Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 169-175

FILIPPO CAMMAROTO (*)

Sull' eccellenza dell' anello delle serie ristrette sopra un anello locale completo di caratteristica diseguale. (**)

Introduzione.

In [7]$_2$ si dimostra che, se (A, m) è un anello locale completo equicaratteristico, allora l'anello delle serie ristrette in n variabili $(A, m)\{X_1, \ldots, X_n\}$ è eccellente.

In [5] tale risultato è esteso ad anelli locali completi di caratteristica diseguale, con corpo residuo K infinito ma finito sulla sua potenza p-esima, dove $p = \text{car.}\ (K)$.

In questo scritto miglioriamo il risultato di [5] togliendo ogni ipotesi sul corpo residuo K; estendiamo così il risultato di [7]$_2$ ad anelli locali completi di caratteristica diseguale qualsiasi.

La condizione che il corpo residuo sia infinito permette di basare la dimostrazione sulle condizioni jacobiane introdotte e studiate in [4], che non sono direttamente utilizzabili per corpi residui finiti. In quest'ultimo caso funziona però sostanzialmente il metodo usato in [4], che consiste nell'applicare le condizioni jacobiane dopo aver aggiunto un'indeterminata U, così da avere corpo residuo $K(U)$ infinito.

Oltre a metodi jacobiani, del tipo usato in [4] e in [5], facciamo anche uso in modo cruciale di un risultato di [7]$_3$ che permette di ricondurre l'eccellenza alla sola chiusura del luogo singolare.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Via C. Battisti, 98100 Messina, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A.(C.N.R.). — Ricevuto: 21-I-1977.

Ringraziamo il prof. P. Valabrega per gli utili consigli datici per la stesura del presente lavoro.

1. – Ricordiamo alcune definizioni, proposizioni e notazioni che useremo nel prosieguo del lavoro.

1) Tutti gli anelli sono commutativi, unitari e noetheriani.

2) Sia A un anello, $\mathfrak{p}$ un suo ideale finitamente generato, $\mathfrak{p} = \sum_{i=1}^{n} a_i A$ ed $A^\wedge$ il completamento di A per la topologia $\mathfrak{p}$-adica. Allora

$$A^\wedge \simeq A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]/(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)\,,$$

ove $(X_1, \ldots, X_n) = (\boldsymbol{X})$ è un sistema di indeterminate su A (si veda [**2**], 23. L, cor. 5).

3) Per quanto riguarda i risultati sulle serie ristrette si veda [**6**]. Qui riportiamo solo la seguente definizione:

« Sia A un anello, $\mathfrak{m}$ un suo ideale ed $(\boldsymbol{X}) = (X_1, \ldots, X_n)$ un sistema di indeterminate su A; allora $(A, \mathfrak{m})\{\boldsymbol{X}\}$ = anello delle serie ristrette su A, dotato di topologia $\mathfrak{m}$-adica, è l'insieme delle $f = \sum a_{\nu_1 \ldots \nu_n} \cdot X_1^{\nu_1} \ldots X_n^{\nu_n}$ di $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ tali che per ogni $s > 0$, tutti i coefficienti $a_{\nu_1 \ldots \nu_n}$, appartengono ad $\mathfrak{m}^s$, eccetto al più un numero finito ».

Osserviamo inoltre che $(A, \mathfrak{m})\{\boldsymbol{X}\}$ è il completamento di $A[\boldsymbol{X}]$ rispetto ad una opportuna topologia adica ([**6**], cor. 1 alla prop. 1).

4) Diciamo che un anello A è eccellente se:

E_1) A è noetheriano; E_2) A è $J-2$, cioè per ogni $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(A)$ e per ogni estensione radicale finita K' di $K(P)$ = campo delle frazioni di $A/\mathfrak{P}$, esiste una A-algebra finita B tale che $A/\mathfrak{P} \subseteq B \subseteq K'$, avente K' come corpo delle frazioni e tale che $\operatorname{Reg}(\operatorname{Spec}(B))$ contenga un insieme aperto non vuoto di $\operatorname{Spec}(B)$; E_3) A è un G-anello, cioè per ogni $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max}(A)$ le fibre formali di $A_\mathfrak{n}$ sono geometricamente regolari ([**2**]$_1$, cap. XIII, teor. 7.5); E_4) A è universalmente catenario ([2]$_1$, 14.B).

Ricordiamo inoltre che ogni anello locale completo e separato è universalmente catenario ([**2**]$_1$, 28. P cor. 1).

Lemma 1. *Sia A un anello e sia $\tilde{A}$ una sua estensione finita, sia $(\boldsymbol{T}) = (T_1, \ldots, T_m)$ un sistema di indeterminate su $\tilde{A}$; allora $\tilde{A}[\![\boldsymbol{T}]\!]$ (risp. $\tilde{A}[\boldsymbol{T}]$) è un modulo finito su $A[\![\boldsymbol{T}]\!]$ (risp. $A[\boldsymbol{T}]$).*

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione per le serie di potenze; per i polinomi è analoga (v. [7]$_1$, lemma 1).

Usiamo l'induzione su m e sia $\tilde{D}_m = \tilde{A}[\![\boldsymbol{T}]\!]$ e $D_m = A[\![\boldsymbol{T}]\!]$, supponiamo che $\tilde{D}_{m-1}$ sia finito su D_{m-1} vogliamo provare che $\tilde{D}_m$ è finito su D_m. Osservando che $\tilde{D}_m = \tilde{D}_{m-1}[\![T_m]\!]$ e $D_m = D_{m-1}[\![T_m]\!]$ ci possiamo ricondurre al caso $m = 1$ e quindi basta provare che se $\tilde{A}$ è un modulo finito su A, allora $\tilde{A}[\![T]\!]$ è un modulo finito su $A[\![T]\!]$.

Supponiamo che $\tilde{A}$ sia generato su A da $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ e sia

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i T^i \in \tilde{A}[\![T]\!] , \qquad a_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij}\alpha_j ,$$

con $b_{ij} \in A$; allora si ha

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{r} b_{ij}\, \alpha_j \Big) T^i \\ &= \sum_{j=1}^{r} b_{0j}\alpha_j + \Big(\sum_{j=1}^{r} b_{1j}\alpha_j\Big) T + \ldots + \Big(\sum_{j=1}^{r} b_{nj}\alpha_j\Big) T^n + \ldots \\ &= \alpha_1\Big(\sum_{i=0}^{\infty} b_{i1}T^i\Big) + \alpha_2\Big(\sum_{i=0}^{\infty} b_{i2}T^i\Big) + \ldots + \alpha_r\Big(\sum_{i=0}^{\infty} b_{ir}T^i\Big) , \end{aligned}$$

cioè $f \in \alpha_1 A[\![T]\!] + \alpha_2 A[\![T]\!] + \ldots + \alpha_r A[\![T]\!]$. Si ha quindi l'asserto.

Teorema 1. *Sia $(A, \mathfrak{m}, K)$ un anello locale completo non contenente corpi, allora $B = (A, \mathfrak{m})\{X_1, \ldots, X_n\}$ è eccellente per ogni $n \geq 1$.*

Dimostrazione. I) A non contiene corpi. Sia allora C un anello dei coefficienti per A, cioè un DVR con parametro il numero primo $p > 0$, dove $p = \text{car.}\,(A/\mathfrak{m})$ (v. [3], cap. V, teor. 31.1). Allora $A \cong C[\![T_1, \ldots, T_m]\!]/\mathfrak{p}$, dove $\mathfrak{p}$ = opportuno ideale di $C[\![T_1, \ldots, T_m]\!]$ (v. [2]$_1$, 28. P cor. 2) e quindi

$$A\{X_1, \ldots, X_n\} = C[\![\boldsymbol{T}]\!]\{\boldsymbol{X}\}/\mathfrak{p}' ,$$

dove $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}\{\boldsymbol{X}\}$ = ideale delle serie ristrette a coefficienti in $\mathfrak{p}$ (v. [6], teor. 2). Basta dunque supporre $A = C[\![\boldsymbol{T}]\!]$ e provare l'eccellenza di $D = C[\![\boldsymbol{T}]\!]\{\boldsymbol{X}\}$.

II) Siccome $D = C[\![\boldsymbol{T}]\!]\{\boldsymbol{X}\} = \big(C[\![\boldsymbol{T}]\!][\boldsymbol{X}], (p, \boldsymbol{T})\big)^{\wedge}$ (v. [6], cor. alla prop. 1) risulta

$$D/(p, \boldsymbol{T})D = K[\boldsymbol{X}] = \text{anello eccellente};$$

basta quindi provare che D è $J-2$ ([7]$_3$, teor. 4).

III) Sia $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(D)$; si possono presentare i seguenti casi:

1) $\mathfrak{P} \cap C \neq (0)$ e quindi $p \in \mathfrak{P}$;

2) $\mathfrak{P} \cap C = (0)$ e quindi $p \notin \mathfrak{P}$.

Nel caso 1), $D/\mathfrak{P}$ è eccellente, perchè $D/\mathfrak{P}$ è immagine omomorfa di $C/pC[\![\boldsymbol{T}]\!]\{\boldsymbol{X}\}$ ([7]$_2$, lemma 6; C/pC è un corpo), quindi $D/\mathfrak{P}$ è $J-2$. Nel caso 2), poichè $p \notin \mathfrak{P}$, risulta car. $(D/\mathfrak{P}) = 0$.

Scegliamo $\mathfrak{M} \in \operatorname{Max}(D)$ tale che $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{M}$. Ovviamente $p \in \mathfrak{M}$ (v. [**6**] proprietà α del teor. 4). Osserviamo inoltre che ([6], § 3, lemma 2):

$$D/(p, \boldsymbol{T})D = C[\![\boldsymbol{T}]\!]\{\boldsymbol{X}\}/(p, \boldsymbol{T})\, C[\![\boldsymbol{T}]\!]\{\boldsymbol{X}\}$$

$$= (C[\![\boldsymbol{T}]\!]/(p, \boldsymbol{T})C[\![\boldsymbol{T}]\!])[\boldsymbol{X}] = K[\boldsymbol{X}],$$

ed $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/(p, \boldsymbol{T})D$ è massimale in $K[\boldsymbol{X}]$.

Per la prop. 3 di [7]$_3$, esistono un campo $\tilde{K}$ estensione finita di K, ed un ideale massimale $\tilde{\tilde{\mathfrak{M}}}$ di $\tilde{K}[\boldsymbol{X}]$ tali che

$$\text{i)} \quad \overline{\mathfrak{M}}\tilde{K}[\boldsymbol{X}] \subseteq \tilde{\tilde{\mathfrak{M}}}, \qquad \text{ii)} \quad \tilde{\tilde{\mathfrak{M}}} = (X_1 - \tilde{\tilde{a}}_1, \ldots, X_n - \tilde{\tilde{a}}_n)\tilde{K}[\boldsymbol{X}],$$

ove gli $\tilde{\tilde{a}}_i$ sono opportuni elementi di $\tilde{K}$.

Usando la prop. 1 di [7]$_3$, possiamo rimontare $\tilde{K}$ ad un dominio di Dedekind eccellente $\tilde{C}$, finito su C, tale che $\tilde{K} = \tilde{C}/\tilde{p}$, dove $\tilde{p} \cap C = pC$. Naturalmente $\tilde{C}$ è ancora un DVR completo e si può assumere che abbia parametro p (v. [**7**]$_3$, dim. della prop. 1).

Per il Lemma 1 possiamo poi affermare che $\tilde{C}[\![\boldsymbol{T}]\!]$ è finito sopra $C[\![\boldsymbol{T}]\!]$.

Si ha inoltre: $\tilde{K} = \tilde{C}[\![\boldsymbol{T}]\!]/(p, \boldsymbol{T})\tilde{C}[\![\boldsymbol{T}]\!]$ e quindi $\tilde{\tilde{\mathfrak{M}}} \subset \tilde{K}[\boldsymbol{X}]$ si può sollevare ideale $\tilde{\mathfrak{M}}$ di $\tilde{C}[\![\boldsymbol{T}]\!]\{\boldsymbol{X}\}$,

$$\tilde{\mathfrak{M}} = (p, T_1, \ldots, T_m, X_1 - \tilde{a}_1, \ldots, X_n - \tilde{a}_n)\tilde{C}[\![\boldsymbol{T}]\!]\{\boldsymbol{X}\} \qquad \text{con } \tilde{a}_i \in \tilde{C}[\![\boldsymbol{T}]\!].$$

$\tilde{D} = \tilde{C}[\![\boldsymbol{T}]\!]\{\boldsymbol{X}\}$ risulta un D-modulo finito (v. [7]$_1$, lemma 7); inoltre ([5], prop. 1) si ha

$$\tilde{\mathfrak{M}} = (p, T_1, \ldots, T_m, X_1 - \tilde{a}_1, \ldots, X_n - \tilde{a}_n)\tilde{D}$$

e ovviamente

$$\mathfrak{M}\tilde{D} \subseteq \tilde{\mathfrak{M}}, \qquad \mathfrak{P}\tilde{D} \subseteq \mathfrak{M}D \subseteq \tilde{\mathfrak{M}}.$$

Sia ora $\tilde{\mathfrak{Q}} \in \operatorname{Spec}(\tilde{D})$ tale che

1') $\mathfrak{P}\tilde{D} \subseteq \tilde{\mathfrak{Q}} \subseteq \tilde{\mathfrak{M}}$, 2') $\tilde{\mathfrak{Q}}$ sia minimale su $\mathfrak{P}$.

Allora risulta:

i') $\tilde{\mathfrak{Q}} \cap D = \mathfrak{P}$ (teorema del «going down», $[\mathbf{2}]_1$, 5. A),

ii') $\tilde{\mathfrak{Q}} \cap C = (0)$ poichè $p \in D$.

Osserviamo che, poichè $D/\mathfrak{P} \to \tilde{D}/\tilde{\mathfrak{Q}}$ è una inclusione finita la proprietà $J-0$ discende ([**1**], cor. 2.2); quindi possiamo supporre che già si abbia

$$\mathfrak{M} = (p, T_1, \ldots, T_m, X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) D,$$

con gli $a_i \in C[\![\boldsymbol{T}]\!]$, $D = \tilde{D}$ e $C = \tilde{C}$ (v. $[\mathbf{7}]_3$, cor. 2.1).

Per completare la dimostrazione basta provare che $\operatorname{Reg}(D/\mathfrak{P})$ contiene un insieme aperto non vuoto.

A tal fine distinguiamo due casi:

a) $K = C/pC$ sia infinito; b) $K = C/pC$ sia finito.

Caso a).

Osserviamo i seguenti fatti:

1) $D_{\mathfrak{M}}$ è un anello locale regolare di caratt. zero e $\dim = 1 + n + m$;

2) $(D_{\mathfrak{M}}) = C[\![T_1, \ldots, T_m, X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n]\!]$;

3) $\partial/\partial T_i$ e $\partial/\partial(X_i - a_i) = \partial/\partial X_i$ applicano $D_{\mathfrak{M}}$ in sè per ogni i.

Quindi $D_{\mathfrak{M}}$ è un anello di tipo analitico su C nel senso della definizione 1.1 di [**4**]. Per il teorema 1.7 di [**4**] possiamo scegliere tra le derivate parziali, r derivazioni $D_1, \ldots, D_r$ e $g_1, \ldots, g_r$ elementi di $\mathfrak{P}$ tali che

$$r = ht(\mathfrak{P}), \qquad d = \det.(D_i(g_j)) \notin \mathfrak{P}.$$

Poichè $D_d/\mathfrak{P}D_d$ è un anello regolare ($[\mathbf{2}]_2$, lemma 2.1), $\operatorname{Reg}(D/\mathfrak{P})$ contiene un insieme aperto non vuoto.

Caso b).

Essendo $\mathfrak{M} \cap C[\![\boldsymbol{T}]\!] = (p, \boldsymbol{T})C[\![\boldsymbol{T}]\!] \neq (0)$ ([**6**], teor. 4), consideriamo una indeterminata U su D e sia

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{M}D[U] \in \operatorname{Spec}(D[U]) .$$

Possiamo allora considerare l'anello locale regolare

$$V = D[U]_{\mathfrak{Q}} = (C[\![\boldsymbol{T}]\!]\{\boldsymbol{X}\}[U])_{\mathfrak{Q}}$$

di anello dei coefficienti $I = C[U]_{\mathfrak{Q}\cap C[U]}$; infatti il campo residuo K_V di V dato da

$$K_V = V/\mathfrak{Q}V = (C[\![\boldsymbol{T}]\!]\{\boldsymbol{X}\}[U])_{\mathfrak{Q}}/\mathfrak{Q}(C[\![\boldsymbol{T}]\!]\{\boldsymbol{X}\}[U])_{\mathfrak{Q}} = C/pC(U) = K(U)$$

coincide con il campo residuo K_I di I dato da

$$K_I = I/(\mathfrak{Q} \cap C[U])\, I = C[U]_{\mathfrak{Q}\cap C[U]}/(\mathfrak{Q} \cap C[U])\, C[U]_{\mathfrak{Q}\cap C[U]} = (C/pC)(U) = K(U) ,$$

in quanto si ha: $\mathfrak{Q} \cap C[U] = pC[U]$.

Infatti, se $f = a_0 + a_1 U + \ldots + a_n U^n$ è un elemento di $\mathfrak{Q} \cap C[U]$, cioè di $\mathfrak{M}D[U] \cap C[U]$, risulta $f \in (p, (\boldsymbol{T}), (X_i - a_i))\, C[\![\boldsymbol{T}]\!]\{\boldsymbol{X}\}[U]$ e quindi $a_i \in pC$ per ogni $i = 0, \ldots, n$.

Ovviamente il campo $K_V = K_I = K(U)$ è infinito.

Si ha allora:

j) $\hat{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}V \in \operatorname{Spec}(V)$, jj) $\hat{\mathfrak{P}} \cap I = (0)$.

Inoltre:

1) V è un anello locale regolare di caratt. zero e $\dim = 1 + n + m$;

2) è valido il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & V = D[U]_{\mathfrak{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ I^\wedge & \longrightarrow & V^\wedge = I^\wedge[\![\boldsymbol{T}, \boldsymbol{X}]\!] \end{array}$$

ove $V^\wedge = I^\wedge[\![T_1, \ldots, T_m, X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n]\!]$;

3) $\partial/\partial T_i$ e $\partial/\partial(X_i - a_i) = \partial/\partial X_i$ per ogni i applicano V in sè.

Risulta quindi che V è un anello di tipo analitico su I nel senso della definizione 1.1 di [4].

Per il teorema 1.7 di [4] possiamo scegliere tra le derivate parziali rispetto alle T_i e alle $X_i - a_i$, r derivazioni $D_1, \ldots, D_r$ e $f_1, \ldots, f_r \in \hat{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}V$ tali che (v. [3], teor. 10.14):

$$r = ht(\hat{\mathfrak{P}}) = ht(\mathfrak{P}) \qquad d = \det.\, (D_i(f_j)) \notin \hat{\mathfrak{P}}.$$

Ma $\hat{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}V$ e quindi possiamo supporre $f_i \in \mathfrak{P}$ per ogni $i = 1, \ldots, r$. Inoltre le derivazioni $D_i \in \mathrm{Der}_I(V)$, per ogni $i = 1, \ldots, r$, applicano l'anello D in sè, cioè $D_i(D) \subseteq D$ per ogni $i = 1, \ldots, r$ (v. 3 del caso a). Poichè d è un determinante a elementi in D, risulta $D_d/\mathfrak{P}D_d$-anello regolare ([2]$_2$, lemma 2.1) e quindi Reg $(D/\mathfrak{P})$ contiene un insieme aperto non vuoto.

Osservazione. Nel caso che l'anello locale completo contenga un corpo, il teorema è stato provato in [7]$_2$, prop. 7. Quindi le serie ristrette sopra un anello locale completo sono sempre eccellenti.

Bibliografia.

[1] S. Greco, *Two theorems on excellent rings*, Nagoya Math. J. **60** (1976), 139-149.

[2] H. Matsumura: [•]$_1$ *Commutative algebra*, Benjamin, New York 1970; [•]$_2$ *Formal power series rings over polynomials rings* (I), Number Theory Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honour of Y. Akizuki, Knokuniya, Tokyo 1973.

[3] M. Nagata, *Local ring*, Interscience, New York 1962.

[4] H. Nomura, *Formal power series rings over polynomial rings* (II), Number Theory Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honour of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo 1973.

[5] G. Restuccia, *Criteri jacobiani di regolarità ed eccellenza per anelli di serie ristrette*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII **21** (1976).

[6] P. Salmon, *Sur les séries formelles restreintes*, Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 385-410.

[7] P. Valabrega: [•]$_1$ *On the excellent property for rings of restricted power series*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **9** (1974), 486-494; [•]$_2$ *On the excellent property for power series rings over polynomial rings*, J. Math. Kyoto Univ. (2) **15** (1975); [•]$_3$ *A few theorems on completion of excellent rings*, Nagoya Math. J. **61** (1976), 127-133.

Summary.

In this paper, using a jacobian method we prove that the restricted power series over an arbitrary complete local ring with inequal characteristic are excellent, extending the result already known for residue field finite over the p-the power (see [5], cor. 1) *and for equal characteristic* (see [7]$_2$, prop. 7).

* * *