessioni J-semisimmetriche sono state introdotte da G. B. Rizza, cfr. [4]₁, p. 238. Anche nel seguito ε e σ indicano gli omomorfismi di emisimmetrizzazione e di simmetrizzazione *relativi ai primi due indici di covarianza*, indotti nello spazio tensoriale considerato dagli analoghi omomorfismi di $\tau^* \otimes \tau^*$.

(⁴) Si veda p. es. K. Yano [7], p. 191.

Si considerino anche i *campi tensoriali emisimmetrici*

(5) $$\mathscr{H} = c_1^1(g \otimes J) , \qquad H = c_1^1(G \otimes J) ,$$

di tipo (0, 2), (2, 0) rispettivamente, essendo G il campo tensoriale simmetrico di tipo (2, 0) definito implicitamente da

(6) $$c_1^1(g \otimes G) = \delta .$$

Interverranno nel seguito *connessioni metriche* e *connessioni a tensore J parallelo* per le quali si ha, rispettivamente $Dg = 0$, $DJ = 0$, avendo indicato con D l'ordinario operatore di derivazione covariante relativo alla connessione.

Interessano poi le ordinarie nozioni di *rotore*, di *divergenza di un campo vettoriale*, e di *derivata di Lie dei campi tensoriali g e J*, e le corrispondenti *nozioni generalizzate* ad un'arbitraria connessione affine A (5). Se w, v sono campi vettoriali, covariante il primo, controvariante il secondo, si usano le notazioni $\operatorname{rot} w$, $\operatorname{div} v$, $\underset{v}{\mathscr{L}} g$, $\underset{v}{\mathscr{L}} J$ nel caso ordinario e $\operatorname{rot}_A w$, $\operatorname{div}_A v$, $\underset{v}{\mathscr{L}_A} g$, $\underset{v}{\mathscr{L}_A} J$ in quello generalizzato.

Conviene infine ricordare che un'arbitraria connessione A di V è rappresentata univocamente da

(7) $$A = \overset{\circ}{\Gamma} + \Sigma_A + T_A,$$

essendo $\overset{\circ}{\Gamma}$ la connessione di Levi-Civita definita dalla struttura riemanniana e Σ_A, T_A due campi tensoriali di tipo (1, 2), simmetrico il primo, emisimmetrico il secondo (torsione di A) (6).

In particolare le connessioni *J-semisimmetriche* sono rappresentate dalla (4) con T_A della forma (3) e Σ_A arbitrario.

In questo lavoro vengono anche considerate le *connessioni della classe $\mathscr{L}$*, rappresentate dalla (4) con $\Sigma_A = 0$ e T_A arbitrario e le *connessioni* di P. Enghis, rappresentate dalla (4) con Σ_A arbitrario e T_A soddisfacente alla condizione $\operatorname{rot}_A (c_1^1 T_A) = 0$ (7).

---

(5) Queste nozioni generalizzate sono state introdotte e studiate in [**3**].

(6) Si veda per es.: V. Mangione e A. Vezzani [**3**], (6), p. 100; G. B. Rizza [**4**]$_3$, [**4**]$_4$.

(7) Per le connessioni di $\mathscr{L}$ ved. V. Mangione e A. Vezzani [**3**]; G. B. Rizza [**4**]$_3$, [**4**]$_4$. Per l'altro caso ved. P. Enghis [**2**]. La prima di queste classi si può considerare più in generale su una qualunque varietà riemanniana, la seconda su una qualunque varietà reale.

3. - Connessioni J-semisimmetriche metriche.

In una varietà quasi hermitiana è naturale considerare *connessioni J-semisimmetriche metriche*. Se t è il campo di vettori covarianti che interviene nella definizione (n. **2**), sussiste il *teorema di rappresentazione*

T$_1$. *Le connessioni J-semisimmetriche metriche sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto x di V, da*

$$\Lambda = \overset{\circ}{\Gamma} + t \otimes J \,. \tag{8}$$

Il teorema si dimostra tenendo conto della rappresentazione delle connessioni metriche $\big(\Sigma_\Lambda = 2\sigma\gamma(T_\Lambda)\big)$ (8), della (3) e della emisimmetria di $\mathscr{H}$.

Ciò premesso è bene osservare che, indicato con $\overset{\circ}{D}$ l'operatore di derivazione covariante rispetto alla connessione di Levi-Civita, si ha

O$_1$. *Se Λ è una connessione J-semisimmetrica metrica risulta*

$$DJ = \overset{\circ}{D}J \,. \tag{9}$$

Dalla O$_1$ discende immediatamente la caratterizzazione delle varietà kähleriane ottenuta da S. Donnini (9). Conviene poi notare esplicitamente che *su una varietà kähleriana, ogni connessione J-semisimmetrica metrica è a tensore J parallelo.*

La O$_1$ si prova direttamente; le altre considerazioni seguono immediatamente dalla (9) tenuto conto che la condizione $\overset{\circ}{D}J = 0$ caratterizza le varietà kähleriane.

4. - Tensori di curvatura.

Siano $\overset{\circ}{R} \in \tau_* \otimes \tau_* \otimes \tau_* \otimes \tau$ *il tensore di curvatura di Riemann*, $\overset{\circ}{\mathscr{R}} = c_1^1 \overset{\circ}{R}$ *il tensore di Ricci*, $\overset{\circ}{K} = c_1^1 c_1^1(G \otimes \overset{\circ}{\mathscr{R}})$ *la curvatura scalare*, relativi al generico punto x di V e alla connessione $\overset{\circ}{\Gamma}$; siano poi R, $\mathscr{R}$, K, le loro generalizzazioni mediante un'arbitraria connessione Λ (10).

(8) Ved. per es.: G. B. Rizza [**4**]$_2$, (22), p. 170; oppure K. Yano [**7**], (5.6), p. 143.

(9) Cfr. S. Donnini [**1**], teor. T$_2$, p. 205.

(10) Per le definizioni di R e $\mathscr{R}$ cfr. J. A. Schouten [**5**], (4.2), p. 138 e (4.23), p. 141; per K è: $K = c_1^1 c_1^1(G \otimes \mathscr{R})$.

In una varietà quasi hermitiana, relativamente ad una *connessione J-semisimmetrica metrica*, si ha

$$R = \overset{\circ}{R} + 2\varepsilon\overset{\circ}{D}(t \otimes J) \text{ (11)}, \tag{10}$$

$$\mathscr{R} = \overset{\circ}{\mathscr{R}} + c_1^1\overset{\circ}{D}(t \otimes J) + \overset{\circ}{D}\tilde{t}, \tag{11}$$

$$K = \overset{\circ}{K} + 2 \operatorname{div} \tilde{t}. \tag{12}$$

La (10) è stata ottenuta a partire dalla (4.22a) di [**5**] tenendo conto delle (8), (2), (5). Le (11), (12) si deducono dalla (10), attese le definizioni di $\mathscr{R}$, K, tenendo presente la (1) e ricordando che $\overset{\circ}{D}g = 0$.

Se la connessione J-semisimmetrica è *speciale* ($t = \operatorname{grad} f$) si ha

$$R = \overset{\circ}{R} - 2\varepsilon(\operatorname{grad} f \otimes \overset{\circ}{D}J), \tag{10'}$$

$$\mathscr{R} = \overset{\circ}{\mathscr{R}} + (c_2^1 - c_1^1)(\operatorname{grad} f \otimes \overset{\circ}{D}J), \tag{11'}$$

$$K = \overset{\circ}{K} + 2c_1^1 c_1^1(\operatorname{grad} f \otimes \overset{\circ}{D}H), \tag{12'}$$

essendo H il tensore definito al n. **2**.

Se la varietà è, in particolare, *kähleriana* ($\overset{\circ}{D}J = 0$) le (10), (11), (12) diventano:

$$R = \overset{\circ}{R} + (\operatorname{rot} t) \otimes J, \tag{13}$$

$$\mathscr{R} = \overset{\circ}{\mathscr{R}} + c_1^1\big((\operatorname{rot} t) \otimes J\big), \tag{14}$$

$$K = \overset{\circ}{K} - 2c_1^1 c_1^1(H \otimes \overset{\circ}{D}t). \tag{15}$$

Ciò premesso, se *V è quasi hermitiana* e Λ è una *connessione J-semisimmetrica metrica*, si ha:

O_2. *$K = \overset{\circ}{K}$, se e solo se il campo $\tilde{t}$ è solenoidale.*

Se V è una *varietà kähleriana*, nella stessa ipotesi per Λ, sussiste il teorema

T_2. *Le tre condizioni $\mathscr{R} = \overset{\circ}{\mathscr{R}}$, $R = \overset{\circ}{R}$,* $\operatorname{rot} t = 0$ *sono equivalenti.*

In particolare *se la connessione Λ è speciale* ($t = \operatorname{grad} f$), *risulta* $\operatorname{rot} t = 0$ e cioè $R = \overset{\circ}{R}$, $\mathscr{R} = \overset{\circ}{\mathscr{R}}$. Localmente, sussiste anche la proposizione inversa.

---

(11) Il primo indice di covarianza del tensore $\overset{\circ}{D}(t \otimes J)$ è quello di derivazione covariante.

L'osservazione O_2 segue immediatamente dalla (12). Il teorema T_2 discende subito dal confronto delle (13), (14), attesa la (2). L'osservazione che segue T_2 è ovvia.

5. - Λ nozioni.

Le nozioni di *rotore*, di *divergenza di un vettore*, di *derivata di Lie dei tensori* g e J, introdotte in [3], con riferimento ad una connessione Λ generica, vengono considerate ora relativamente ad una connessione Λ *J-semisimmetrica.* Poichè per un arbitrario campo vettoriale queste nozioni non coincidono con le corrispondenti nozioni classiche ([12]), è naturale ricercare i particolari campi vettoriali per i quali ciò avvenga.

Posto $s = c_1^1 \Sigma_\Lambda$, attese le (20), (21), (22), (23) di [3], il problema indicato si traduce nelle condizioni:

$$\varepsilon(t \otimes \tilde{w}) = 0 \,, \tag{16}$$

$$c_1^1\big((2s - \tilde{t}) \otimes v\big) = 0 \,, \tag{17}$$

$$\sigma\big(t \otimes c_1^1(\mathscr{H} \otimes v)\big) = 0 \,, \tag{18}$$

$$t \otimes v = \tilde{t} \otimes \tilde{v} \,. \tag{19}$$

Se la connessione Λ è addirittura *simmetrica* ($t = 0$) risulta

$$\mathrm{rot}_\Lambda w = \mathrm{rot}\, w \,, \qquad \underset{v}{\mathscr{L}_\Lambda} g = \underset{v}{\mathscr{L}} g \,, \qquad \underset{v}{\mathscr{L}_\Lambda} J = \underset{v}{\mathscr{L}} J \,,$$

per ogni campo controvariante v e per ogni campo covariante w ([13]), mentre si ha $\mathrm{div}_\Lambda v = \mathrm{div}\, v$ se e solo se v è perpendicolare ad s.

Ciò premesso, se Λ è una qualunque *connessione J-semisimmetrica*, con campo t *quasi ovunque non nullo*, sussistono i teoremi

T_3. *Risulta* $\mathrm{rot}_\Lambda w = \mathrm{rot}\, w$ *per tutti e soli i campi vettoriali covarianti* w *paralleli al campo* $\tilde{t}$.

T_4. *Risulta* $\mathrm{div}_\Lambda v = \mathrm{div}\, v$ *per tutti e soli i campi vettoriali controvarianti* v *perpendicolari al campo* $2s - \tilde{t}$. *In particolare se* Λ *è metrica, ovvero della classe* $\mathscr{L}$, *l'uguaglianza sussiste per tutti e soli i campi* v *perpendicolari a* $\tilde{t}$.

([12]) Cfr. V. Mangione e A. Vezzani [3], p. 103.

([13]) Questi risultati rientrano come casi particolari nei teoremi T_1, T_3, T_4 del lavoro [3].

T_5. *Non esistono campi vettoriali controvarianti v, diversi dal campo nullo, per i quali risulti* $\underset{v}{\mathscr{L}_A} g = \underset{v}{\mathscr{L}} g$.

T_6. *Non esistono campi vettoriali controvarianti v, diversi dal campo nullo, per i quali si abbia* $\underset{v}{\mathscr{L}_A} J = \underset{v}{\mathscr{L}} J$.

Per dimostrare T_3 basta osservare che la (16) equivale a $t \wedge \tilde{w} = 0$.

T_4 discende immediatamente dalla (17), osservando che se A è metrica, ovvero della classe $\mathscr{L}$, il campo $2s - \tilde{t}$ si riduce a $-2\tilde{t}$, $-\tilde{t}$ rispettivamente.

Per ottenere T_5 si osservi che dalla (18), interpretando G come forma bilineare simmetrica, segue $G(t, t)G(\tilde{v}, \tilde{v}) + G^2(t, \tilde{v}) = 0$, onde quasi ovunque $\tilde{v} = 0$ e di conseguenza $v = 0$ su V.

Per stabilire T_6 si moltiplichi tensorialmente la (19) per $c_1^1(g \otimes v)$ e si operi successivamente con c_1^1. Poichè, come è noto, v e $\tilde{v}$ sono ortogonali, la conclusione è immediata.

Conviene notare che dal teorema T_3, poichè t e $\tilde{t}$ sono ortogonali segue l'osservazione

O_3. *La condizione* $\mathrm{rot}_A\, t = \mathrm{rot}\, t$ *implica la simmetria della connessione A.*

Ne segue che *una connessione J-semisimmetrica speciale con campo* $t = \mathrm{grad}\, f$ *A-irrotazionale è necessariamente simmetrica.*

6. - Alcune osservazioni.

Conviene aggiungere ancora due osservazioni che pongono in relazione, su di una varietà quasi hermitiana V, le connessioni J-semisimmetriche con le *connessioni di Levi-Civita generalizzate* (connessioni della classe $\mathscr{L}$) e con le *connessioni di P. Enghis* (n. **2**). Precisamente

O_4. *Sia A una connessione J-semisimmetrica della classe $\mathscr{L}$. Se risulta $DJ = \overset{\circ}{D}J$ (in particolare se A è metrica), A coincide con la connessione di Levi-Civita $\overset{\circ}{\Gamma}$. In particolare, se V è kähleriana, la condizione si riduce a $DJ = 0$.*

O_5. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una connessione J-semisimmetrica sia di P. Enghis è* $\mathrm{rot}\, \tilde{t} = 0$. *Se V è quasi kähleriana e la connessione è speciale, la condizione esprime che il campo* $t = \mathrm{grad}\, f$ *è quasi analitico.*

Per stabilire O_4 si tenga presente che, nel caso attuale, $\Sigma_A = 0$, mentre T_A è dato dalla (3). D'altra parte, in base al teorema T_9 del lavoro [**4**]$_1$, $\Sigma_A + T_A$ soddisfa alla condizione A_1; segue subito $t = 0$. Il caso di A metrica si riconduce al precedente in virtù dell'osservazione O_1. L'ultima parte dell'asserto è immediata in quanto, se V è kähaleriana, si ha $\overset{\circ}{D}J = 0$ (n. **3**).

Come si è visto al n. **2**, se Λ è una connessione di P. Enghis il *campo vettoriale torsione* $c_1^1 T_\Lambda$ (14) *è Λ-irrotazionale*. Ora, se Λ è J-semisimmetrica risulta $c_1^1 T_\Lambda = -\frac{1}{2}\tilde{t}$. La prima parte dell'asserto di O_5 segue allora dal teorema T_3 del n. **5**. Se poi *V è quasi kähleriana* (cioè rot $\mathscr{H} = 0$) e $t = \operatorname{grad} f$, si perviene all'asserto in virtù di un teorema noto (15).

---

(14) Cfr. G. Vranceanu [**6**], p. 227.

(15) Ved. K. Yano [7], teorema (6.1), p. 166.

Bibliografia.

[1] S. Donnini, *Una relazione concernente le connessioni di una varietà quasi hermitiana*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **2** (1976), 199-205.

[2] P. Enghis, *Sur les espaces A_n à connexion affine*, Studia Univ. Babes-Bolyai Ser. Math.-Mech. (1972).

[3] V. Mangione e A. Vezzani, *Due classi di connessioni sulle varietà riemanniane e quasi hermitiane*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino **34** (1975-76), 97-110.

[4] G. B. Rizza: [•]$_1$ *Sulle connessioni di una varietà quasi complessa*, Ann. Mat. (4) **68** (1965), 233-254; [•]$_2$ *Connessioni metriche sulle varietà quasi hermitiane*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **1** (1969), 163-181; [•]$_3$ *Alcuni risultati sulle varietà quasi hermitiane*, Convegno Un. Mat. Ital. Cagliari (settembre 1975); [•]$_4$ *A set of affine connections on Riemannian and almost Hermitian manifolds*, Simon Stevin, Wis. en. Natuurkundig Tijdschrift, 1977.

[5] J. A. Schouten, *Ricci calculus*, Springer, Berlin 1954.

[6] G. Vranceanu, *Leçons de géométrie différentielle*, Bucuresti 1957.

[7] K. Yano, *Differential geometry on complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, Oxford 1965.

Summary.

The paper studies the J-semisymmetric connections of an almost hermitian manifold. In particular a representation of the metric J-semisymmetric connections is obtained. Further results concern some remarkable fields such as Riemann and Ricci curvature tensor fields, the curl and the divergence of a vector field, considered both in their classical and generalized meaning.

* * *