Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3 (1977), 151-157

GIOVANNI FERRERO (*)

Deformazioni, raffinamenti e composizioni di funzioni di Steiner (II). (**)

Proseguendo $[4]_3$ individuiamo le funzioni di Steiner più fini di una data funzione di Steiner α e indichiamo due tecniche per costruire funzioni di Steiner sulla somma diretta di due gruppi ciascuno dei quali ammetta funzioni di Steiner. Confrontando i metodi otteniamo risultati già abbastanza significativi sul numero di funzioni di Steiner che certi gruppi possono ammettere. Per le motivazioni e la nomenclatura facciamo direttamente riferimento a $[4]_3$.

1. - Raffinamenti.

1. – Vogliamo individuare tutte le funzioni di Steiner più fini di una data α; diremo che esse sono costruite per *raffinamento* di α. La trattazione — in quanto parallela a quella del secondo paragrafo di $[4]_3$ — permetterà di lasciare al lettore qualche verifica.

Lemma 1. *Sia α una funzione di Steiner definita sul gruppo G. Sia T una traiettoria di Σ_α. Si consideri la funzione α' che opera come la α su $G\setminus T$ e come* i *(inversione) su T. La α' è una funzione di Steiner (che risulta più fine della α) se e solo se T è raffinabile, fine o banale* (1).

La dimostrazione — parallela a quella del Lemma 3 di $[4]_3$ — è una verifica diretta condotta per casi.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) — Ricevuto: 10-I-1977.

(1) Se T è raffinabile, α' è propriamente più fine della α.

Lemma 2. *Sia G un gruppo, siano α, α' due funzioni di Steiner definite su G. Supponiamo che α' sia più fine di α e che T sia una traiettoria di α senza essere una traiettoria di α'. Allora α' opera su T come* i, *e T è raffinabile.*

Se T non è una traiettoria di α, deve essere unione di traiettorie di α (def. III di $[4]_3$): queste non hanno sei elementi e non sono banali; sono pertanto fini (cor. 3 di $[4]_1$). Ma ogni funzione di Steiner opera come la i sugli elementi delle sue traiettorie fini e gli elementi di queste hanno tutti caratteristica 3 (teor. 2 di $[4]_1$).

Teorema 3. *Siano G un gruppo additivo ed α una funzione di Steiner definita su G. Supponiamo che α ammetta (esattamente) h traiettorie abeliane non fini e non banali, di cui k raffinabili ed h' traiettorie raffinabili non abeliane. Allora G possiede (esattamente) $2^{(h+h'-k)}3^k$ funzioni di Steiner α' più fini della α* (²).

Sia T una traiettoria di α, e sia α' più fine di α. È chiaro (Lemmi 3, 4 di $[4]_3$ e Lemmi 1, 2) che se T è abeliana e raffinabile α' può agire su T come α, come i o come $i \bigcirc \alpha \bigcirc i$. Se T è abeliana (non fine e non banale) e non raffinabile, α' può agire su T come α o come $i \bigcirc \alpha \bigcirc i$, mentre se T è raffinabile non abeliana, α' può agire come α o come i. Negli altri casi α' agisce come α. La dimstrazione può ora essere condotta come quella del Teorema 6 di $[4]_3$ tenendo presente quanto sopra osservato.

Osservazione 4. *Siano α, α' due funzioni di Steiner definite sul gruppo G, ed α' sia più fine della α. Sia A l'insieme degli elementi di G su cui α' opera come la $i \bigcirc \alpha \bigcirc i$; sia B quelle degli elementi su cui α' opera come* i. *Allora i moltiplicatori comuni ad α, α' sono i moltiplicatore di α che tengono fermi A, B.*

Notiamo anzitutto che $A \cup B = D \cup I$, ove D è l'insieme degli elementi su cui α, α' operano in modo diverso, I quello su cui α, α' operano entrambe come I. Ovviamente $I = A \cap B$.

Sia φ un moltiplicatore comune ad α, α'. Si vede rapidamente che $\varphi(D) = D$ (³) e $\varphi(I) = I$.

Sia del resto $x \in A$, $\varphi(x) \in B$. Allora dalla $\varphi(\alpha'(x)) = \alpha'(\varphi(x))$ si ha che $-\varphi(\alpha(-x)) = -\varphi(x)$ da cui $\alpha(-x) = x$. Ma, poichè α è di Steiner, $\alpha(-x) = \alpha(x) - x$ e dunque ora $\alpha(x) = 2x = -x$, perchè x ha caratteristica tre, come $\varphi(x)$, che appartiene a B. Si conclude che $x \in I$. In modo analogo si vede che se $x \in B$, $\varphi(x) \in A$, ancora $x \in I$. Se ne conclude che $\varphi(A) = A$ e $\varphi(B) = B$, il che dimostra una parte dell'enunciato.

Se viceversa φ è un moltiplicatore di α tale che $\varphi(A) = A$, $\varphi(B) = B$, una

---

(²) Naturalmente, ricordando il teorema 6 di $[4]_3$, si ha che le funzioni di Steiner propriamente più fini della α sono $2^h(2^{h'-k}3^k-1)$.

(³) Se $x \in D$ è infatti $\alpha(\varphi(x)) = \varphi(\alpha(x)) \neq \varphi(\alpha'(x)) = \alpha'(\varphi(x))$, e allora $\varphi(x) \in D$.

rapida verifica per casi permette di vedere che φ è un moltiplicatore di α'.

Si noti che nelle condizioni prospettate possono benissimo esserci moltiplicatori di α' che tengono fermi A, B *senza essere moltiplicatori di* α: ad esempio se tutte le traiettorie di α' sono fini, ogni automorfismo φ di G è un moltiplicatore di α'; se G è abeliano l'automorfismo i tiene ovviamente fermi A, B ma è un moltiplicatoie di α solo se $\alpha = \alpha'$.

Corollario 5. *Sia α una funzione di Steiner definita sul gruppo G. La funzione α' operi come la* i *su tutte le traiettorie raffinabili di α, e operi come la α altrove. Allora α, α' hanno gli stessi moltiplicatori.*

Sia φ un moltiplicatore di α. Allora (con le notazioni del precedente teorema) $A = I$ è l'unione delle traiettorie fini o banali di α, e come tale è tenuto fermo da φ. D'altra parte B è l'unione delle traiettorie banale, fini e raffinabili di α, ed ancora è tenuto fermo da φ. Il nostro corollario è ora conseguenza immediata di detto Teorema 4.

Per concludere ci pare necessario fornire un *esempio di traiettoria raffinabile non abeliana*. Sia G un gruppo di esponente tre: in esso l'inversione i è funzione di Steiner (osservazione 8 di [**5**]). Siano x, y due elementi di G non permutabili tra loro, e siano X, Y, Z le traiettorie di i rappresentate rispettivamente da x, y, $y - x$. L'osservazione 1 di $[\mathbf{4}]_4$ — intesa a costruire funzioni di Steiner *meno fini* di una data — permette di costruire su G una funzione di Steiner una cui traiettoria è appunto $T = X \cup Y \cup Z$: si tratta appunto di una traiettoria raffinabile non abeliana.

2. – *Una notevole configurazione tattica con 3^n punti* può essere ricavata dalle considerazioni precedenti. Sia G un gruppo ed α_1 una funzione di Steiner su G. Supponiamo che tutte le traiettorie non fini di G siano abeliane e raffinabili (4). Allora anche $\alpha_2 = i \bigcirc \alpha \bigcirc i$ ed $\alpha_3 = i$ sono funzioni di Steiner. Si ottiene dunque, per ogni α_i $(i = 1, 2, 3)$ un sistema di Steiner S_i. Se, ragionando come nel corollario 5 di $[\mathbf{4}]_4$ (5), si considera l'unione disgiunta degli insiemi delle rette degli S_i *si ottiene un disegno con $k = \lambda - 3$* in cui però compaiono blocchi incidenti agli stessi punti (6).

Se invece consideriamo l'unione degli insiemi delle rette degli S_i otteniamo una configurazione che è ovviamente ancora tattica (perchè ammette come automorfismi gli elementi del cayleiano destro di G).

---

(4) Allora G ha esponente 3. Esempi si ricavano dal teorema 7 di [**3**] e dal teorema 3 di $[\mathbf{4}]_4$.

(5) Segnaliamo che ivi, per errore di stampa, è scritto « 3 » in luogo di « 3^n ».

(6) Si ha così un risultato analogo al teorema di Bhattacharya (cfr. [**2**], cor. 2).

La terna $\{a, b, c\}$ è una retta per due distinti S_i, $S_{i'}$ se e solo se $\alpha_i(b-a) = \alpha_{i'}(b-a)$. Ma tale condizione è soddisfatta appunto quanto $b-a$ appartiene ad una traiettoria fine di α_i, e allora è addirittura $\alpha_1(b-a) = \alpha_2(b-a) = \alpha_3(b-a) = a-b$. Le terne in questione sono dunque le trasformate dei sottogruppi $\{0, x, -x\}$ mediante gli elementi del cayleiano destro di G. Ne segue subito che *per due punti di G passa un blocco se questi appartengono ad uno stesso laterale di uno dei detti sottogruppi di G, tre blocchi altrimenti.*

2. - Composizioni.

3. – Indichiamo qualche tecnica per costruire funzioni di Steiner sulla somma diretta di due gruppi su ciascuno dei quali siano date funzioni di Steiner. Tali tecniche possono essere dette di *composizione*, per analogia colla nota composizione diretta richiamata nel teorema 7 di $[4]_2$.

Osservazione 6. *Sia $G = G_1 \oplus G_2$ la somma diretta dei gruppi additivi G_1, G_2. Sia α una funzione di G in G, e scriviamo $\alpha(a, b) = (A(a, b)), B(a, b))$. Allora la funzione α è di Steiner se e solo se $\forall\, a \in G_1\ b \in G_2$ valgono le*

$$A(0, 0) = B(0, 0) = (0, 0)\,,$$

$$A(A(a, b), B(a, b)) = a\,, \qquad B(A(a, b), B(a, b)) = b\,,$$

$$A(-a, -b) = A(a, b) - a\,, \qquad B(-a, -b) = B(a, b) - b\,.$$

Per la dimostrazione basta notare che le formule della prima riga equivalgono, per le posizioni fatte, alla $\alpha(0, 0) = (0, 0)$, quelle della seconda alla involutorietà della α e quelle della terza alla $\alpha(-x) = \alpha(x) - x$ per $x \in G$.

Le formule della Osservazione 6 possono essere interpretate come un sistema di equazioni funzionali in A, B: ad ogni classe di soluzioni di tale sistema corrisponderà una classe di funzioni di Steiner su G. Si vede subito che non esistono soluzioni non banali in cui $A(a, b) = \alpha(b)$.

Per cercare soluzioni in cui $B(a, b) = \alpha_2(b)$ dipenda solo da b conviene porre $A(a, b) = \alpha_b(a)$. Il sistema diventa allora

$$\alpha_0(0) = 0 = \alpha_2(0),$$

$$\alpha_{\alpha_2(b)}(\alpha_b(a)) = a\,, \qquad \text{cioè} \qquad \alpha_{\alpha_2(b)} = \alpha_b^{-1}\,, \quad \alpha_2 = \alpha_2^{-1},$$

$$\alpha_{-b}(-a) = \alpha_b(a) - a\,, \qquad \alpha_2(-b) = \alpha_2(b) - b\,.$$

In tali condizioni α_2 ed α_0 devono essere funzioni di Steiner. Se è così il sistema si riduce alle

$$\alpha_{\alpha_2(b)} = \alpha_b^{-1}\,, \qquad \alpha_{-b}(-a) = \alpha_b(a) - a\,.$$

Se chiediamo ancora che tutte le α_b siano funzioni di Steiner abbiamo che il sistema risulta soddisfatto se e solo se si ha ancora che $\alpha_b = \alpha_{-b} = \alpha_{\alpha_2(b)}$. Di qui il primo *metodo di composizione* per costruire funzioni di Steiner.

Teorema 7. *Siano G_1, G_2 gruppi additivi, e sia α_2 una funzione di Steiner definita in G_2. Sia T l'insieme delle traiettorie di Σ_{α_2}, S l'insieme delle funzioni di Steiner di G_1. Per α funzione di T in S, scriviamo $\alpha([b]) = \alpha_{[b]}$* (7). *Posto ancora $G = G_1 \oplus G_2$ la funzione $G \to G$, che chiamiamo ancora α, definita dalla*

$$\alpha(a, b) = \big(\alpha_{[b]}(a), \alpha_2(b)\big)\,, \qquad \forall a \in G_1\,, \ \forall b \in G_2\,,$$

è una funzione di Steiner.

Ovviamente al variare di α_2 o di α il Teorema 7 fornisce funzioni di Steiner via via distinte. Se pertanto sono note h_i $(i = 1, 2)$ funzioni di Steiner su G_i e l'ordine di G_2 è $6k + 1$ o $6k + 3$, il nostro teorema fornisce almeno $h_1^{k+1} h_2$ funzioni di Steiner distinte definite in G.

Naturalmente, combinando i metodi, si ottengono risultati ancora più incisivi. Per farlo è utile confrontare le funzioni ottenute a mezzo del Teorema 7.

Osservazione 8. *Nelle condizioni del Teorema 7 sia $\alpha'\colon T \to S$ una funzione tale che $\alpha'_{[b]} = \alpha_{[b]}$ per ogni traiettoria fine o banale $[b]$ di Σ_{α_2}. Allora le funzioni $\alpha, \alpha'\colon G \to G$ definite come al Teorema 7 operano allo stesso modo sulle traiettorie comuni a Σ_α, $\Sigma_{\alpha'}$, e nessuna di esse è ottenibile mediante raffinamento (Teorema 3) dall'altra.*

Sia $(a, b) \in G$ un elemento di una traiettoria comune a Σ_α, $\Sigma_{\alpha'}$. Se, per assurdo, α, α' non operano allo stesso modo su (a, b), deve essere $\alpha'(a, b) = -\alpha(-a, -b)$ (lemma 4 di $[4]_3$). Allora è

$$\alpha_{[b]}(a) = -\alpha'_{[b]}(-a)\,, \qquad \alpha_2(b) = -\alpha_2(-b)\,.$$

La seconda di queste eguaglianze dice che b appartiene ad una traiettoria fine o banale di Σ_{α_2} (teorema 2 di $[4]_1$). Per ipotesi è allora $\alpha_{[b]}(a) = \alpha'_{[b]}(a) = -a$ e dunque α, α' operano allo stesso modo su (a, b).

---

(7) È implicito che G_1 ammette funzioni di Steiner e che $[b]$ è la traiettoria di Σ_{α_2} rappresentata da b.

Per completare la dimostrazione basta mostrare — vista la simmetria delle ipotesi — che nessuna traiettoria di Σ_α è unione di traiettorie fini di $\Sigma_{\alpha'}$. Sia infatti per assurdo (a, b) un elemento di siffatta traiettoria. Allora $\alpha'(a, b) = = (-a, -b)$ (teorema 2 di [4]$_1$), da cui $\alpha_2(b) = -b$. Pertanto $[b]$ è fine e $\alpha_{[b]} = \alpha'_{[b]}$ per ipotesi, ed $\alpha'(a, b) = \alpha(a, b)$, contro l'assunzione.

4. – Vale la pena di vedere come, grazie a questa osservazione, si possano già ottenere *risultati numerativi* abbastanza incisivi. Sia G un gruppo ciclico di ordine $6k+1$. Teorema di Peltesohn e metodo di deformazione permettono subito di asserire che esso possiede 2^k funzioni di Steiner distinte. Il Teorema 7 permette ora di definire su $G \oplus G$ 2^{k^2} funzioni di Steiner che subordinino nel secondo fattore una funzione di Steiner data e che non siano egualmente fini in base all'Osservazione 8. Per deformazione si ottengono così

$$2^{k^2} 2^{(6k+1)^2-1} = 2 \exp [k^2 + (6k+1)^2 - 1]$$

funzioni di Steiner distinte su $G \oplus G$.

Ragionando allo stesso modo si trova che il numero delle funzioni di Steiner su $G \oplus G \oplus G$ è almeno $2 \exp \left[(k^2 + (6k+1)^2)k + (6k+1)^3 - 1\right]$, e che anzi in generale le funzioni di Steiner distinte sul prodotto diretto di n copie di G sono almeno in numero di

$$2 \exp [k^n + k^{n-2}((6k+1)^{n+1} - k(6k+1)^2)/(5k+1) - (k^n - 1)/(k-1)] .$$

5. – Un'altra tecnica di composizione ricorda il ben noto *metodo di derivazione* nel senso di Doyen ([1]$_1$).

Teorema 9. *Sia $G = G_1 \oplus G_2$ e siano α_1, α_2 funzioni di Steiner su G_1, G_2. Supponiamo che l'ordine di G_2 sia $6k+1$, e sia M un sottoinsieme di G_2 tale che $G_2 \setminus \{0\}$ sia unione degli insiemi disgiunti*

$$M = \alpha_2(M), \ -M, \ \alpha_2(-M) = -\alpha_2(M) \ (^8) .$$

Posto (per $a \in G_1$)

$$\alpha_0 = \alpha_1 , \qquad \alpha_x(a) = -a \quad \forall x \in M ,$$

$$\alpha_x(a) = 2a \quad \forall x \in -M , \qquad \alpha_x(a) = a/2 \quad \forall x \in \alpha_2(-M) \ (^9) ,$$

(8) Ove M è l'insieme degli opposti degli elementi di M. Si ricordi che l'osservazione 6 di [4]$_1$ asserisce che esistono 3^k insiemi M soddisfacenti alle condizioni richieste.

(9) Ove $a/2$ è l'unico elemento $z \in G_1$ tale che $2z = a$.

la funzione α *di* G *in* G *definita dalle*

$$\alpha(a, b) = (\alpha_b(a), \alpha_2(b)), \quad \forall a \in G_1, \forall b \in G_2$$

è una funzione di Steiner.

La dimostrazione è una verifica diretta fatta per casi, e può essere lasciata al lettore.

È anche facile vedere che al variare di α_1, α_2 ed M la costruzione fornisce tutte funzioni di Steiner distinte tra loro. Esse sono inoltre tutte diverse da quelle ottenute direttamente col Teorema 7: se infatti la α_x che manda il generico $a \in G_1$ in $2a$ fosse di Steiner sarebbe $-2a = 2a - a$ e dunque $a = 0$, $\forall a \in G_1$.

Bibliografia.

[1] J. Doyen: $[\cdot]_1$ *Sur la structure de certains systèmes de triples de Steiner*, Math. Z. **111** (1969), 289-300; $[\cdot]_2$ *Construction of disjoint Steiner systems*, Proc. Amer. Math. Soc. **32** (1972), 409-416.

[2] C. C. Linder and A. Rosa, *Steiner triple systems having a prescribed number of triples in common*, Canad. J. Math. **27** (1975), 256-260.

[3] G. Ferrero e A. Suppa, *Sistemi, anelloidi e funzioni di Steiner*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **20** (1971), 272-280.

[4] G. Ferrero: $[\cdot]_1$ *Gruppi di Steiner e sistemi fini*, Matematiche **27** (1972), 167-190; $[\cdot]_2$ *Sui gruppi che ammettono funzioni di Steiner*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **4** (1972), 156-170; $[\cdot]_3$ *Deformazioni, raffinamenti e composizioni di funzioni di Steiner* (I), Riv. Mat. Univ. Parma (3) **1** (1972), 125-142; $[\cdot]_4$ *Su un problema relativo ai sistemi di Steiner disgiunti*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **7** (1975), 58-64.

Summary.

We present methods to obtain Steiner functions from given Steiner functions, which are then used to study problems emphasized by other authors.

* * *