Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 203-211

CELESTINA FERRERO COTTI (*)

Su una classe di anelli cocritici. (**)

Introduzione.

La classe più ovvia di anelli cocritici (cfr. [**3**]) è costituita dagli anelli che non sono zero-anelli ma tutti i cui sottoanelli lo sono: li chiameremo brevemente PZS-anelli.

Il presente lavoro è dedicato alla classificazione e allo studio di tali anelli. Quelli che non possono essere generati (come anelli) da un solo elemento, sono caratterizzati dal nostro Teorema 2; tale teorema, insieme col relativo procedimento dimostrativo, permette di costruire immediatamente tutti gli anelli in questione mediante generatori e relazioni.

Più minuto è lo studio dei PZS-anelli che possono essere generati da un solo elemento: nel caso nilpotente, la quarta potenza di un tale anello è nulla e gli anelli in questione vengono ancora classificati e costruiti completamente nello spirito di [**5**] (Teoremi 4, 5).

Una caratterizzazione dei PZS-anelli non nilpotenti con un generatore è fornita dal Teorema 7: una loro classificazione più minuta che permetta la costruzione con generatori e relazioni è conseguenza immediata del Corollario 1.

1. - Generalità.

1. – Ricordiamo anzitutto che abbiamo chiamato *cocritico* (in [**3**]) un anello che possieda sottoanelli proprii ma che non appartenga alla varietà [1] da essi generata.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). — Ricevuto: 3-III-1977.

(1) Cfr. per la definizione [**3**] e per analogia [**7**].

Osservazione 1. *Un anello A, non zero-anello, tutti i cui sottoanelli sono zero-anelli, è cocritico.*

La dimostrazione è immediata tosto che si ricordino le definizioni.

Per rendere più compatti gli enunciati successivi cominciamo con la

Definizione A. *Un anello A sarà detto ZS-anello se tutti i suoi sottoanelli sono zero-anelli. Sarà detto ZS-anello proprio (o brevemente PZS-anello) se è un ZS-anello ma non è uno zero-anello.*

Ovviamente gli ZS-anelli costituiscono un omomorfo (2); l'interesse dei PZS-anelli è anche legato alla vaga analogia (3) dei nostri risultati col teorema di Schmidt-Iwasawa (4).

Definizione B. *Un anello A sarà detto n-generato se ammette un sistema di generatori formato da n elementi; sarà detto propriamente n-generato (o brevemente Pn-generato) se è n-generato ma non $(n-1)$-generato.*

Possiamo ora enunciare il

Teorema 1. *Un PZS-anello A non può essere Pn-generato per $3 \leqslant n$.*

Supponiamo che A sia uno ZS-anello Pn-generato, con $3 \leqslant n$, e sia $\{a_i\}_{i \in I}$ un suo sistema di generatori. Ogni insieme della forma $\{a_i, a_j\}$ $(i, j \in I)$ genera allora un sottoanello *proprio* S di A (perchè A non è 2-generato) ed S è un zero-anello (perchè A è un ZS-anello). Ne segue che

$$a_j^2 = a_i^2 = a_i a_j = a_j a_i = 0\ , \qquad \forall i, j \in I\ .$$

Pertanto A è un zero-anello e dunque non un PZS-anello, contro l'ipotesi.

2. - Classificazione dei PZS-anelli $P2$-generati.

2. – Sulla base del Teorema 1 la classificazione dei PZS-anelli può essere svolta completamente trattando i PZS-anelli $P2$-generati e, a parte, quelli 1-generati. I PZS-anelli $P2$-generati saranno studiati usando ripetutamente semplici fatti che qui enunciamo esplicitamente (5).

---

(2) Nel senso che ogni immagine omomorfa di uno ZS-anello è uno ZS-anello. Cfr. ad es. [**6**].

(3) Dovuta al fatto che gli zero-anelli sono anelli nilpotenti e come tali parzialmente analoghi ai gruppi nilpotenti. Cfr. per es. [**5**].

(4) Cfr. ad es. [**1**].

(5) Anche se più tardi, per brevità, potremo utilizzarli senza fare esplicito richiamo agli enunciati qui presentati.

Lemma 1. *Un PZS-anello A che sia P2-generato è anticommutativo* (6), *ed il quadrato di ogni suo elemento è nullo* (7). *Se inoltre $M = \{a, b\}$ è un sistema di generatori di A, allora il prodotto di tre qualunque elementi di M è sempre nullo.*

Ogni elemento x che appartenga ad A genera infatti un sottoanello proprio X di A (perchè A è P2-generato), dunque uno zero-anello. Ne segue che $x^2 = 0$. Di qui segue (cfr. [**9**]) che A è anticommutativo. Poichè allora $a^2 = b^2 = 0$ ed $ab = -ba$ è immediato verificare che il prodotto di n elementi di M è nullo, tosto che $3 \leqslant n$.

Ricordiamo ora che dato un anello A si usa indicare con A^n il sottoanello generato dagli elementi che sono prodotto di n elementi di A.

Lemma 2. *Sia A un PZS-anello P2-generato. L'insieme $M = \{a, b\}$, $(a, b \in A)$, è un sistema di generatori di A se e solo se $ab \neq 0$. In tali condizioni $\{a, b, ab\}$ genera il gruppo additivo A^+ di A, ab genera il gruppo additivo di A^2 ed $A^3 = 0$.*

Se M è un sistema di generatori di A, $ab \neq 0$ altrimenti A sarebbe uno zero-anello.

Sia viceversa $ab \neq 0$. Allora M genera A, altrimenti genererebbe un sottoanello proprio di A non zero-anello. In tali condizioni $\{a, b, ab\}$ genera il gruppo A^+ perchè il prodotto di tre elementi di M è sempre nullo (Lemma 1).

Se infine $x = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 ab$, $y = \bar{\alpha}_1 a + \bar{\alpha}_2 b + \bar{\alpha}_3 ab$ sono elementi di A, il prodotto $xy = (\alpha_1\bar{\alpha}_2 - \alpha_2\bar{\alpha}_1)ab$ è un multiplo intero di ab, onde ab genera A^2. Inoltre (Lemma 1), il prodotto di tre elementi qualunque di A è nullo e dunque $A^3 = 0$.

3. – Visti i risultati precedenti e per brevità indicheremo semplicemente *con A un PZS-anello P2-generato e con M un suo sistema $\{a, b\}$ di generatori.*

Lemma 3. *L'ordine di A^2 è un numero primo p.*

Poichè $M = \{a, b\}$ è un sistema di generatori di A, allora esiste certamente un naturale $q \neq 1$ tale che $qab \neq 0$ (Lemma 2); $M_0 = \{qa, b\}$ è dunque un sistema di generatori di A. Per opportuni interi α_i è allora

$$a = \alpha_1 qa + \alpha_2 b + \alpha_3 qab . \tag{1}$$

Moltiplicando ambo i membri della (1) per b, si ha $ab = \alpha_1 qab$, da cui

$$(\alpha_1 q - 1)\, ab = 0 . \tag{2}$$

(6) Nel senso che in esso è $xy = -yx$, $\forall x, y \in A$. Cfr. per es. [**2**].

(7) È cioè uno « *zero-square ring* » nel senso di [**9**].

Ora $\alpha q - 1$ è diverso da zero (perchè $q \neq 1$). Possiamo concludere che la caratteristica m di ab divide $\alpha q - 1$.

Sia ora $q_0 \neq 1$ un divisore primo di m. Se $q_0 \neq m$, è ancora $q_0 ab \neq 0$ e dunque valgono le (1), (2) con $q = q_0$. Ne segue, come sopra, che $\alpha_1 q_0 - 1$ deve essere multiplo di m e dunque di q_0, da cui $q_0 = 1$; perciò m deve essere primo. Poichè ab genera A^2 (Lemma 2), il lemma è dimostrato.

Concludiamo con il

Teorema 2. *Sia R un PZS-anello P2-generato, allora esiste in R un sistema di generatori $\{a, b\}$, un numero primo p, due numeri naturali r, s e due interi relativi k_1, k_2 tali che valga una delle seguenti condizioni:*

(1) $R^+ = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle ; p^r a = p^s b = 0, a^2 = b^2 = 0$ *ed* $ab = - ba = k_1 a + k_2 b$ *è un elemento di caratteristica p di R inoltre uno almeno dei naturali r o s è diverso da uno e* $k_1 \equiv k_2 \equiv 0 \pmod{p}$ *ma* $k_1 \neq 0$ *o* $k_2 \neq 0$;

(2) $R^+ = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle ab \rangle ;\ p^r a = p^s b = pab = 0,\ a^2 = b^2 = 0,$ $ab = - ba$ [8].

Viceversa gli anelli soddisfacenti alle condizioni 1 o 2 sono tutti PZS-anelli P2-generati.

Sia R un PZS-anello $P2$-generato ed $M = \{a, b\}$ un suo sistema di generatori. Allora R^+ è generato da $\{a, b, ab\}$ (Lemma 2) con $pab = 0$ (Lemma 3) e con $a^2 = b^2 = 0$ ed $ab = - ba$ (Lemma 1).

Si possono allora presentare due casi:

(1) Esistono interi h_1, h_2, h_3 tali che $h_1 a + h_2 b + h_3 ab = 0$ con $h_3 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Allora, detto $\bar{h}_3$ un intero (sicuramente esistente) tale che $\bar{h}_3 h_3 \equiv 1 \pmod{p}$, si ha: $ab = - \bar{h}_3 h_1 a - \bar{h}_3 h_2 b = k_1 a + k_2 b$, ove $k_1 \equiv k_2 \equiv 0 \pmod{p}$ per le osservazioni precedenti, ma non entrambi nulli.

Ne segue che $M = \{a, b\}$ genera anche il gruppo additivo R^+ di R che risulta di conseguenza somma diretta di due gruppi ciclici; possiamo ancora indicare con a, b i generatori di questi due gruppi. Se uno dei due elementi a, b (per es. a) ha ordine infinito od ordine finito non potenza di p, si può trovare un numero primo q (si ricordi anche che $pab = 0$) tale che qa non generi tutto $\langle a \rangle$. Consideriamo $\langle a, b \rangle / \langle qa, b \rangle$: poichè questo quoziente ha ordine q primo con p ed ab ha periodo p, allora deve essere $ab \in \langle qa, b \rangle$. Ne segue che l'anello generato da qa e b coincide col gruppo additivo generato da qa

---

([8]) Indicheremo qui e nel seguito con $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ il gruppo additivo generato dagli elementi $x_1, \ldots, x_n$ di R^+.

e b e quindi non coincide con R; pertanto deve essere uno zero-anello; ma $qab \neq 0$, onde esso non è un zero-anello. Ciò significa che a e b hanno periodo potenza di p. Se $pa = pb = 0$, allora $ab = 0$ contro il supposto. Siamo nel caso 1.

(2) Non esistono dipendenze lineari di cui in 1. Allora R^+ è somma diretta del gruppo additivo H generato da a e b e del gruppo additivo K generato da ab. Possiamo scegliere a, b in modo che H sia somma diretta di $\langle a \rangle$ e $\langle b \rangle$. In definitiva $R^+ = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle ab \rangle$ con $pab = 0$. Ragionando in modo molto simile al caso 1, si prova che a e b hanno periodo potenza di p. Siamo nel caso 2.

Viceversa sia R un anello soddisfacente alle condizioni 1 o 2 dell'ununciato. Allora $M = \{a, b\}$ è un sistema di generatori di R e dunque R è $P2$-generato perchè non esiste un sistema di generatori di R con un solo elemento. Inoltre l'elemento ab ha caratteristica p ed R non è uno zero-anello.

Dimostriamo che tutti i sottoanelli di R sono zero-anelli.

Supponiamo che R soddisfi alla condizione 2 dell'enunciato. Sia R' un sottoanello di R e siano $x = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 ab$, $y = \bar{\alpha}_1 a + \bar{\alpha}_2 b + \bar{\alpha}_3 ab$ due elementi di R'. Allora $xy = (\alpha_1 \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \alpha_2) ab \in R' \cap R^2$ e se $xy \neq 0$, $\alpha_1 \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \alpha_2$ non è multiplo di p ed $ab \in R'$ (perchè la caratteristica di ab è p). Ne segue che $\bar{x} = x - \alpha_3 ab$, $\bar{y} = y - \bar{\alpha}_3 ab$ appartengono ad R' e dunque lo stesso si può dire per $\alpha_1 \bar{y} - \bar{\alpha}_1 \bar{x} = (\alpha_1 \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \alpha_2) b$ ed $\bar{\alpha}_2 \bar{x} - \alpha_2 \bar{y} = (\alpha_1 \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \alpha_2) a$. Poichè a, b hanno caratteristica potenza di p, se ne deduce che gli elementi a, b appartengono ad R' ed $R' = R$. Se R soddisfa alla condizione 1 dell'enunciato si ragiona allo stesso modo. Questo basta a completare la dimostrazione.

3. - Classificazione dei PZS-anelli $P1$-generati tali che $A^4 = 0$.

4. – In questo capitolo e nel seguente A *indicherà un PZS-anello 1-generato ed a sarà un suo generatore.*

Cominciamo dal caso in cui $A^4 = 0$, reso interessante dal

Teorema 3. *Esiste un generatore di A una cui potenza genera un sottoanello proprio di A se e solo se $A^4 = 0$.*

Cominciamo a supporre che A possieda un generatore a una cui potenza generi un sottoanello proprio di A; sia a^{n+1} quella con esponente minore. Ovviamente $(a^{n+1})^2 = 0$.

Supponiamo, per assurdo, che sia $2 \leqslant n$ e osserviamo che in tale caso $a^{3n} = 0$, perchè $2n + 2 \leqslant 3n$. Ne segue che $\{a^n, a^{2n}\}$ genera A^+ perchè a^n genera A. Risulta allora

$$a = \alpha_1 a^n + \alpha_2 a^{2n} . \tag{3}$$

Moltiplicando la (3) per a^{2n} otteniamo $a^{2n+1} = \alpha_1 a^{3n} + \alpha_2 a^{4n}$ e perciò $a^{2n+1} = 0$; moltiplicando ancora la (3) per a^{n+1} troviamo ora $a^{n+2} = 0$. Risulta dunque addirittura $a^{2n} = 0$ perchè $n + 2 \leqslant 2n$. Elevando al quadrato ambo i membri della (3) e ricordando che $a^{2n} = 0$, si ottiene $a^2 = 0$, il che è assurdo perchè allora A sarebbe uno zero-anello.

Ne segue che $n = 1$ e che pertanto $a^4 = 0$, da cui $A^4 = 0$.

L'inverso è ovvio.

Osservazione 2. *Tutte le potenze proprie di elementi di A generano zero-anelli se e solo se $A^4 = 0$.*

Osserviamo anche che se $A^4 = 0$, allora $\{a, a^2, a^3\}$ genera A^+; questo fatto sarà spesso utilizzato senza esplicito richiamo.

5. – Cominciamo ora a studiare gli anelli cui è intitolato il capitolo.

Lemma 4. *Se $A^4 = 0$, la caratteristica* (9) *di A non è nulla.*

Sia qa $(q \neq 1)$ un generatore di A (10). Ovviamente $\{qa, q^2a^2, q^3a^3\}$ genera i gruppo additivo A^+ di A.

Potremo scrivere $a = \alpha_1 qa + \alpha_2 q^2 a^2 + \alpha_3 q^3 a^3$ e cioè

$$(\alpha_1 q - 1)\, a + \alpha_2 q^2 a^2 + \alpha_3 q^3 a^3 = 0 \,. \tag{4}$$

Moltiplicando ambo i membri della (4) per a^2 risulta $(\alpha_1 q - 1)\, a^3 = 0$.

Moltiplicando ora i membri della (4) per $(\alpha_1 q - 1) a$ e ricordando quanto sopra ottenuto si ha che $(\alpha_1 q - 1)^2 a^2 = 0$. Moltiplicando ancora per $(\alpha_1 q - 1)^2$ e tenendo presente le precedenti si ha che $(\alpha_1 q - 1)^3 a = 0$. Ne segue che a ha caratteristica non nulla e ciò dimostra l'enunciato.

Lemma 5. *Se $A^4 = 0$, allora A^2 ha caratteristica p o p^2 (p primo).*

Supponiamo $a^3 \neq 0$. Sia r la caratteristica (finita per il Lemma 4) di a^3. Sia $p \neq 1$ un divisore primo di r e sia B l'anello generato da pa. Se fosse $B = A$, allora $\{pa, p^2a^2, p^3a^3\}$ genererebbe A^+ e dunque potremmo scrivere $a = \alpha_1 pa + \alpha_2 p^2 a^2 + \alpha_3 p^3 a^3$. Moltiplicando per a^2 si ottiene $(\alpha_1 p - 1) a^3 = 0$ e perciò $\alpha_1 p - 1$ deve essere multiplo di r e dunque di p e questo è possibile solo se $p = 1$. Questo è assurdo, dunque $B \neq A$ e $p^2 a^2 = p^2 a^3 = 0$. Poichè il prodotto di due elementi qualunque di A è combinazione lineare a coefficienti in Z di a^2, a^3, si deduce subito l'enunciato.

(9) Per la caratteristica di un anello seguiamo ad esempio [**5**].

(10) Deve esistere, altrimenti per ogni intero $q \neq 1$, sarebbe $q^2 a^2 = 0$, onde $a^2 = 0$ ed A sarebbe uno zero-anello.

Il caso $a^3 = 0$ si tratta in modo del tutto analogo a partire dalla caratteristica di a^2.

Lemma 6. *Se $A^4 = 0$, la caratteristica di A è potenza di un numero primo p.*

Poichè (Lemma 5) $p^2a^2 = 0$, la caratteristica n di a (finita per il Lemma 4) è multiplo di p. Esista per assurdo un divisore primo p_1 di n diverso da p. Poniamo $n = n_1 p_1^r$ (con n_1 primo con p_1). Si nota che $p_1^{2r}a^2 \neq 0$ e dunque $p_1^r a$ genera A. Possiamo porre $a = \alpha_1 p_1^r a + \alpha_2 p_1^{2r} a^2 + \alpha_3 p_1^{3r} a^3$; moltiplicando per $p^2 n_1$ e ricordando che $p^2a^2 = p^2a^3 = 0$, otteniamo $n_1 p^2 a = 0$. Questo è assurdo perchè $n_1 p^2$ non è multiplo di p_1 e dunque neppure di n.

Lemma 7. *Se $A^4 = 0$ e $A^3 \neq 0$, l'ordine di A^3 è un numero primo p.*

Se la caratteristica di A^2 è p (primo), anche A^3 ha caratteristica p e l'enunciato è verificato.

Altrimenti (Lemma 5), A^2 ha caratteristica p^2 e dunque $p^2a^2 = 0$.

Supponiamo $pa^3 \neq 0$ e $p \neq 2$. Consideriamo l'elemento $x = pa + a^2$.

Si nota che $x^2 = 2pa^3 \neq 0$ per le posizioni fatte; pertanto x genera A e si avrebbe $A^3 = 0$, contro il supposto.

Deve pertanto essere $pa^3 = 0$ oppure $p = 2$. Nel primo caso la caratteristica di A^3 è p, nel secondo caso può essere 2 oppure 4 (Lemma 5).

Se $p = 2$ è $4a^2 = 4a^3 = 0$ e se, per assurdo, la caratteristica di A^3 fosse 4 sarebbe anche $2a^2 \neq 0 \neq 2a^3$.

Consideriamo gli elementi $x = 2a + a^2$, $y = 2a + 2a^2$: risulta $x^2 = y^2 = 0$ e $xy = yx = 2a^3$. Consideriamo l'anello A_0 generato da x, y. Poichè A_0 non è un zero-anello, $A_0 = A$ e $\{x, y, xy\}$ genera A^+. Scriviamo $a = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy$; ricordando le posizioni iniziali si ha $a = 2(\alpha_1 + \alpha_2)a + (\alpha_1 + 2\alpha_2)a^2 + 2\alpha_3 a^3$ e quadrando risulta $a^2 = 0$, il che è assurdo.

Teorema 4. *Sia R un anello 1-generato con $R^3 = 0$. L'anello R è un PZS-anello se e solo se la caratteristica di R è potenza di un numero primo p e la caratteristica di R^2 è p o p^2.*

La parte inversa del teorema è conseguenza immediata dei precedenti Lemmi 5 e 7.

Per la parte diretta, sia R un anello 1-generato, a un suo generatore e la caratteristica di R^2 sia p o p^2 (allora R non è uno zero-anello); ne segue, poichè $R^3 = 0$, che $\{a, a^2\}$ genera R^+.

Sia B un sottoanello proprio di R e sia $x = \alpha_1 a + \alpha_2 a^2$ un elemento di B. *Sia per assurdo* $x^2 \neq 0$. Poichè $x^2 = \alpha_1 a^2$ allora α_1^2 è primo con p. Ne segue che $a^2 \in B$; l'elemento $\alpha_1 a = x - \alpha\, a^2$ appartiene dunque a B e perciò anche a appartiene a B e $B = R$. Pertanto $x^2 = 0$ e dunque α_1^2 (ed α_1) è multiplo di p.

Analogamente se $y = \bar{\alpha}_1 a + \bar{\alpha}_2 a^2 \in B$, anche $\bar{\alpha}_1$ è multiplo di p. Dunque $xy = \alpha_1\bar{\alpha}_1 a^2 = 0$ perchè $\alpha_1\bar{\alpha}_1$ è multiplo di p^2 e per ipotesi $p^2a^2 = 0$; perciò B è uno zero-anello.

Teorema 5. *Sia R un anello 1-generato con $R^4 = 0$. L'anello R è un PZS-anello con $R^3 \neq 0$ se e solo se la caratteristica di R è potenza di un primo p, la caratteristica di R^2 è p o p^2 e l'ordine di R^3 è p.*

La parte inversa del teorema è conseguenza immediata dei precedenti Lemmi 5, 6, 7.

Supponiamo che R verifichi le ipotesi della parte diretta del teorema e che sia a un suo generatore. Ovviamente $\{a, a^2, a^3\}$ genera R^+, $\{a^2, a^3\}$ genera A^2 e a^3 genera R^3; ne segue che R non è un zero-anello. Sia B un sottoanello proprio di R e sia $x = \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3$ un elemento di B. *Sia per assurdo* $x^2 \neq 0$. Poichè $x^2 = \alpha_1^2 a^2 + 2\alpha_1\alpha_2 a^3$, allora α_1 è primo con p.

Poichè inoltre $x^3 = \alpha_1^3 a^3 \in B$, risulta $a^3 \in B$; $\alpha_1^2 a^2 = x^2 - 2\alpha_1\alpha_2 a^3 \in B$ e anche $a^2 \in B$. Infine $\alpha_1 a = x - \alpha_2 a^2 - \alpha_3 a^3 \in B$ e $a \in B$; dunque $B = R$. Pertanto $x^2 = 0 = x^3$ e perciò α_1 è multiplo di p. Analogamente se $y = \bar{\alpha}_1 a + \bar{\alpha}_2 a^2 + \bar{\alpha}_3 a^3 \in B$, anche $\bar{\alpha}_1$ è multiplo di p. Dunque $xy = \alpha_1\bar{\alpha}_1 a^2 + (\alpha_1\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1\alpha_2) a^3 = 0$ perchè $\alpha_1\bar{\alpha}_1$ è multiplo di p^2 e $\alpha_1\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1\alpha_2$ è multiplo di p; perciò B è un zero-anello.

4. - Sui PZS-anelli 1-generati non nilpotenti.

6. 2 Per il Teorema 3, rimane da studiare il caso dei PZS-anelli 1-generati, generati da ogni potenza di ogni generatore: sono ovviamente quelli non nilpotenti.

Teorema 6. *Se A non è nilpotente, allora A o il suo quoziente rispetto al radicale di Wedderburn W sono campi primi finiti.*

Se A è privo di ideali propri allora, essendo commutativo e non essendo uno zero-anello, è un campo; è anzi un campo primo finito perchè il suo gruppo moltiplicativo non ha sottogruppi propri e l'enunciato è verificato.

Se invece A possiede almeno un ideale proprio, il radicale di Wedderburn (cioè la somma degli ideali nilpotenti di A) W di A contiene tutti gli ideali propri di A. Inoltre W è un ideale proprio di A perchè se $W = A$, allora ogni generatore di A sarebbe elemento di W e A sarebbe nilpotente.

Inoltre W è l'unico ideale massimale di A, A/W è privo di ideali ed è un campo perchè $A^2 = A$. Anzi A/W è un campo primo finito perchè se B/W fosse un sottoanello di A/W sarebbe uno zero-anello e questo è assurdo.

Teorema 7. *Sia R un anello 1-generato non nilpotente. Allora R è un PZS-anello se e solo se possiede un ideale $J \neq R$ tale che $J^2 = 0$ e R/J sia un campo di ordine p (p primo).*

La parte inversa segue dal Teorema 6 per $J = W$ o $J = 0$.

Per la parte diretta, sia R un anello che possieda un ideale $J \neq R$, tale che $J^2 = 0$ e che R/J sia un campo di ordine p. Chiaramente R non è uno zero-anello, altrimenti lo sarebbe R/J. Inoltre i sottoanelli propri di R sono contenuti in J (perchè R/J non ha sottoanelli propri) e dunque sono zero-anelli.

Corollario 1. *Se A è non nilpotente ha caratteristica p o p^2.*

Sia W il radicale di Wedderburn di A ed a generi A, allora A/W ha ordine primo p e $p(a + W) = W$. Ne segue $pa \in W$ e $p^2 a^2 = 0$. Poichè però a^2 genera A, la caratteristica di A divide p^2.

Bibliografia.

[1] R. Baer, *Complementation in finite groups*, in «Gruppi, anelli di Lie e teoria della Coomologia», Ist. Mat. Univ. Roma 1959.

[2] C. Cotti Ferrero e G. B. Rizza, *Anelli anticommutativi*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **104** (1972-73), 639-652.

[3] C. Ferrero Cotti e S. Manara Pellegrini, *Su anelli critici e cocritici*, Matematiche (Catania) **31** (1976), 147-155.

[4] M. Gray, *A radical approach to algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1970.

[5] R. L. Kruse and D. T. Price, *Nilpotent rings*, Gordon and Breach Sci. Publ., N. Y. 1969.

[6] F. P. Monasor, *Grupos finitos separados respecto de una formacion de Fitting*, Seminario matematico Garcia de Geldeano, Libreria General, Zaragoza 1974.

[7] H. Neumann, *Varieties of groups*, Springer Verlag, Berlin 1967.

[8] M. Petrich, *Structures des demi-groups et anneaux distributifs*, Acad. Sc. Paris **268** A (1969), 849-852.

[9] R. P. Stanley, *Zero-square rings*, Pacific J. Math. **30** (1969), 811-824.

Summary.

We get a classification of the non zero-rings whose subrings are all zero-rings.

* * *