Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1976), 353-385

CATERINA CASSISA (*)

Formule di maggiorazione per soluzioni di sistemi di equazioni differenziali lineari ordinari del secondo ordine. (**)

Sia $a(x)$ una matrice $n\times n$ ad elementi complessi, tutti definiti nell'intervallo $[0,1]$ dell'asse delle x ed ivi di classe uno. La matrice $a(x)$ sia non singolare per ogni x appartenente a $[0,1]$.

Sia $c(x)$ una matrice $n\times n$ ad elementi complessi definiti e continui in $[0,1]$.

Nel seguito parlando di *funzione* si intenderà, salvo avvertimento contrario, una funzione avente come valori vettori ad n componenti complesse.

Scopo del presente lavoro è uno studio del problema

(1) $$(a(x)\,u')' + \nu c(x)\,u = f(x), \text{ (1)}$$

(2) $$F_h(u) = b_h \qquad (h = 1, \dots, 2n),$$

dove $f(x)$ è una funzione di $\mathscr{L}^2(0,1)$, F_h è un funzionale lineare e continuo definito nello spazio $C^1[0,1]$ (2), ν è un parametro complesso e b_h sono numeri complessi assegnati.

(*) Indirizzo: Viale dei Colli Portuensi 83, 00151 Roma, Italia.

(**) Ricevuto: 23-XII-1976.

(1) Se $a = \{a_{hk}\}$ $(h = 1, \dots, p;\ k = 1, \dots, q)$ è una matrice $p\times q$ ad elementi complessi e v un vettore a q componenti complesse, si indicherà con av il vettore di componenti $(a_{1k}v_k, \dots, a_{pk}v_k)$, con l'avvertenza che quando compaiono due indici uguali e ripetuti si intenderà sottintesa una somma.

(2) Si consideri lo spazio $C^1[0,1]$ e si introduca in esso la norma

$$|||v||| = \max_{[0,1]} |v(x)| + \max_{[0,1]} |v'(x)|$$

Precisamente ci proponiamo:

I) di tradurre il problema (1)-(2) in equazione integrale vettoriale di Fredholm;

II) di assegnare condizioni necessarie e condizioni sufficienti perchè la matrice di Green del problema (1)-(2), per ν reale (e non autovalore), sia hermitiana;

III) di ottenere formule di maggiorazione per la soluzione del problema (1)-(2) sotto le ipotesi che assicurano il sussistere della II).

Le formule di maggiorazione, di cui al punto III), saranno utilizzate in un successivo lavoro per la maggiorazione degli invarianti ortogonali relativi ai problemi di autovalori connessi con gli operatori impiegati in (1) e (2).

Per quanto concerne la traduzione in equazione integrale del problema (1)-(2) il metodo qui seguito è sostanzialmente identico a quello illustrato da Mauro Picone in una Nota Lincea [**5**]$_2$.

Non ci sembra che sia stato mai considerato il problema di cui al punto II) almeno nelle ipotesi di ampia generalità nelle quali ci si è posti.

Circa il problema III) M. Picone in una sua importante Memoria del 1928 [**5**]$_3$ ha ampiamente considerato il problema della maggiorazione della soluzione di (1)-(2) nelle ipotesi che siano $n = 1$, $F_1(u) = u(0)$, $F_2(u) = u(1)$.

L'utilità dell'impiego di formule di maggiorazione, quali quelle ottenute da M. Picone, è messa in luce nella classica monografia [**4**].

Estensioni dei risultati di M. Picone a più generali condizioni ai limiti sono state considerate da C. Pucci [**6**]. In seguito M. P. Colautti ha studiato il problema della maggiorazione della soluzione di un'equazione differenziale scalare del secondo ordine con generali condizioni ai limiti ottenendo formule di maggiorazione con diversi tipi di norme. Nel lavoro della Colautti trovansi anche considerati i sistemi del secondo ordine, ma le formule di maggiorazione da lei ottenute sono solo relative alle norme negli spazi $\mathscr{L}^2$ [**2**].

1. – Sia $z = x + iy$ un numero complesso e $\bar{z} = x - iy$ il suo coniugato; se $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$ sono due n-vettori a componenti complesse, indicheremo con uv il prodotto scalare $uv = u_i \bar{v}_i$.

---

ove, per un vettore $v = (v_1, \ldots, v_n)$, si pone

$$|v| = (|v_i|\,|v_i|)^{\frac{1}{2}};$$

diremo che F è un funzionale lineare in $C^1[0, 1]$ se riesce $F(au + bv) = aF(u) + bF(v)$ per ogni coppia di funzioni u e v in $C^1[0, 1]$ e quali che siano i numeri complessi a e b; diremo inoltre che F è un funzionale continuo in u_0 appartenente a $C^1[0, 1]$ se, dato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per $|||u - u_0||| < \delta_\varepsilon$ risulti $|F(u) - F(u_0)| < \varepsilon$. È noto che un funzionale lineare e continuo in un punto è continuo ovunque.

Sia a una matrice $p\times q$ ad elementi complessi. Denoteremo con $\bar{a}$ la matrice $q\times p$ aggiunta della matrice a, i cui elementi α_{kh} ($k=1, \ldots, q$; $h=1, \ldots, p$) sono così definiti: $\alpha_{kh}=\bar{a}_{hk}$. Se $u=(u_1, \ldots, u_q)$ e $v=(v_1, \ldots, v_p)$ sono due vettori, intenderemo con auv e vau: $auv=(au)v=a_{hk}u_k\bar{v}_h$; $vau=v(au)=v_h\bar{a}_{hk}\bar{u}_k$. Pertanto si ha $auv=u\bar{a}v$.

D'ora in avanti con $a(x)$ indichiamo una matrice quadrata di ordine n ad elementi complessi di classe uno nell'intervallo $[0,1]$ e supponiamo che la matrice $a(x)$ sia non singolare per ogni x appartenente a $[0,1]$. In queste ipotesi consideriamo il problema

$$(a(x)u')'=\varphi(x)\,, \tag{3}$$

$$F_h(u)=b_h \qquad (h=1, \ldots, 2n)\,, \tag{4}$$

essendo $\varphi(x)$ una funzione di $\mathscr{L}^2(0,1)$, F_h funzionali lineari e continui definiti in $C^1[0,1]$ e b_h costanti complesse assegnate.

Per costruire l'integrale generale della (3) si osservi che deve essere

$$a(x)u'(x)=c^{(1)}+\int_0^x\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,, \tag{5}$$

essendo $c^{(1)}$ un n-vettore costante arbitrario; moltiplicando la (5) per la matrice $A(x)$, inversa della matrice $a(x)$, ed integrando si ha:

$$u(x)=c^{(0)}+\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t\,c^{(1)}+\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t\int_0^t\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,,$$

con $c^{(0)}$ un arbitrario n-vettore costante. Se indichiamo con $B(x)$ l'integrale

$$B(x)=\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{6}$$

una integrazione per parti fornisce:

$$\begin{aligned} u(x)&=c^{(0)}+B(x)c^{(1)}+\Big[B(t)\int_0^t\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big]_{t=0}^{t=x}-\int_0^x B(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\\ &=c^{(0)}+B(x)c^{(1)}+B(x)\int_0^x\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi-\int_0^x B(\xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\ &=c^{(0)}+B(x)c^{(1)}+\int_0^x[B(x)-B(\xi)]\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,. \end{aligned}$$

Denotiamo con $W(x)$ la matrice $2n\times n$ così definita

$$W(x)=\begin{pmatrix} I \\ B^*(x)\end{pmatrix} \tag{7}$$

e con $w^{(h)}(x)$ $(h=1,\dots,2n)$ il vettore ad n componenti formato dalla h-ma riga della matrice $W(x)$. Si ha quindi

$$w_j^{(i)}(x) \quad = \delta_{ij} \qquad (i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n)\,, \tag{8}$$

$$w_j^{(n+i)}(x)=B_{ji}(x) \qquad (i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n) \tag{9}$$

$(\delta_{ij}=0$ per $i\neq j$, $\delta_{ij}=1$ per $i=j)$. È facile constatare che le $2n$ funzioni $w^{(k)}$ $(k=1,\dots,2n)$ sono soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo $(a(x)u')'=0$ associato al sistema (3).

Supporremo che i funzionali F_h $(h=1,\dots,2n)$ *siano tali che la matrice* $\{F_h(w^{(k)})\}$ *sia non singolare, ipotesi che sarà sempre tacitamente ammessa nel corso del presente lavoro* (3).

Si osservi che il supporre non singolare la matrice $\{F_h(w^{(k)})\}$, ove $w^{(k)}(x)$ $(k=1,\dots,2n)$ sono le funzioni definite dalle (8) e (9), è equivalente, come facilmente si constata, a supporre non singolare la matrice $\{F_h(\tilde{w}^{(k)})\}$, ove le funzioni $\tilde{w}^{(k)}(x)$ $(k=1,\dots,2n)$ sono $2n$ qualsivoglia soluzioni linearmente indipendenti di $(a(x)u')'=0$.

Indichiamo con $\{\Phi_{hk}\}$ $(h=1,\dots,2n;\ k=1,\dots,2n)$ la matrice trasposta della inversa di $\{F_h(w^{(k)})\}$ e poniamo

$$v^{(k)}(x)=\Phi_{kh}\,w^{(h)}(x) \qquad (k=1,\dots,2n)\,; \tag{10}$$

si ha: $F_h(w^{(k)})=\delta_{hk}$. Possiamo ora scrivere l'integrale generale della (3) anche nel modo seguente

$$u(x)=c_k v^{(k)}(x)+\int_0^x[B(x)-B(\xi)]\varphi(\xi)\,d\xi\,, \tag{11}$$

---

(3) Si ricorda che M. Picone in [5]$_2$ ha studiato il problema

$$y^{(n)}=\varphi(x)\,, \tag{*}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\int_a^b a_{ij}(\tau)y^{(j-1)}(\tau)\,d\tau=l_i\,, \tag{**}$$

supponendo che esista uno ed un solo polinomio in x di grado $n-1$ soddisfacente alle condizioni (**).

essendo $c_1, \ldots, c_{2n}$ $2n$ costanti complesse. Affinchè la funzione $u(x)$ data dalla (11) verifichi le condizioni (4), le costanti c_k $(k = 1, \ldots, 2n)$ devono essere soluzioni del sistema lineare algebrico

$$F_h(v^{(k)})\, c_k = b_h - F_h\{ \int_0^x [B(x) - B(\xi)]\varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi\} \,. \tag{12}$$

Tenendo presente l'ipotesi fatta sui funzionali F_h, il sistema (12) ammette una ed una sola soluzione che è data da

$$c_k = b_k - F_k\{ \int_0^x [B(x) - B(\xi)]\varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi\} \qquad (k = 1, \ldots, 2n)\,.$$

Si è stabilito pertanto che esiste ed è unica una funzione soddisfacente alla equazione (3) *e alle condizioni* (4) *nella ipotesi che i funzionali* F_k $(k = 1, \ldots, 2n)$ *verifichino la condizione* $\det\{F_h(w^{(k)})\} \neq 0$.

Vogliamo ora determinare la matrice di Green associata al sistema (3)-(4). A tale scopo ricordiamo che dai teoremi di rappresentazione dei funzionali lineari e continui definiti nello spazio di Banach $C^1[0,1]$ (per la norma di un elemento v appartenente a $C^1[0,1]$ cfr. la nota ([2])) segue l'esistenza, per ogni fissato $k = 1, \ldots, 2n$, di $2n$ misure α_{kj} $(j = 1, \ldots, n)$, β_{kj} $(j = 1, \ldots, n)$ tali che

$$F_k(v) = \int_0^1 v_j(x)\, \mathrm{d}\alpha_{kj} + \int_0^1 v_j'(x)\, \mathrm{d}\beta_{kj}\,, \tag{13}$$

quale che sia la funzione $v(x)$ di $C^1[0,1]$.

Applicando la (13) alla funzione $\int_0^x [B(x) - B(\xi)]\varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi$ si ottiene

$$F_k\{ \int_0^x [B(x) - B(\xi)]\varphi(\xi)\, \mathrm{d}\xi\} =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}\alpha_{kj}\{ \int_0^x [B_{jh}(x) - B_{jh}(\xi)]\varphi_h(\xi)\, \mathrm{d}\xi\} + \int_0^1 \mathrm{d}\beta_{kj} \int_0^x B_{jh/_x}(x)\, \varphi_h(\xi)\, \mathrm{d}\xi =$$

$$= \int_0^1 \{ \int_\xi^1 [B_{jh}(x) - B_{jh}(\xi)]\, \mathrm{d}\alpha_{kj}\}\, \varphi_h(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \int_0^1 \{ \int_\xi^1 A_{jh}(x)\, \mathrm{d}\beta_{kj}\}\, \varphi_h(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

e quindi risulta

$$c_k = b_k - \int_0^1 \{ \int_\xi^1 [B_{jh}(t) - B_{jh}(\xi)]\, \mathrm{d}\alpha_{kj}\}\, \varphi_h(\xi)\, \mathrm{d}\xi - \int_0^1 \{ \int_\xi^1 A_{jh}(t)\, \mathrm{d}\beta_{kj}\}\, \varphi_h(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,. \tag{14}$$

Pertanto la funzione $u(x)$ può scriversi nella forma seguente

$$(15)\quad u(x) = b_k v^{(k)}(x) - v^{(k)}(x) \int_0^1 \{ \int_\xi^1 [B_{jh}(t) - B_{jh}(\xi)]\, d\alpha_{kj} \} \varphi_h(\xi)\, d\xi -$$

$$- v^{(k)}(x) \int_0^1 \{ \int_\xi^1 A_{jh}(t)\, d\beta_{kj} \} \varphi_h(\xi)\, d\xi + \int_0^x [B(x) - B(\xi)] \varphi(\xi)\, d\xi .$$

Posto ($i, h = 1, \dots n$)

$$(16)\quad G_{ih}(x, \xi) \begin{cases} = v_i^{(k)}(x) \{ \int_\xi^1 [B_{jh}(t) - B_{jh}(\xi)]\, d\alpha_{kj} + \int_\xi^1 A_{jh}(t)\, d\beta_{kj} \} - \\ \qquad - B_{ih}(x) + B_{ih}(\xi) , \qquad x \geqslant \xi \\ = v_i^{(k)}(x) \{ \int_\xi^1 [B_{jh}(t) - B_{jh}(\xi)]\, d\alpha_{kj} + \int_\xi^1 A_{jh}(t)\, d\beta_{kj} \} , \qquad x \leqslant \xi , \end{cases}$$

si ottiene

$$(17)\qquad u(x) = b_k v^{(k)}(x) - \int_0^1 G(x, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi .$$

La matrice $G(x, \xi)$ suindicata è la matrice di Green del problema (3)-(4).

2. – Vogliamo ora considerare, nelle ipotesi specificate per $a(x)$, $c(x)$, $f(x)$, F_k, il problema (1)-(2).

Sappiamo che esiste una ed una sola soluzione di $(a(x)u')' = \varphi(x)$ che verifica le (2) ed è data dalla (17). Sostituendo la (17) nella (1) si trova

$$(18)\qquad \varphi(x) - \nu c(x) \int_0^1 G(x, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi = - \nu c(x)\, b_k v^{(k)}(x) + f(x) .$$

Posto

$$(19)\qquad g(x) = - \nu b_k\, c(x)\, v^{(k)}(x) + f(x) ,$$

la (18) si può scrivere

$$(20)\qquad \varphi(x) - \nu \int_0^1 c(x) G(x, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi = g(x) .$$

Quindi se $u(x)$ è soluzione di (1)-(2), la funzione $\varphi(x) = (a(x)u'(x))'$ è soluzione di (20) e viceversa, se $\varphi(x)$ è una soluzione di (20) la funzione $u(x)$ data dalla (17) è soluzione di (1)-(2), ove si tenga conto della posizione (19).

Si può pertanto affermare che il problema della ricerca della soluzione di (1)-(2) è equivalente al problema della risoluzione dell'equazione integrale vettoriale (20).

L'equazione (20) ottenuta è un'equazione integrale di Fredholm di seconda specie; se indichiamo con T l'operatore integrale

$$T(\varphi) = \int_0^1 c(x) G(x, \xi) \varphi(\xi) \,\mathrm{d}\xi ,$$

possiamo quindi concludere che:

a) l'insieme degli autovalori dell'equazione omogenea associata alla (20)

$$\varphi(x) = \nu T(\varphi) \tag{21}$$

è privo di punti di accumulazione al finito;

b) ogni autovalore di (21) ha molteplicità finita;

c) se ν non è autovalore di (21) esiste una ed una sola soluzione dell'equazione (20) qualunque sia il termine noto $g(x)$ di $\mathscr{L}^2(0, 1)$.

Sussiste quindi il seguente teorema:

I. *Siano* $a(x)$ *e* $c(x)$ *matrici di ordine* n, *con* $a_{ij}(x)$, $c_{ij}(x)$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$ *appartenenti rispettivamente a* $C^1[0, 1]$ *e* $C^0[0, 1]$ *e sia, per ogni* x *di* $[0, 1]$, $\det a(x) \neq 0$. *Siano* F_h $(h = 1, \ldots, 2n)$ *i funzionali lineari e continui sopra introdotti e* b_h $(h = 1, \ldots, 2n)$ *costanti complesse assegnate. Se* $f(x)$ *è una funzione di* $\mathscr{L}^2(0, 1)$ *il problema* (1)-(2) *ammette una ed una sola soluzione comunque si fissi il numero complesso* ν *non autovalore di*

$$\varphi(x) - \nu \int_0^1 c(x) G(x, \xi) \varphi(\xi) \,\mathrm{d}\xi = 0$$

essendo $G(x, \xi)$ *la matrice definita dalla* (16).

Se la matrice $c(x)$ è non singolare per ogni x di $[0, 1]$, il nucleo di T è chiuso, cioè non esiste alcuna funzione $\varphi(\xi)$ non quasi ovunque nulla tale che sia

$$T(\varphi) = c(x) \int_0^1 G(x, \xi) \varphi(\xi) \,\mathrm{d}\xi = 0 .$$

Infatti, essendo $c(x)$ non singolare, dovrà essere

$$\int_0^1 G(x, \xi) \varphi(\xi) \,\mathrm{d}\xi = 0 ;$$

tale equazione non può ammettere una soluzione non quasi ovunque nulla, in quanto, se così fosse, la funzione $u(x)$ identicamente uguale a zero sarebbe soluzione di

$$\big(a(x)\,u'\big)' = \varphi(x)\,, \qquad F_k(u) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, 2n)\,,$$

con $\varphi(x)$ non quasi ovunque nulla.

3. – Prima di considerare il problema II), consistente nell'assegnare le condizioni necessarie e sufficienti perchè la matrice di Green del problema (1)-(2), per ν reale (e non autovalore), sia hermitiana, esamineremo quando tale circostanza si verifica per la matrice $G(x, \xi)$, quando, cioè

$$G(x, \xi) = \overline{G(\xi, x)} \tag{22}$$

con ciò intendendo $G_{ij}(x, \xi) = \overline{G_{ji}(\xi, x)}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ per x e ξ appartenenti a $[0, 1]$.

Indichiamo con $\mathscr{U}$ la varietà lineare costituita dalle funzioni $u(x)$ di $C^1[0, 1]$, con derivata prima assolutamente continua e con derivata seconda in $\mathscr{L}^2(0, 1)$, le quali verificano le condizioni $F_k(u) = 0$ $(k = 1, \ldots, 2n)$.

II. *Sia $a(x)$ una matrice $n \times n$ non singolare, ad elementi di classe $C^1[0, 1]$. Sia $G(x, \xi)$ la matrice $n \times n$ definita dalla* (16). *Condizione necessaria e sufficiente perchè risulti $G(x, \xi) = \overline{G(\xi, x)}$ è che il funzionale*

$$\Phi(u, v) = [u(x)a(x)v'(x) - a(x)\,u'(x)\,v(x)]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 a(x)\,u'(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 u'(x)\,a(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$$

si annulli per ogni coppia di funzioni u e v appartenenti a $\mathscr{U}$.

Indichiamo con G l'operatore integrale definito in $\mathscr{L}^2(0, 1)$

$$G(\varphi) = \int_0^1 G(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

e con E l'operatore differenziale definito in $\mathscr{U}$

$$E(u) = \big(a(x)\,u'(x)\big)'\,;$$

allora la $\varphi = E(u)$, $u \in \mathscr{U}$ e la inversa $u = G(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{L}^2\,(0,1)$ stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra $\mathscr{U}$ e $\mathscr{L}^2(0, 1)$.

Supponiamo dapprima che si abbia $G(x, \xi) = \overline{G(\xi, x)}$. Se φ e ψ sono due funzioni di $\mathscr{L}^2(0, 1)$, si ha

$$(G(\varphi), \psi) = \int_0^1 \Big[\int_0^1 G(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big]\,\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \varphi(\xi)\Big[\int_0^1 G(\xi, x)\psi(x)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}\xi = (\varphi, G(\psi))\,.$$

Ponendo $u = G(\varphi)$, $v = G(\psi)$ (e quindi $\varphi = E(u)$, $\psi = E(v)$) risulta

$$(u, E(v)) = (E(u), v) \; ; \tag{23}$$

dal momento che la (23) può così scriversi

$$\int_0^1 u(x)\big(a(x)v'(x)\big)'\,dx = \int_0^1 \big(a(x)u'(x)\big)'v(x)\,dx \,,$$

segue $\Phi(u, v) = 0$.

Viceversa si dimostra che, se $\Phi(u, v) = 0$ quali che siano u e v appartenenti a $\mathscr{U}$, riesce $G(x, \xi) = \overline{G(\xi, x)}$.

Ne segue quindi:

III. *Sia $a(x)$ una matrice $n \times n$ non singolare, hermitiana ad elementi di classe $C^1[0, 1]$. Sia $G(x, \xi)$ la matrice $n \times n$ definita dalla* (16). *Condizione necessaria e sufficiente perchè risulti $G(x, \xi) = \overline{G(\xi, x)}$ è che il funzionale*

$$\Psi(u, v) = [u(x)\,a(x)\,v'(x) - a(x)\,u'(x)\,v(x)]_{x=0}^{x=1}$$

si annulli per ogni coppia di funzioni u e v appartenenti ad $\mathscr{U}$.

D'ora in avanti supporremo la matrice $a(x)$ hermitiana; pertanto tale ipotesi deve intendersi sottintesa qualora non sia esplicitamente menzionata.

4. – Sia $c(x)$ una matrice (ad elementi complessi) definita positiva (strettamente) per ogni x appartenente a $[0, 1]$; ciò implica che $c(x)$ è hermitiana, ossia coincide con la sua aggiunta. Sia ν un numero diverso da zero e *non* autovalore di (21).

Abbiamo in precedenza stabilito che il problema (1)-(2) è equivalente alla equazione integrale vettoriale

$$\varphi(x) - \nu \int_0^1 c(x)\,G(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi = g(x) \,. \tag{24}$$

Ci proponiamo di tradurre il problema di cui sopra in un'equazione integrale che abbia il nucleo hermitiano nelle ipotesi (cfr. III, par. 3) che assicurano il sussistere della (22).

Essendo $c(x)$ una matrice definita positiva ed hermitiana esiste una ed una sola radice quadrata positiva ed hermitiana di $c(x)$ che indicheremo con $c^{\frac{1}{2}}(x)$. Poniamo per ogni x appartenente a $[0, 1]$: $\varphi(x) = c^{\frac{1}{2}}(x)\psi(x)$; la (24) assume la forma

$$c^{\frac{1}{2}}(x)\,\psi(x) - \nu\int_0^1 c(x)\,G(x,\,\xi)\,c^{\frac{1}{2}}(\xi)\,\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = g(x)\,. \tag{25}$$

Moltiplicando la (25) a sinistra per la matrice $c^{-\frac{1}{2}}(x)$ inversa della matrice $c^{\frac{1}{2}}(x)$ si ottiene

$$\psi(x) - \nu\int_0^1 c^{\frac{1}{2}}(x)\,G(x,\,\xi)\,c^{\frac{1}{2}}(\xi)\,\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = c^{-\frac{1}{2}}(x)\,g(x)\;;$$

ponendo

$$K(x,\,\xi) = c^{\frac{1}{2}}(x)\,G(x,\,\xi)\,c^{\frac{1}{2}}(\xi)\,,$$

si ha

$$\psi(x) - \nu\int_0^1 K(x,\,\xi)\,\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = c^{-\frac{1}{2}}(x)\,g(x)\,. \tag{26}$$

Quindi il problema (1)-(2) è equivalente al problema (26) ove il nucleo dell'operatore

$$K(\psi) = \int_0^1 K(x,\,\xi)\,\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

è hermitiano, compatto e chiuso.

Vogliamo ora costruire la matrice di Green del problema (1)-(2) e risolvere il problema II).

Indichiamo con μ_h ($h = 1, 2, \ldots$) gli autovalori di K contati con le rispettive molteplicità ed ordinati secondo valori decrescenti del modulo, con la convenzione che, a parità di modulo, gli autovalori positivi precedono quelli negativi. Indichiamo poi con $\{\psi_h(x)\}$ un corrispondente sistema di autofunzioni linearmente indipendenti di K che sia inoltre completo; un tale sistema esiste essendo chiuso il nucleo di K.

Come è noto, per il teorema di risoluzione spettrale si ha

$$K(\psi) = \sum_{h=1}^{\infty}\mu_h(\psi,\,\psi_h)\,\psi_h(x)\;;$$

pertanto la (26) si può scrivere nel modo seguente, con $\mu = 1/\nu$,

$$\mu\sum_{h=1}^{\infty}(\psi,\,\psi_h)\,\psi_h(x) - \sum_{h=1}^{\infty}\mu_h(\psi,\,\psi_h)\,\psi_h(x) = \mu\sum_{h=1}^{\infty}(c^{-\frac{1}{2}}g,\,\psi_h)\,\psi_h(x)\,.$$

Per le ipotesi fatte sul sistema $\{\psi_h(x)\}$ dovrà essere

$$(\mu-\mu_h)(\psi-\psi_h)=\mu(c^{-\frac{1}{2}}g,\,\psi_h) \qquad (h=1,2,\dots)$$

e quindi

$$(\psi,\,\psi_h)=\frac{\mu(c^{-\frac{1}{2}}g,\,\psi_h)}{\mu-\mu_h} \qquad (h=1,2,\dots)\,.$$

Pertanto risulta

$$\psi(x)=\sum_{h=1}^{\infty}(\psi,\,\psi_h)\,\psi_h(x)=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\mu(c^{-\frac{1}{2}}g,\,\psi_h)}{\mu-\mu_h}\,\psi_h(x)$$

$$=\sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{\mu(c^{-\frac{1}{2}}g,\,\psi_h)}{\mu-\mu_h}-(c^{-\frac{1}{2}}g,\,\psi_h)\right]\psi_h(x)+\sum_{h=1}^{\infty}(c^{-\frac{1}{2}}g,\,\psi_h)\,\psi_h(x)$$

$$=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\mu(c^{-\frac{1}{2}}g,\,\psi_h)-\mu(c^{-\frac{1}{2}}g,\,\psi_h)+\mu_h(c^{-\frac{1}{2}}g,\,\psi_h)}{\mu-\mu_h}\,\psi_h(x)+c^{-\frac{1}{2}}(x)\,g(x)\,.$$

Essendo $\varphi(x)=c^{\frac{1}{2}}(x)\,\psi(x)$ e $u(x)=b_k v^{(k)}(x)-\int_0^1 G(x,\,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$, si ottengono i seguenti sviluppi

$$\varphi(x)=c^{\frac{1}{2}}(x)\sum_{h=1}^{\infty}\mu_h\frac{(c^{-\frac{1}{2}}g,\,\psi_h)}{\mu-\mu_h}\,\psi_h(x)+g(x)$$

$$=\sum_{h=1}^{\infty}\mu_h\frac{(c^{-\frac{1}{2}}g,\,\psi_h)}{\mu-\mu_h}\,c^{\frac{1}{2}}(x)\,\psi_h(x)+g(x)\,,$$

$$u(x)=b_k v^{(k)}(x)-\int_0^1 G(x,\,\xi)\left[\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(c^{-\frac{1}{2}}g,\,\mu_h\psi_h)}{\mu-\mu_h}\,c^{\frac{1}{2}}(\xi)\,\psi_h(\xi)\right]d\xi-\int_0^1 G(x,\,\xi)\,g(\xi)\,d\xi$$

$$=b_k v^{(k)}(x)-\int_0^1\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(c^{-\frac{1}{2}}g,\,\mu_h\psi_h)}{\mu-\mu_h}\,G(x,\,\xi)\,c^{\frac{1}{2}}(\xi)\,\psi_h(\xi)\,d\xi-\int_0^1 G(x,\,\xi)\,g(\xi)\,d\xi\,.$$

Poichè risulta

$$K(\psi_h)=\int_0^1 c^{\frac{1}{2}}(y)\,G(y,\,t)\,c^{\frac{1}{2}}(t)\,\psi_h(t)\,dt=\mu_h\psi_h(y) \qquad (h=1,2,\dots)\,,$$

segue

$$u(x)=b_k v^{(k)}(x)-\int_0^1\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{\mu-\mu_h}\left\{\int_0^1 c^{-\frac{1}{2}}(y)\,g(y)\left[\int_0^1 c^{\frac{1}{2}}(y)\,G(y,\,t)\,c^{\frac{1}{2}}(t)\,\psi_h(t)\,dt\right]dy\right\}\cdot$$

$$\cdot\,G(x,\,\xi)\,c^{\frac{1}{2}}(\xi)\,\psi_h(\xi)\,d\xi-\int_0^1 G(x,\,\xi)\,g(\xi)\,d\xi\,.$$

Ricordando poi che la matrice $c^{\frac{1}{2}}(x)$ è hermitiana, si ottiene (giustificando i passaggi con classiche considerazioni)

$$u(x) = b_k v^{(k)}(x) - \int_0^1 \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\mu - \mu_h} \int_0^1 g(y) \left[\int_0^1 G(y, t)\, c^{\frac{1}{2}}(t)\, \psi_h(t)\, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}y \,\cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, G(x, \xi)\, c^{\frac{1}{2}}(\xi)\, \psi_h(\xi) \right\} \mathrm{d}\xi - \int_0^1 G(x, \xi)\; g(\xi)\, \mathrm{d}\xi =$$

$$= b_k v^{(k)}(x) - \int_0^1 \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\mu - \mu_h} \left[g(y) \int_0^1 G(y, t)\, c^{\frac{1}{2}}(t)\, \psi_h(t)\, \mathrm{d}t \right] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_0^1 G(x, \xi)\, c^{\frac{1}{2}}(\xi)\, \psi_h(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right\} \mathrm{d}y - \int_0^1 G(x, \xi)\; g(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Di conseguenza, se indichiamo con $H(x, y)$ la matrice così definita $(i, j = 1, \dots, n)$

$$(27)\quad H_{ij}(x, y) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\mu - \mu_h} \overline{\int_0^1 G_{jl}(y, t)(c^{\frac{1}{2}})_{lm}(t)\, \psi_{hm}(t)\, \mathrm{d}t} \int_0^1 G_{ip}(x, \xi)(c^{\frac{1}{2}})_{p\varrho}(\xi)\; \psi_{h\varrho}(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,,$$

la soluzione di (1)-(2) è data, qualora si tenga presente la (19), da

$$(28)\qquad u(x) = b_k v^{(k)}(x) - \int_0^1 H(x, y)\, g(y)\, \mathrm{d}y - \int_0^1 G(x, y)\, g(y)\, \mathrm{d}y$$

$$= b_k v^{(k)}(x) + \nu b_k \int_0^1 H(x, y)\, c(y)\, v^{(k)}(y)\, \mathrm{d}y - \int_0^1 H(x, y)\; f(y)\, \mathrm{d}y +$$

$$+ \nu b_k \int_0^1 G(x, y)\, c(y)\, v^{(k)}(y)\, \mathrm{d}y - \int_0^1 G(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y\,.$$

La matrice di Green del problema (1)-(2) è quindi data da $H(x, y) + G(x, y)$, ove $H(x, y)$ e $G(x, y)$ sono definite, rispettivamente, dalla (27) e dalla (16).

Sussiste il seguente teorema:

IV. *Sia $a(x)$ una matrice $n \times n$ ad elementi di classe $C^1[0, 1]$, non singolare ed hermitiana per ogni x appartenente a $[0, 1]$ e sia $c(x)$ una matrice $n \times n$ defi-*

nita positiva nell'intervallo $[0, 1]$, *i cui elementi appartengono a* $C^0[0, 1]$. *Sia* ν *un numero reale non autovalore di*

$$(29) \qquad (a(x)u')' + \nu c(x)u = 0\,, \qquad u \in \mathscr{U}\,.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè la matrice di Green di (29) *sia hermitiana è che il funzionale*

$$\Psi(u, v) = [u(x)\,a(x)\,v'(x) - a(x)\,u'(x)\,v(x)]_{x=0}^{x=1}$$

si annulli per ogni coppia di funzioni u *e* v *appartenenti a* $\mathscr{U}$.

Già sappiamo che il teorema è vero per $\nu = 0$. Sia $\nu \neq 0$; poichè riesce $H(x, y) = \overline{H(y,x)}$, quanto asserito è conseguenza del teorema III.

5. – Vogliamo considerare in questo numero il problema III), cioè ottenere formule di maggiorazione per la soluzione di (1)-(2) e per la sua derivata prima.

Se $\nu = 0$ è facile, dalla (17), ottenere una maggiorazione della soluzione di (1)-(2) e della sua derivata prima: si ha infatti

$$|u(x)| \leqslant |b_k v^{(k)}(x)| + \int_0^1 |G(x, \xi)|\,|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \text{ [4]}\,,$$

$$|u'(x)| \leqslant |b_k v^{(k)\prime}(x)| + \int_0^1 |G_x(x, \xi)|\,|f(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Sia $\nu \neq 0$. Si ha (fissati x e y in $[0, 1]$ e indicata con d la distanza (positiva) di μ dallo spettro di K)

$$(30) \quad |H_{ij}(x, y)| \leqslant \frac{1}{d} \sum_{h=1}^{\infty} \left| \int_0^1 G_{jl}(y, t)(c^{\frac12})_{lm}(t)\, \psi_{hm}(t)\, \mathrm{d}t \right| \left| \int_0^1 G_{ip}(x, \xi)(c^{\frac12})_{p\varrho}(\xi)\, \psi_{h\varrho}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{d} \left(\sum_{h=1}^{\infty} \left| \int_0^1 G_{jl}(y, t)(c^{\frac12})_{lm}(t)\, \psi_{hm}(t)\, \mathrm{d}t \right|^2 \right)^{\frac12} \left(\sum_{h=1}^{\infty} \left| \int_0^1 G_{ip}(x, \xi)(c^{\frac12})_{p\varrho}(\xi)\, \psi_{h\varrho}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right|^2 \right)^{\frac12}$$

$$(i, j = 1, \dots, n)\,.$$

---

(4) Per modulo di una matrice θ, $p \times q$, intendiamo il numero reale $|\theta|$ dato da

$$|\theta| = \Big(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} |\theta_{ij}|^2 \Big)^{\frac12}.$$

Poichè il sistema $\{\psi_h(x)\}$ è completo, si ottiene per la formula di Bessel $(i, j = 1, \ldots, n)$

$$(31)\quad |H_{ij}(x, y)| \leqslant \frac{1}{d}\left\{\int_0^1 \sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{l=1}^{n} G_{jl}(y, t)(c^{\frac{1}{2}})_{lk}(t)\right|^2 \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot\left\{\int_0^1 \sum_{m=1}^{n}\left|\sum_{p=1}^{n} G_{ip}(x, \xi)(c^{\frac{1}{2}})_{pm}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ne segue:

$$|u(x)| \leqslant \left|\sum_{h=1}^{2n} b_h v^{(h)}(x)\right| + \int_0^1 |H(x, y)|\,\left|f(y) - \sum_{h=1}^{2n} \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)\right| \mathrm{d}y +$$
$$+ \int_0^1 |G(x, y)|\,\left|f(y) - \sum_{h=1}^{2n} \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)\right| \mathrm{d}y =$$
$$= \left|\sum_{h=1}^{2n} b_h v^{(h)}(x)\right| + \int_0^1 \left(\sum_{i,j}^{1,n} |H_{ij}(x, y)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left|f(y) - \sum_{h=1}^{2n} \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)\right| \mathrm{d}y +$$
$$+ \int_0^1 |G(x, y)|\,\left|f(y) - \sum_{h=1}^{2n} \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)\right| \mathrm{d}y$$
$$\leqslant \left|\sum_{h=1}^{2n} b_h v^{(h)}(x)\right| + \frac{1}{d}\int_0^1 \left[\sum_{i,j}^{1,n}\left\{\int_0^1 \sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{l=1}^{n} G_{jl}(y, t)(c^{\frac{1}{2}})_{lk}(t)\right|^2 \mathrm{d}t\right\} \cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left\{\int_0^1 \sum_{m=1}^{n}\left|\sum_{p=1}^{n} G_{ip}(x, \xi)(c^{\frac{1}{2}})_{pm}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot\left|f(y) - \sum_{h=1}^{2n} \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)\right| \mathrm{d}y + \int_0^1 |G(x, y)|\,\left|f(y) - \sum_{h=1}^{2n} \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)\right| \mathrm{d}y\,.$$

In modo analogo si ottiene una formula di maggiorazione per la derivata prima della funzione $u(x)$.

Si può enunciare il seguente teorema:

V. *Sia $a(x)$ una matrice quadrata di ordine n ad elementi complessi di classe uno nell'intervallo $[0, 1]$; la matrice $a(x)$ sia non singolare ed hermitiana per ogni x appartenente a $[0, 1]$. Sia $c(x)$ una matrice $n \times n$ ad elementi complessi definiti e continui in $[0, 1]$; la matrice $c(x)$ sia definita positiva per ogni x di $[0, 1]$. Sia $f(x)$ una funzione di $\mathscr{L}^2(0, 1)$ e siano F_h $(h = 1, \ldots, 2n)$ funzionali lineari e continui definiti nello spazio $C^1[0, 1]$ e verificanti la condizione* det $\{F_h(w^{(k)})\} \neq 0$, *ove* $w^{(k)}(x)$ $(k = 1, \dots, 2n)$ *sono le funzioni definite dalle* (8) *e* (9). *Siano* b_h $(h = 1, \dots, 2n)$ *costanti complesse assegnate e siano* $v^{(h)}(x)$ $(h = 1, \dots, 2n)$ *le funzioni definite dalla* (10). *Se* $\mathscr{U}$ *è la varietà lineare costituita dalle funzioni* $u(x)$ *di* $C^1[0, 1]$ *con derivata prima assolutamente continua e con derivata seconda in* $\mathscr{L}^2(0, 1)$ *tali che* $F_h(u) = 0$ $(h = 1, \dots, 2n)$, *supponiamo che per* u *e* v *in* $\mathscr{U}$ *riesca*

$$\Psi(u, v) = [u(x)\, a(x)\, v'(x) - a(x)\, u'(x)\, v(x)]_{x=0}^{x=1} = 0 \, .$$

Se ν *è diverso da zero e non è autovalore di*

$$(a(x)u')' + \nu c(x) u = 0 \, , \qquad F_h(u) = 0 \qquad (h = 1, \dots, 2n),$$

sussistono, per la soluzione del problema (1)-(2) *e per la sua derivata prima, le seguenti formule di maggiorazione*:

$$(32) \quad |u(x)| \leqslant \Big| \sum_{h=1}^{2n} b_h v^{(h)}(x) \Big| + \frac{1}{d} \int_0^1 \Big[\int_0^1 |G(y, t)\, c^{\frac{1}{2}}(t)|^2 \, dt \Big]^{\frac{1}{2}} \Big[\int_0^1 |G(x, \xi)\, c^{\frac{1}{2}}(\xi)|^2 \, d\xi \Big]^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \Big| f(y) - \sum_{h=1}^{2n} \nu b_h\, c(y)\, v^{(h)}(y) \Big| \, dy + \int_0^1 |G(x, y)| \, \Big| f(y) - \sum_{h=1}^{2n} \nu b_h\, c(y)\, v^{(h)}(y) \Big| \, dy \, ,$$

$$(33) \quad |u'(x)| \leqslant \Big| \sum_{h=1}^{2n} b_h v^{(h)\prime}(x) \Big| + \frac{1}{d} \int_0^1 \Big[\int_0^1 |G(y, t)\, c^{\frac{1}{2}}(t)|^2 \, dt \Big]^{\frac{1}{2}} \Big[\int_0^1 |G_x(x, \xi)\, c^{\frac{1}{2}}(\xi)|^2 \, d\xi \Big]^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \Big| f(y) - \sum_{h=1}^{2n} \nu b_h\, c(y)\, v^{(h)}(y) \Big| \, dy + \int_0^1 |G_x(x, y)| \, \Big| f(y) - \sum_{h=1}^{2n} \nu b_h\, c(y)\, v^{(h)}(y) \Big| \, dy \, ,$$

ove $G(x, \xi)$ *è la matrice definita dalla* (16) *e* d *è la distanza di* $\mu = \nu^{-1}$ *dallo spettro del problema*

$$\mu(a(x)u')' + c(x) u = 0 \, , \qquad u \in \mathscr{U} \, .$$

Vogliamo ora estendere il procedimento seguito per pervenire alla (32) al caso in cui la matrice $c(x)$ sia semidefinita positiva per ogni x appartenente all'intervallo $[0, 1]$.

Sia ε un numero positivo. Posto $c_\varepsilon(x) \equiv c(x) + \varepsilon I$, consideriamo l'operatore

$$K_\varepsilon(\varphi) = \int_0^1 c_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(y)\, G(y, t)\, c_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(t)\, \varphi(t) \, dt$$

ed indichiamo con $\mu_{\varepsilon h}$ e $\psi_{\varepsilon h}(x)$, rispettivamente, i suoi autovalori e le sue autofunzioni.

Poichè, come è noto, $c_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ converge a $c^{\frac{1}{2}}$ se ε tende a zero, possiamo affermare che esiste un numero positivo ε_0 tale che, preso comunque un numero positivo ε minore di ε_0, riesce $\|K - K_\varepsilon\| < d/2$, ove la norma $\|\cdot\|$ va intesa come norma di operatore lineare e continuo dello spazio $\mathscr{L}^2(0,1)$ in sè. Pertanto dalla diseguaglianza di Aronszajn: $|\mu_h - \mu_{\varepsilon h}| \leqslant \|K - K_\varepsilon\|$ $(h = 1, 2, \ldots)$ segue per ogni $\varepsilon < \varepsilon_0$: $|\mu - \mu_{\varepsilon h}| \geqslant |\mu - \mu_h| - |\mu_h - \mu_{\varepsilon h}| > d - d/2 > 0$.

Sia $\varepsilon < \varepsilon_0$ e sia ν un numero diverso da zero e non autovalore di (1)-(2); poichè la soluzione di (1)-(2) è soluzione di

$$(a(x)u')' + \nu(c(x) + \varepsilon I)u = f(x) + \nu\varepsilon u\,, \qquad F_k(u) = b_k \qquad (k = 1, \ldots, 2n)\,,$$

e poichè $c_\varepsilon(x)$ è definita positiva in $[0,1]$, possiamo applicare alla funzione $u(x)$ la formula (28):

$$u(x) = b_k v^{(k)}(x) - \int_0^1 H_\varepsilon(x,y)[f(y) + \nu\varepsilon u(y) - \nu b_k c_\varepsilon(y) v^{(k)}(y)]\,\mathrm{d}y - $$
$$- \int_0^1 G(x,y)[f(y) + \nu\varepsilon u(y) - \nu b_k c_\varepsilon(y) v^{(k)}(y)]\,\mathrm{d}y\,,$$

con

$$H_\varepsilon(x,y) = \{H_{\varepsilon_{ij}}(x,y)\} = \left\{\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\mu - \mu_{\varepsilon h}} \int_0^1 G_{jl}(y,t)(c_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{lm}(t)\,\psi_{\varepsilon_{hm}}(t)\,\mathrm{d}t\,\cdot\right.$$
$$\left.\cdot \int_0^1 G_{ip}(x,\xi)(c_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{p\varrho}(\xi)\,\psi_{\varepsilon_{h\varrho}}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\}.$$

Se indichiamo con d_ε la distanza di μ dall'insieme $\{\mu_{\varepsilon_h}\ (h = 1, 2, \ldots)\}$ otteniamo dalla (31) $(i, j = 1, \ldots, n)$

$$|H_{\varepsilon_{ij}}(x,y)| \leqslant \frac{1}{d_\varepsilon}\left\{\int_0^1 \sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{l=1}^{n} G_{jl}(y,t)(c_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{lk}(t)\right|^2 \mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^1 \sum_{m=1}^{n}\left|\sum_{p=1}^{n} G_{ip}(x,\xi)(c_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{pm}(t)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right\}^{\frac{1}{2}}$$

e dalla (32)

$$(34)\quad |u(x)| \leqslant \left|\sum_{h=1}^{2n} b_h v^{(h)}(x)\right| + \frac{1}{d_\varepsilon}\int_0^1\left[\int_0^1 |G(y,t)\,c_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(t)|^2\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\cdot\left[\int_0^1 |G(x,\xi)\,c_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right]^{\frac{1}{2}} \left|f(y) + \nu\varepsilon u(y) - \sum_{h=1}^{2n}\nu b_h c_\varepsilon(y) v^{(h)}(y)\right| \mathrm{d}y +$$
$$+ \int_0^1 |G(x,y)|\,\left|f(y) + \nu\varepsilon u(y) - \sum_{h=1}^{2n}\nu b_h c_\varepsilon(y) v^{(h)}(y)\right| \mathrm{d}y\,.$$

Poichè $u(x)$ non dipende da ε e poichè la (34) è verificata per ogni $\varepsilon < \varepsilon_0$, facendo tendere ε a zero si ottiene la (32). Con lo stesso procedimento si può dimostrare che anche la (33) è valida nell'ipotesi che $c(x)$ sia semidefinita positiva.

Abbiamo quindi dimostrato che:

VI. *Il teorema* V *continua a sussistere supponendo che la matrice* $c(x)$ *sia semidefinita positiva e ferme lasciando tutte le altre ipotesi.*

Vogliamo ora dare delle condizioni sufficienti perchè ν non sia autovalore di (21) cioè dell'equazione

$$\varphi(x) - \nu \int_0^1 c(x) G(x, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi = 0 ,$$

o equivalentemente di

$$(a(x)u')' + \nu c(x) u = 0 , \tag{35}$$

$$F_k(u) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, 2n) . \tag{36}$$

Sussiste il seguente teorema:

VII. *Sia* $a(x)$ *una matrice* $n \times n$ *ad elementi di classe* $C^1[0, 1]$, *definita positiva per ogni* x *appartenente a* $[0, 1]$ *e sia* $c(x)$ *una matrice* $n \times n$ *definita positiva nell'intervallo* $[0, 1]$, *i cui elementi appartengono a* $C^0[0, 1]$. *Supponiamo che il funzionale*

$$\Psi(u, v) = [u(x)\, a(x)\, v'(x) - a(x)\, u'(x)\, v(x)]_{x=0}^{x=1}$$

si annulli per ogni coppia di funzioni u *e* v *di* $\mathcal{U}$ *e inoltre che per ogni* u *di* $\mathcal{U}$ *riesca* $[a(x)u'(x)u(x)]_{x=0}^{x=1} \leqslant 0$. *Condizione sufficiente perchè* ν *non sia autovalore di* (35)-(36) *è che* ν *non sia positivo.*

Se ν non è reale oppure se $\nu = 0$ allora già sappiamo che ν non è autovalore. Supponiamo $\nu < 0$. Moltiplichiamo la (35) per $u(x)$ e integriamo nell'intervallo $[0, 1]$. Si ottiene (integrando per parti)

$$[a(x)u'(x)u(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 a(x)u'(x)u'(x)\, dx + \nu \int_0^1 c(x)u(x)u(x)\, dx = 0 . \tag{37}$$

Segue quindi dall'essere $\nu < 0$ che la (37) è soddisfatta se e solo se $u(x)$ è la funzione identicamente uguale a zero nell'intervallo $[0, 1]$.

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[0,1]$ e ν un numero complesso diverso da zero e non autovalore di (1)-(2). Ci proponiamo di ottenere formule di maggiorazione della soluzione di (1)-(2) e della sua derivata prima in funzione delle norme dei dati del problema (1)-(2); queste formule, però, hanno esclusivamente un valore teorico in quanto, nelle applicazioni, è più opportuno usare la (32) e la (33).

Si ha dalla (32)

$$(38)\qquad |u(x)| \leqslant |b_h v^{(h)}(x)| + \frac{1}{d} \max_{[0,1]} |c^{\frac12}(x)|^2 \max_{[0,1]} |f(y) - \nu b_k c(y) v^{(k)}(y)| \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 [\int_0^1 |G(y,t)|^2\, dt]^{\frac12} dy \, [\int_0^1 |G(x,\xi)|^2\, d\xi]^{\frac12} + \max_{[0,1]} |f(y) - \nu b_k c(y) v^{(k)}(y)| \int_0^1 |G(x,\xi)|\, d\xi \,.$$

Dalla (16) otteniamo (poichè $B(t) - B(\xi) = \int_\xi^t A(\tau)\, d\tau$)

$$[\int_0^1 |G(x,\xi)|^2\, d\xi]^{\frac12} = [\int_0^x | \{v_i^{(k)}(x) [\int_\xi^1 (\int_\xi^t A_{jh}(\tau)\, d\tau)\, d\alpha_{kj} + \int_\xi^1 A_{jh}(t)\, d\beta_{kj}] + \int_x^\xi A_{ih}(t)\, dt\}|^2\, d\xi +$$

$$+ \int_x^1 |\{v_i^{(k)}(x) [\int_\xi^1 (\int_\xi^t A_{jh}(\tau)\, d\tau)\, d\alpha_{kj} + \int_\xi^1 A_{jh}(t)\, d\beta_{kj}]\}|^2\, d\xi]^{\frac12} =$$

$$= [\int_0^x |\{v_i^{(k)}(x) [\int_\xi^1 A_{jh}(\tau)\, d\tau \int_\tau^1 d\alpha_{kj} + \int_\xi^1 A_{jh}(t)\, d\beta_{kj}] + \int_x^\xi A_{ih}(t)\, dt\}|^2\, d\xi +$$

$$+ \int_x^1 |\{v_i^{(k)}(x) [\int_\xi^1 A_{jh}(\tau)\, d\tau \int_\tau^1 d\alpha_{kj} + \int_\xi^1 A_{jh}(t)\, d\beta_{kj}]\}|^2\, d\xi]^{\frac12} \,.$$

Indichiamo con $V(x)$ la matrice $2n \times n$ $\{v_i^{(k)}(x)\}$ $(k = 1, \ldots, 2n;\ i = 1, \ldots, n)$, essendo i vettori $v^{(k)}(x)$ definiti dalla (10); si ha, se $\Phi = \{\Phi_{hk}\}$ $(h, k = 1, \ldots, 2n)$ e se $W(x)$ è la matrice definita dalla (7),

$$(39)\qquad V(x) = \Phi W(x)\,.$$

Indichiamo poi con $\|\alpha\| = \{\|\alpha_{kj}\|\}$ e con $\|\beta\| = \{\|\beta_{kj}\|\}$ le matrici $2n \times n$ i cui elementi $\|\alpha_{kj}\|$ e $\|\beta_{kj}\|$ $(k = 1, \ldots, 2n;\ j = 1, \ldots, n)$ sono, rispettivamente, la variazione totale della misura α_{kj} e della misura β_{kj} nell'intervallo $[0,1]$. Pertanto con $|||\alpha|||$ intendiamo la norma di Frobenius della matrice $\|\alpha\|$ e analogo significato diamo a $|||\beta|||$.

Posto $A = \{A_{ij}\} = \{\max_{[0,1]} |A_{ij}(x)|\}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, si ha

$$[\int_0^1 |G(x,\xi)|^2\, d\xi]^{\frac12} \leqslant \{[|V(x)|(|A|\ |||\alpha||| + |A|\ |||\beta|||) + |A|]^2 x +$$

$$+ [|V(x)|(|A|\ |||\alpha||| + |A|\ |||\beta|||)]^2 (1-x)\}^{\frac12} =$$

$$=\{|A|^2[|V(x)|(|||\alpha|||+|||\beta|||)+1]^2 x+|A|^2[|V(x)|(|||\alpha|||+|||\beta|||)]^2(1-x)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=|A|\{|V(x)|(|||\alpha|||+|||\beta|||)2x+x+|V(x)|^2(|||\alpha|||+|||\beta|||)^2\}^{\frac{1}{2}},$$

e quindi

$$[\int_0^1 |G(x,\xi)|^2 d\xi]^{\frac{1}{2}} \leqslant |A|[\max_{[0,1]} |V(x)|(|||\alpha|||+|||\beta|||)+1], \tag{40}$$

$$\int_0^1 |G(x,\xi)|d\xi \leqslant [\int_0^1 |G(x,\xi)|^2 d\xi]^{\frac{1}{2}} \leqslant |A|[\max_{[0,1]} |V(x)|(|||\alpha|||+|||\beta|||)+1]. \tag{41}$$

Segue pertanto, dalle (38), (39), (40) e (41):

$$|u(x)| \leqslant |b_h v^{(h)}(x)| + \frac{1}{d}\max_{[0,1]}|c^{\frac{1}{2}}(x)|^2 \max_{[0,1]}|f(y)-\nu b_k c(y) v^{(k)}(y)|\,|A|^2 \cdot$$
$$\cdot[|\Phi|\max_{[0,1]}|W(x)|(|||\alpha|||+|||\beta|||)+1]^2+$$
$$+|A|[|\Phi|\max_{[0,1]}|W(x)|(|||\alpha|||+|||\beta|||)+1]\max_{[0,1]}|f(y)-\nu b_k c(y) v^{(k)}(y)|.$$

Posto $b=(b_1,\ldots,b_{2n})$, si trae

$$\begin{aligned}|u(x)| \leqslant\; & |b|\,|\Phi|\max_{[0,1]}|W(x)| + \\ & + \Big\{\frac{1}{d}\max_{[0,1]}|c^{\frac{1}{2}}(x)|^2|A|^2\cdot[|\Phi|\max_{[0,1]}|W(x)|(|||\alpha|||+|||\beta|||)+1]^2+ \\ & + |A|[|\Phi|\max_{[0,1]}|W(x)|(|||\alpha|||+|||\beta|||)+1]\Big\}\cdot \\ & \cdot\{\max_{[0,1]}|f(y)|+|\nu|\max_{[0,1]}|c(y)|\,|b|\,|\Phi|\max_{[0,1]}|W(x)|\}\,(^5).\end{aligned} \tag{42}$$

---

(5) Per vedere che $\sum_{h=1}^{2n}|b_h v^{(h)}(x)| \leqslant |b|\,|\Phi|\,|W(x)|$ si proceda al modo seguente:

$$\sum_{h=1}^{2n}|b_h v^{(h)}(x)| = \sum_{h=1}^{2n}|b_h|\;|\sum_{k=1}^{2n}\Phi_{hk}w^{(k)}(x)| = \sum_{h=1}^{2n}|b_h|(\sum_{i=1}^{n}|\sum_{k=1}^{2n}\Phi_{hk}w_i^{(k)}(x)|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{h=1}^{2n}|b_h|\,[\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{2n}|\Phi_{hk}|^2)(\sum_{k=1}^{2n}|w_i^{(k)}(x)|^2)]^{\frac{1}{2}} = \sum_{h=1}^{2n}|b_h|(\sum_{k=1}^{2n}|\Phi_{hk}|^2)^{\frac{1}{2}}|W(x)|$$

$$\leqslant (\sum_{h=1}^{2n}|b_h|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{h=1}^{2n}(\sum_{k=1}^{2n}|\Phi_{hk}|^2))^{\frac{1}{2}}|W(x)| = |b|\,|\Phi|\,|W(x)|.$$

Seguendo lo stesso procedimento, si ottiene

$$(43)\quad |u'(x)| \leqslant |b|\,|\Phi| \max_{[0,1]} |W'(x)| + \Big\{\frac{1}{d} \max_{[0,1]} |c^{\frac12}(x)|\,|A|^2 \cdot$$

$$\cdot [|\Phi| \max_{[0,1]} |W(x)|\,(|||\alpha||| + |||\beta|||) + 1][|\Phi| \max_{[0,1]} |W'(x)|\,(|||\alpha||| + |||\beta|||) + 1] +$$

$$+ |A|\,[|\Phi| \max_{[0,1]} |W'(x)|\,(|||\alpha||| + |||\beta|||) + 1]\Big\} \cdot$$

$$\cdot \{\max_{[0,1]} |f(y)| + |\nu| \max_{[0,1]} |c(y)|\,|b|\,|\Phi| \max_{[0,1]} |W(x)|\}.$$

Dalla (32) e dalla (33) è poi facile ottenere delle formule di maggiorazione in media di ordine p della soluzione di (1)-(2) nell'ipotesi che $f(x)$ appartenga ad uno spazio $\mathscr{L}^r(0,1)$. Qui di seguito ci limitiamo a riportare tali formule nel caso $p=r$. Si assuma $q^{-1}=1-p^{-1}$ $(1\leqslant p<+\infty)$ e $\mathscr{L}^q=\mathscr{L}^\infty$ se $p=1$; si ha

$$(44)\quad \Big(\int_0^1 |u(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int_0^1 |b_h v^{(h)}(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} +$$

$$+ \Big(\int_0^1 \Big\{\int_0^1 \Big[\frac{1}{d}\Big(\int_0^1 |G(x,\xi)\,c^{\frac12}(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{\frac12} \cdot$$

$$\cdot \Big(\int_0^1 |G(y,t)\,c^{\frac12}(t)|^2\,dt\Big)^{\frac12} + |G(x,y)|\Big]^q dy\Big\}^{p/q} dx\Big)^{1/p} \Big(\int_0^1 |f(y) - \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)|^p\,dy\Big)^{1/p},$$

$$(45)\quad \Big(\int_0^1 |u'(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int_0^1 |b_h v^{(h)\prime}(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} +$$

$$+ \Big(\int_0^1 \Big\{\int_0^1 \Big[\frac{1}{d}\Big(\int_0^1 |G_x(x,\xi)\,c^{\frac12}(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{\frac12} \cdot$$

$$\cdot \Big(\int_0^1 |G(y,t)\,c^{\frac12}(t)|^2\,dt\Big)^{\frac12} + |G_x(x,y)|\Big]^q dy\Big\}^{p/q} dx\Big)^{1/p} \Big(\int_0^1 |f(y) - \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)|^p\,dy\Big)^{1/p}.$$

6. – Consideriamo il problema (1)-(2), nel quale i funzionali F_h $(h=1,\ldots,2n)$ siano così definiti

$$(46)\qquad F_1(u) = u_1(0),\ \ldots,\ F_n(u) = u_n(0),\ F_{n+1}(u) = u_1(1),\ \ldots,\ F_{2n}(u) = u_n(1)\,.$$

Supponiamo ancora che riesca $\det(F_h(w^{(k)})) \neq 0$, ove i vettori $w^{(k)}(x)$ sono definiti dalle (8) e (9). Pertanto il problema (1)-(2) diventa (*problema di Dirichlet*):

$$(a(x)u')' + \nu c(x)u = f(x)\,, \tag{47}$$

$$u_h(0) = b_h\,, \qquad u_k(1) = b_{n+k} \quad (h, k = 1, \dots, n)\,. \tag{48}$$

In questo caso la matrice $2n \times 2n$ $\{F_h(w^{(k)})\}$ $(h, k = 1, \dots, 2n)$ è data da

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & B(1) \end{pmatrix} \tag{49}$$

e quindi la sua inversa risulta essere la seguente

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -B^{-1}(1) & B^{-1}(1) \end{pmatrix}; \tag{50}$$

poichè la matrice Φ, trasposta della matrice (50) è data da

$$\Phi = \begin{pmatrix} I & -(B^{-1}(1))^* \\ 0 & (B^{-1}(1))^* \end{pmatrix}, \tag{51}$$

dalla (7) e dalla (10) si ottiene

$$v_i^{(j)}(x) = \delta_{ij} - B_{ih}(x)(B^{-1})_{hj}(1) = \delta_{ij} - [\int_0^x A(\tau)\,d\tau(\int_0^1 A(t)\,dt)^{-1}]_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n), \tag{52}$$

$$v_i^{(n+j)}(x) = B_{ih}(x)\,(B^{-1})_{hj}(1) = [\int_0^x A(\tau)\,d\tau\,(\int_0^1 A(t)\,dt)^{-1}]_{ij} \qquad (i, j = 1, \dots, n). \tag{53}$$

Con facili calcoli si può dimostrare che la matrice di Green del problema (3)-(4) è data da

$$G(x, \xi) \begin{cases} = B(\xi) - B(x)B^{-1}(1)B(\xi)\,, & x \geqslant \xi \\ \\ = B(x) - B(x)B^{-1}(1)B(\xi)\,, & x \leqslant \xi\,. \end{cases} \tag{54}$$

Usando la (54), la (32) e la (33) possono essere scritte in modo da evidenziare in maniera più esplicita la dipendenza della incognita dai dati. A tale scopo si osservi che dalla (32) e dalla (54) risulta

$$
\begin{aligned}
|u(x)| \leqslant {} & |b_h v^{(h)}(x)| + \frac{1}{d}\Big[\int_0^x |(B(\xi) - B(x)B^{-1}(1)B(\xi))\, c^{\frac{1}{2}}(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi + \\
& + \int_x^1 |(B(x) - B(x)B^{-1}(1)B(\xi))\, c^{\frac{1}{2}}(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi\Big]^{\frac{1}{2}} \cdot \int_0^1 \Big[\int_0^y |(B(t) - B(y)B^{-1}(1)B(t))\, c^{\frac{1}{2}}(t)|^2\, \mathrm{d}t + \\
& + \int_y^1 |(B(y) - B(y)B^{-1}(1)B(t))\, c^{\frac{1}{2}}(t)|^2\, \mathrm{d}t\Big]^{\frac{1}{2}} |f(y) - \nu b_h\, c(y)\, v^{(h)}(y)|\, \mathrm{d}y + \\
& + \int_0^x |B(y) - B(x)B^{-1}(1)B(y)|\, |f(y) - \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)|\, \mathrm{d}y + \\
& + \int_x^1 |B(x) - B(x)B^{-1}(1)B(y)|\, |f(y) - \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)|\, \mathrm{d}y = \\
= {} & |b_h v^{(h)}(x)| + \frac{1}{d}\Big[\int_0^x |[B(1) - B(x)]\, B^{-1}(1)B(\xi)\, c^{\frac{1}{2}}(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi + \\
& \int_x^1 |B(x)B^{-1}(1)[B(1) - B(\xi)]\, c^{\frac{1}{2}}(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi\Big]^{\frac{1}{2}} \cdot \int_0^1 \Big[\int_0^y |[B(1) - B(y)]\, B^{-1}(1)B(t)\, c^{\frac{1}{2}}(t)|^2\, \mathrm{d}t + \\
& + \int_y^1 |B(y)B^{-1}(1)[B(1) - B(t)]\, c^{\frac{1}{2}}(t)|^2\, \mathrm{d}t\Big]^{\frac{1}{2}} |f(y) - \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)|\, \mathrm{d}y + \\
& + \int_0^x |[B(1) - B(x)]\, B^{-1}(1)B(y)|\, |f(y) - \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)|\, \mathrm{d}y + \\
& + \int_x^1 |B(x)B^{-1}(1)[B(1) - B(y)]|\, |f(y) - \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)|\, \mathrm{d}y\,.
\end{aligned}
$$

Essendo poi $B(x) = \int_0^x A(\tau)\, \mathrm{d}\tau$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
(55) \quad |u(x)| \leqslant {} & |b_h v^{(h)}(x)| + \frac{1}{d}\Bigg[\int_0^x \Bigg| \int_x^1 A(\tau)\, \mathrm{d}\tau \left(\int_0^1 A(t)\, \mathrm{d}t\right)^{-1} \int_0^\xi A(s)\, \mathrm{d}s\, c^{\frac{1}{2}}(\xi)\Bigg|^2 \mathrm{d}\xi + \\
& + \int_x^1 \Big| \int_0^x A(t)\, \mathrm{d}t\, \Big(\int_0^1 A(s)\, \mathrm{d}s\Big)^{-1} \int_\xi^1 A(\tau)\, \mathrm{d}\tau\, c^{\frac{1}{2}}(\xi)\Big|^2 \mathrm{d}\xi\Bigg]^{\frac{1}{2}} \cdot \\
& \cdot \int_0^1 \Big[\int_0^y \Big| \int_y^1 A(\tau)\, \mathrm{d}\tau\, \Big(\int_0^1 A(s)\, \mathrm{d}s\Big)^{-1} \int_0^t A(\tau)\, \mathrm{d}\tau\, c^{\frac{1}{2}}(t)\Big|^2 \mathrm{d}t + \\
& + \int_y^1 \Big| \int_0^y A(\tau)\, \mathrm{d}\tau\, \Big(\int_0^1 A(s)\, \mathrm{d}s\Big)^{-1} \int_t^1 A(\xi)\, \mathrm{d}\xi\, c^{\frac{1}{2}}(t)\Big|^2 \mathrm{d}t\Big]^{\frac{1}{2}} |f(y) - \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)|\, \mathrm{d}y + \\
& + \int_0^x \Big| \int_x^1 A(\tau)\, \mathrm{d}\tau\, \Big(\int_0^1 A(s)\, \mathrm{d}s\Big)^{-1} \int_0^y A(t)\, \mathrm{d}t \Big|\, |f(y) - \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)|\, \mathrm{d}y + \\
& + \int_x^1 \Big| \int_0^x A(\tau)\, \mathrm{d}\tau\, \Big(\int_0^1 A(s)\, \mathrm{d}s\Big)^{-1} \int_y^1 A(t)\, \mathrm{d}t \Big|\, |f(y) - \nu b_h c(y) v^{(h)}(y)|\, \mathrm{d}y\,,
\end{aligned}
$$

ove le funzioni $v^{(k)}(x)$ $(k = 1, \ldots, 2n)$ sono definite dalle (52) e (53).

Essendo

$$G_x(x,\xi)\begin{cases} = -A(x)B^{-1}(1)B(\xi)\,, & x \geqslant \xi \\ \\ = A(x)-A(x)B^{-1}(1)B(\xi) & x \leqslant \xi\,, \end{cases}$$

la derivata prima della funzione $u(x)$, per la (33), può così essere maggiorata:

$$|u'(x)| \leqslant |b_h v^{(h)\prime}(x)| + \frac{1}{d}\left[\int_0^x |A(x)B^{-1}(1)B(\xi)c^{\frac12}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\,+\right.$$

$$\left. + \int_x^1 |(A(x)-A(x)B^{-1}(1)B(\xi))\,c^{\frac12}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right] \int_0^1 \Big[\int_0^y |(B(t)-B(y)\,B^{-1}(1)B(t))\,c^{\frac12}(t)|^2\,\mathrm{d}t\,+$$

$$+ \int_y^1 |(B(y)-B(y)B^{-1}(1)B(t))\,c^{\frac12}(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big]^{\frac12}\,|f(y)-\nu b_k\,c(y)\,v^{(k)}(y)|\,\mathrm{d}y\,+$$

$$+ \int_0^x |A(x)B^{-1}(1)B(y)|\;|f(y)-\nu b_k\,c(y)\,v^{(k)}(y)|\,\mathrm{d}y\,+$$

$$+ \int_x^1 |A(x)-A(x)B^{-1}(1)B(y)|\;|f(y)-\nu b_k\,c(y)\,v^{(k)}(y)|\,\mathrm{d}y\,,$$

e quindi

$$(56)\quad |u'(x)| \leqslant |b_h v^{(h)\prime}(x)| + \frac{1}{d}\left\{\int_0^x \left|A(x)\left(\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1}\int_0^\xi A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,c^{\frac12}(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi\,+\right.$$

$$\left. + \int_x^1 |A(x)|(\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t)^{-1}\int_\xi^1 A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,c^{\frac12}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right\}^{\frac12}\cdot$$

$$\cdot \int_0^1 \Big[\int_0^y |\int_y^1 A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,(\int_0^1 A(\tau)\mathrm{d}\tau)^{-1}\int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s\,c^{\frac12}(t)|^2\,\mathrm{d}t\,+$$

$$+ \int_y^1 |\int_0^y A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,(\int_0^1 A(\tau)\,\mathrm{d}\tau)^{-1}\int_t^1 A(s)\,\mathrm{d}s\,c^{\frac12}(t)\,|^2\,\mathrm{d}t\Big]^{\frac12}\,|f(y)-\nu b_k\,c(y)\,v^{(k)}(y)|\,\mathrm{d}y\,+$$

$$+ \int_0^x |\,A(x)\,(\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t)^{-1}\int_0^y A(\tau)\,\mathrm{d}\tau|\;\;|f(y)-\nu b_k\,c(y)\,v^{(k)}(y)|\,\mathrm{d}y\,+$$

$$+ \int_x^1 |A(x)\,(\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t)^{-1}\int_y^1 A(\tau)\,\mathrm{d}\tau|\;\;|f(y)-\nu b_k\,c(y)\,v^{(k)}(y)|\,\mathrm{d}y,$$

ove ovviamente

$$(57)\qquad v_i^{(j)\prime}(x) = -B'_{ih}(x)(B^{-1})_{hj}(1) = -\left[A(x)\left(\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1}\right]_{ij} \qquad (i, j = 1, \dots, n)\,,$$

$$(58)\qquad v_i^{(n+j)\prime}(x) = B'_{ih}(x)(B^{-1})_{hj}(1) = \left[A(x)\left(\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1}\right]_{ij} \qquad (i, j = 1, \dots, n)\,.$$

7. – Nello studiare il problema delle maggiorazioni della soluzione di (1)-(2) ci siamo messi nel caso in cui la matrice $c(x)$ era semidefinita positiva; vogliamo ora prendere in esame anche il caso in cui $c(x)$ è soltanto hermitiana.

Consideriamo pertanto il problema (1)-(2) *supponendo* $c(x)$ *hermitiana e mantenendo tutte le altre ipotesi del teorema* V.

Poichè $c(x)$ è hermitiana possiamo scrivere $c(x) = c_+(x) + c_-(x)$, avendo indicato con $c_+(x)$ la parte positiva di $c(x)$ e con $c_-(x)$ la parte negativa.

Supponiamo di conoscere un numero positivo p che non sia autovalore di

$$(59)\qquad (a(x)u')' + \nu[c_+(x) + pI]u = 0\,,$$

$$(60)\qquad F_k(u) = 0 \qquad (k = 1, \dots, 2n)\,.$$

Sappiamo allora dal teorema I che esiste una ed una sola soluzione di

$$(61)\qquad (a(x)u')' + \nu(c_+(x) + pI)\,u = h(x)\,,$$

$$(62)\qquad F_k(u) = b_k \qquad (k = 1, \dots, 2n)\,,$$

che, indicata con $P(x)$ la matrice $c_+(x) + pI$, è data da (cfr. (27) e (28))

$$(63)\qquad u(x) = b_k v^{(k)}(x) + \nu b_k \int_0^1 \Gamma(x, y)P(y)\,v^{(k)}(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \Gamma(x, y)h(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

essendo

$$(64)\qquad \Gamma_{ij}(x, y) = G_{ij}(x, y) + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\mu - \tilde{\mu}_h} \overline{\int_0^1 G_{jl}(y, t)(P^{\frac12})_{lm}(t)\,\tilde{\psi}_{hm}(t)\,\mathrm{d}t} \int_0^1 G_{ik}(x, \xi)(P^{\frac12})_{k\varrho}(\xi)\,\tilde{\psi}_{h\varrho}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,,$$

$(i, j = 1, \dots, n)$, $\mu = \nu^{-1}$, ed essendo $\tilde{\mu}_h$ [6] $(h = 1, 2, \dots)$ tali che

$$\int_0^1 P^{\frac12}(y)\,G(y, t)\,P^{\frac12}(t)\,\tilde{\psi}_h(t)\,\mathrm{d}t = \tilde{\mu}_h \tilde{\psi}_h(y)\,,$$

[6] L'ordinamento dei $\tilde{\mu}_h$ $(h = 1, 2, \dots)$ deve intendersi nel senso già indicato a pag. 10.

ove $\{\tilde{\psi}_h(x)\}$ rappresenta un sistema, completo, di autofunzioni linearmente indipendenti e $P^{\frac{1}{2}}(y)$ è la radice quadrata positiva ed hermitiana di $P(y)$. Si osservi che la condizione p non autovalore di (59)-(60) ci assicura $\mu - \tilde{\mu}_h \neq 0$ per ogni $h = 1, 2, \ldots$.

Posto

$$w(x) = b_k v^{(k)}(x) + \nu b_k \int_0^1 \Gamma(x, y) P(y)\, v^{(k)}(y)\, dy\,, \tag{65}$$

la (63) assume la forma

$$u(x) = w(x) - \int_0^1 \Gamma(x, y)\, h(y)\, dy\,. \tag{66}$$

Vogliamo notare che, se ν, oltre a verificare l'ipotesi di non essere autovalore di (1)-(2), è un numero reale (non nullo), riesce, per il teorema IV, $\Gamma(x, y) = \overline{\Gamma(y, x)}$ per ogni x e y appartenenti a $[0, 1]$.

Poniamo $N(x) = pI - c_-(x)$ e

$$q(x) = f(x) + \nu N(x)\, w(x)\,; \tag{67}$$

se sostituiamo la (66) nella

$$(a(x)u')' + \nu[c_+(x) + pI]u - \nu[pI - c_-(x)]u = f(x)\,, \tag{68}$$

si ottiene

$$h(x) + \nu \int_0^1 N(x)\Gamma(x, y)\, h(y)\, dy = q(x)\,; \tag{69}$$

poichè ν non è autovalore di (1)-(2), la (68) ammette una ed una sola soluzione verificante la (2), e quindi anche la (69), equivalente a (1)-(2), ammette una ed una sola soluzione.

Ci proponiamo di trasformare la (69) in un'equazione integrale vettoriale che abbia il nucleo hermitiano. Allo scopo indicato, poniamo, per ogni x appartenente a $[0, 1]$: $h(x) = N^{\frac{1}{2}}(x)\, r(x)$ essendo $N^{\frac{1}{2}}(x)$ l'unica radice quadrata positiva ed hermitiana di $N(x)$. La (69) assume quindi la forma

$$N^{\frac{1}{2}}(x)\, r(x) + \nu \int_0^1 N(x)\,\Gamma(x, y)\, N^{\frac{1}{2}}(y)\, r(y)\, dy = q(x)\,,$$

la quale, moltiplicata per $N^{-\frac{1}{2}}(x)$, inversa della matrice $N^{\frac{1}{2}}(x)$, diviene

$$(70) \qquad \mu r(x) + \int_0^1 N^{\frac{1}{2}}(x)\,\Gamma(x, y)\,N^{\frac{1}{2}}(y)\,r(y)\,\mathrm{d}y = \mu[pI - c_-(x)]^{-\frac{1}{2}}\,q(x)\,.$$

La (70) è un'equazione di Fredholm il cui nucleo è dato da

$$(71) \qquad N^{\frac{1}{2}}(x)\,\Gamma(x, y)\,N^{\frac{1}{2}}(y)\,;$$

per quanto in precedenza osservato nel caso di ν reale (non nullo) la matrice (71) è hermitiana.

Indichiamo con σ_h (7) $(h = 1, 2, \ldots)$ gli autovalori di

$$(72) \qquad \sigma r(x) + \int_0^1 N^{\frac{1}{2}}(x)\,\Gamma(x, y)\,N^{\frac{1}{2}}(y)\,r(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

e con $\{r_h(x)\}$ un corrispondente sistema di autofunzioni linearmente indipendenti che sia inoltre completo.

Con queste notazioni la (70) può essere scritta al modo seguente:

$$\mu \sum_{h=1}^{\infty} (r, r_h)\,r_h(x) - \sum_{h=1}^{\infty} \sigma_h (r, r_h)\,r_h = \mu \sum_{h=1}^{\infty} (N^{-\frac{1}{2}} q, r_h)\,r_h(x)$$

e quindi si deve avere:

$$(r, r_h) = \frac{\mu(N^{-\frac{1}{2}} q, r_h)}{\mu - \sigma_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots)\,.$$

Pertanto risulta

$$r(x) = \sum_{h=1}^{\infty} (r, r_h)\,r_h(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu(N^{-\frac{1}{2}} q, r_h)}{\mu - \sigma_h}\,r_h(x)$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ \frac{\mu\,(N^{-\frac{1}{2}} q, r_h)}{\mu - \sigma_h} - (N^{-\frac{1}{2}} q, r_h) \right\} r_h(x) + N^{-\frac{1}{2}}(x)\,q(x)$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sigma_h (N^{-\frac{1}{2}} q, r_h)}{\mu - \sigma_h}\,r_h(x) + N^{-\frac{1}{2}}(x)\,q(x)$$

---

(7) Confronta la nota (6).

Essendo $h(x) = N^{\frac{1}{2}}(x)\, r(x)$ e $u(x) = w(x) - \int_0^1 \Gamma(x, y)\, h(y)\, dy$ si ottiene

$$h(x) = N^{\frac{1}{2}}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j(N^{-\frac{1}{2}} q, r_j)}{\mu - \sigma_j} r_j(x) + q(x)\,,$$

(72) $$u(x) = w(x) - \int_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j(N^{-\frac{1}{2}} q, r_j)}{\mu - \sigma_j}\, \Gamma(x, \xi)\, N^{\frac{1}{2}}(\xi)\, r_j(\xi)\, d\xi - \int_0^1 \Gamma(x, \xi)\, q(\xi)\, d\xi\,.$$

Tenendo conto della (72) nonchè del fatto che risulta

$$\int_0^1 N^{\frac{1}{2}}(y)\, \Gamma(y, t)\, N^{\frac{1}{2}}(t)\, r_h(t)\, dt = -\sigma_h r_h(y) \qquad (h = 1, 2, \ldots)\,,$$

si ottiene

$$u(x) = w(x) + \int_0^1 \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\mu - \sigma_h} \int_0^1 N^{-\frac{1}{2}}(y)\, q(y) \left[\int_0^1 N^{\frac{1}{2}}(y)\, \Gamma(y, t)\, N^{\frac{1}{2}}(t)\, r_h(t)\, dt \right] dy \cdot \right.$$
$$\left. \cdot\, \Gamma(x, \xi)\, N^{\frac{1}{2}}(\xi)\, r_h(\xi) \right\} d\xi - \int_0^1 \Gamma(x, \xi)\, q(\xi)\, d\xi\,.$$

Dall'essere $N^{\frac{1}{2}}(y)$ hermitiana segue poi che

$$u(x) = w(x) + \int_0^1 \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\mu - \sigma_h} \int_0^1 q(y) \left[\int_0^1 \Gamma(y, t)\, N^{\frac{1}{2}}(t)\, r_h(t)\, dt \right] dy \cdot \right.$$
$$\left. \cdot\, \Gamma(x, \xi)\, N^{\frac{1}{2}}(\xi)\, r_h(\xi) \right\} d\xi - \int_0^1 \Gamma(x, \xi)\, q(\xi)\, d\xi$$

e quindi, con classica giustificazione del passaggio formale,

(73) $$u(x) = w(x) + \int_0^1 \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\mu - \sigma_h} \left[q(y) \int_0^1 \Gamma(y, t)\, N^{\frac{1}{2}}(t)\, r_h(t)\, dt \right] \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \int_0^1 \Gamma(x, \xi)\, N^{\frac{1}{2}}(\xi)\, r_h(\xi)\, d\xi \right\} dy - \int_0^1 \Gamma(x, \xi)\, q(\xi)\, d\xi\,.$$

Indichiamo con $R(x, y)$ la matrice $n \times n$ così definita

$$R_{ij}(x, y) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\mu - \sigma_h} \overline{\left\{ \int_0^1 \Gamma_{jl}(y, t) (N^{\frac{1}{2}})_{lm}(t)\, r_{hm}(t)\, dt \right\}} \left\{ \int_0^1 \Gamma_{ik}(x, \xi) (N^{\frac{1}{2}})_{k\varrho}(\xi)\, r_{h\varrho}(\xi)\, d\xi \right\}\,,$$

ove: $i, j = 1, \ldots, n$; $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$.

Vogliamo osservare circa la matrice $\Gamma(x, y) - R(x, y)$ quanto segue:

VIII. *Il teorema* IV *continua a sussistere supponendo soltanto la matrice* $c(x)$ *hermitiana e mantenendo tutte le altre ipotesi.*

Si ha pertanto, nelle ipotesi che assicurano la hermitianità di $\Gamma(x, y)$ che la matrice di Green $\Gamma(x, y) - R(x, y)$ del problema (1)-(2) è hermitiana.

Per maggiorare la funzione $u(x)$ data dalla (73) applichiamo il procedimento seguito per pervenire alla (32). Posto $\delta = \inf |\mu - \sigma_h|$ si ha:

$$|R_{ij}(x, y)| \leqslant \frac{1}{\delta} \sum_{h=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \Gamma_{jl}(y, t)(N^{\frac{1}{2}})_{lm}(t) r_{hm}(t)\, dt \right| \left| \int_0^1 \Gamma_{ik}(x, \xi)(N^{\frac{1}{2}})_{k\varrho}(\xi) r_{h\varrho}(\xi)\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta} \left(\sum_{h=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \Gamma_{jl}(y, t)(N^{\frac{1}{2}})_{lm}(t) r_{hm}(t)\, dt \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{h=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \Gamma_{ik}(x, \xi)(N^{\frac{1}{2}})_{k\varrho}(\xi) r_{h\varrho}(\xi)\, d\xi \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Essendo completo il sistema $\{r_h(x)\}$, dalla formula di Bessel si ottiene

$$|R_{ij}(x, y)| \leqslant \frac{1}{\delta} \left(\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{jl}(y, t)(N^{\frac{1}{2}})_{lk}(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{il}(x, \xi)(N^{\frac{1}{2}})_{lk}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}};$$

si ha pertanto

$$|u(x)| \leqslant |w(x)| + \int_0^1 |R(x, y)|\, |q(y)|\, dy + \int_0^1 |\Gamma(x, y)|\, |q(y)|\, dy$$

$$= |w(x)| + \int_0^1 \left(\sum_{i,j}^{1,n} |R_{ij}(x, y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |q(y)|\, dy + \int_0^1 |\Gamma(x, y)|\, |q(y)|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant |w(x)| + \frac{1}{\delta} \int_0^1 \left\{ \sum_{i,j}^{1,n} \left(\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{jl}(y, t)(N^{\frac{1}{2}})_{lk}(t) \right|^2 dt \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{il}(x, \xi)(N^{\frac{1}{2}})_{lk}(\xi) \right|^2 d\xi \right) \right\}^{\frac{1}{2}} |q(y)|\, dy + \int_0^1 |\Gamma(x, y)|\, |q(y)|\, dy .$$

Sussiste quindi la seguente formula di maggiorazione per la funzione $u(x)$:

$$|u(x)| \leqslant |w(x)| + \int_0^1 \left\{ \left[\frac{1}{\delta} \left(\int_0^1 |\Gamma(y, t)\, N^{\frac{1}{2}}(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 |\Gamma(x, \xi) N^{\frac{1}{2}}(\xi)|^2\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right] + |\Gamma(x, y)| \right\} |q(y)|\, dy . \tag{74}$$

Tenendo presenti la (65) e la (67) si trae

$$(75)\qquad |u(x)|\leqslant |b_k v^{(k)}(x)+\nu b_h \int_0^1 \Gamma(x,y)P(y)v^{(h)}(y)\,dy|+$$

$$+\int_0^1\left\{\left[\frac{1}{\delta}\left(\int_0^1|\Gamma(y,t)\;N^{\frac12}(t)|^2\,dt\right)^{\frac12}\left(\int_0^1|\Gamma(x,\xi)N^{\frac12}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac12}\right]+|\Gamma(x,y)|\right\}\cdot$$

$$\cdot\;|f(y)+\nu N(y)\,(b_k v^{(k)}(y)+\nu b_h\int_0^1\Gamma(y,t)\,P(t)\,v^{(h)}(t)\,dt)\,|\,dy,$$

e quindi

$$(76)\quad |u(x)|\leqslant|b_k v^{(k)}(x)|+|\nu b_h|\int_0^1|\Gamma(x,y)|\,|P(y)|\,|v^{(h)}(y)|\,dy+$$

$$+\int_0^1\left\{\left[\frac{1}{\delta}\left(\int_0^1|\Gamma(y,t)|^2|N^{\frac12}(t)|^2\,dt\right)^{\frac12}\left(\int_0^1|\Gamma(x,\xi)|^2|N^{\frac12}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac12}\right]+\right.$$

$$\left.+\,|\Gamma(x,y)|\right\}\left\{|f(y)+\nu N(y)\,b_k v^{(k)}(y)|+|\nu|^2|b_h|\,|N(y)|\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^1|\Gamma(y,t)|\,|P(t)|\,|v^{(h)}(t)|\,dt\right\}\,dy\,.$$

Procedendo in modo analogo a quello seguito per maggiorare $|R(x,y)|$ si ottiene la seguente diseguaglianza (cfr. la (64))

$$(77)\quad |\Gamma(x,y)|\leqslant\frac{1}{\tilde\delta}\left(\int_0^1|G(y,t)P^{\frac12}(t)|^2\,dt\right)^{\frac12}\left(\int_0^1|G(x,\xi)P^{\frac12}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac12}+|G(x,y)|,$$

essendo $\tilde\delta=\inf|\mu-\tilde\mu_h|$.

Si può pertanto concludere che per la soluzione $u(x)$ di (1)-(2) sussiste la formula di maggiorazione (76) potendosi maggiorare $|\Gamma(x,y)|$ per mezzo della (77).

Possiamo infine dare una formula di maggiorazione del modulo della derivata prima della soluzione di (1)-(2):

$$(78)\quad |u'(x)|\leqslant|b_k v^{(k)\prime}(x)|+|\nu b_h|\int_0^1|\Gamma_x(x,y)|\,|P(y)|\,|v^{(h)}(y)|\,dy+$$

$$+\int_0^1\left\{\left[\frac{1}{\delta}\left(\int_0^1|\Gamma(y,t)|^2|N^{\frac12}(t)|^2\,dt\right)^{\frac12}\left(\int_0^1|\Gamma_x(x,\xi)|^2|N^{\frac12}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac12}\right]+\right.$$

$$\left.+\,|\Gamma_x(x,y)|\right\}\left\{|f(y)+\nu N(y)\,b_k v^{(k)}(y)|+|\nu|^2|b_h|\,|N(y)|\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^1|\Gamma(y,t)|\,|P(t)|\,|v^{(h)}(t)|\,dt\right\}\,dy\,.$$

8. – Ci sembra non privo di interesse considerare alcuni esempi numerici.

Assumiamo $n=1$, $a(x)\equiv 1$, $c(x)\equiv 1$, $\nu=-1$, $F_1(u)=u(0)$, $F_2(u)=u(1)$, $f(x)\equiv 1$, $b_1=b_2=0$, talchè il problema in esame diviene

$$u''-u=1\,, \tag{79}$$

$$u(0)=u(1)=0\,. \tag{80}$$

Poichè la soluzione di (79)-(80) è data da

$$u(x)=\frac{1}{e+1}\,e^{x}+\frac{e}{e+1}\,e^{-x}-1\,, \tag{81}$$

si può facilmente constatare che risulta

$$\max_{[0,1]}|u(x)|=1-\frac{2\sqrt{2}}{e+1}\simeq 0.1132\,. \tag{82}$$

Se applichiamo al problema (79)-(80) la (32) nella quale (cfr. VII) possiamo prendere $d=1$, si ha

$$|u(x)|\leqslant\int_0^1\Big\{|G(x,y)|+\Big(\int_0^1|G(y,t)|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^1|G(x,\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac12}\Big\}\,\mathrm{d}y\,. \tag{83}$$

Poichè la funzione di Green del problema $u''=\varphi(x)$, $u(0)=u(1)=0$, è data da

$$G(x,\xi)\begin{cases}=\xi(1-x) & x\geqslant\xi\\[2mm] =(1-\xi)x & x\leqslant\xi\,,\end{cases}$$

e poichè risulta $\int_0^1|G(x,\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi=(x^2(1-x)^2)/3$, dalla (83) si trae: $|u(x)|\leqslant(5/9)\cdot(1-x)x$, e quindi $\max_{[0,1]}|u(x)|\leqslant 5/36\simeq 0.1388$.

Se applichiamo al problema (79)-(80) la II di pag. 529 di [**5**]$_3$, si ottiene: $\max_{[0,1]}|u(x)|\leqslant 0.25$.

Vogliamo ora confrontare, anche se in un caso particolare, la formula di maggiorazione (44), per $p=2$, con quella relativa che trovasi in [**2**].

Prendiamo in esame il sistema

$$(85)\qquad \begin{cases} 2u_1'' + u_2'' - u_1 = f_1(x) \\ u_1'' + 2u_2'' - u_2 = f_2(x)\,, \end{cases}$$

$$(86)\qquad \begin{cases} u_1(0) = u_1(1) = 0 \\ u_2(0) = u_2(1) = 0\,. \end{cases}$$

Pertanto con le nostre notazioni è

$$a(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad c(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \nu = -1\,.$$

La matrice di Green è in questo caso data dalla (54)

$$G(x,\xi) \begin{cases} = B(\xi) - B(x)B^{-1}(1)B(\xi) & x \geqslant \xi \\ = B(x) - B(x)B^{-1}(1)B(\xi) & x \leqslant \xi\,, \end{cases}$$

ed essendo

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad B(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\xi & -\frac{1}{3}\xi \\ -\frac{1}{3}\xi & \frac{2}{3}\xi \end{pmatrix},$$

risulta $(i, j = 1, 2)$

$$G_{ij}(x,\xi) \begin{cases} = A_{ij}(x)\xi(1-x) & x \geqslant \xi \\ = A_{ij}(x)x(\xi-1) & x \leqslant \xi\,. \end{cases}$$

La (44) assume ora la forma

$$\|u\| \leqslant \Bigl(\int_0^1\Bigl\{\int_0^1\Bigl[\Bigl(\int_0^1 |G(x,\xi)|^2\, d\xi\Bigr)^{\frac{1}{2}}\Bigl(\int_0^1 |G(y,t)|^2\, dt\Bigr)^{\frac{1}{2}} + |G(x,y)|\Bigr]^2 dy\Bigr\} dx\Bigr)^{\frac{1}{2}} \|f\|\,.$$

Poichè con calcoli elementari si ottiene

$$\left(\int_0^1 |G(x,\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}\,x(1-x)\,, \qquad |G(x,y)| \begin{cases} = \dfrac{\sqrt{10}}{3}\,y(1-x) & x \geqslant y \\[2ex] = \dfrac{\sqrt{10}}{3}\,x(1-y) & y \leqslant x\,, \end{cases}$$

riesce

$$\|u\|^2 \leqslant \left\{ \int_0^1 \int_0^x \left[\frac{10}{27}\,x(1-x)y(1-y) + \frac{\sqrt{10}}{3}\,y(1-x)\right]^2 dy\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \int_x^1 \left[\frac{10}{27}\,x(1-x)\,y(1-y) + \frac{\sqrt{10}}{3}\,x(1-y)\right]^2 dy\,dx\right\} \|f\|^2 =$$

$$= \left[\frac{10}{3^7}\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx + \frac{20}{27}\int_0^1 x^3(1-x)^2\,dx + \right.$$

$$\left. + \frac{40\sqrt{10}}{81}\int_0^1 x(1-x)^2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)dx\right] \|f\|^2 =$$

$$= \left(\frac{3^4+1}{3^8} + \frac{17\sqrt{10}}{3^6\cdot 7\cdot 4}\right)\|f\|^2\,,$$

e quindi

$$\|u\| \leqslant 0.1231\,\|f\|\,.$$

Un'applicazione della formula (20), pag. 76 di [**2**] fornisce invece la seguente maggiorazione per la soluzione del sistema (85)-(86):

$$\|u\| \leqslant \frac{16}{9}\,(e-1)\,\|f\| \simeq 3.0547\,\|f\|\,.$$

Bibliografia.

[1] N. Cioranescu, *Sur l'integration des équations différentielles linéaires avec les conditions linéaires les plus générales*, Buletinul Facultatii de Stinze din Cernauti **5** (1931).

[2] M. P. Colautti, *Sulla maggiorazione « a priori » delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari ordinarie del secondo ordine*, Matematiche **11** (1956).

[3] G. Fichera: $[\cdot]_1$ *Lezioni sulla teoria spettrale degli operatori*, Istituto Matematico « Guido Castelnuovo », Università degli Studi, Roma 1969; $[\cdot]_2$ *Lezioni sulle trasformazioni lineari* - vol. I, Ist. di Matem. Univ. Trieste 1954; $[\cdot]_3$ *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, Lecture Notes in Mathem. **8**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1965; $[\cdot]_4$ *Operatori di Riesz-Fredholm. Operatori riducibili. Equazioni integrali singolari. Applicazioni*, Corso di Analisi Superiore 1963-64, Ist. Mat. « Guido Castelnuovo », Università degli Studi, Roma.

[4] N. Kryloff, *Les méthodes de solution approchée des problèmes de la Physique Mathématique*, Mémorial des Sciences Math. (Fascicule XLIX), Paris, Gauthier-Villars, Paris 1931.

[5] M. Picone: $[\cdot]_1$ *Equazione integrale traducente il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **15** (1932); $[\cdot]_2$ *I teoremi d'esistenza per gli integrali di una equazione differenziale ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **17** (1908); $[\cdot]_3$ *Sulle autosoluzioni e sulle formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali lineari autoaggiunte*, Math. Z. **28** (1928).

[6] C. Pucci, *Formule di maggiorazione per un integrale di una equazione differenziale lineare del secondo ordine*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **33** (1952).

Summary.

General boundary value problems for linear ordinary differential equations of second order are considered. Estimates of the unknown vector-valued function and its derivative, in terms of the « data », are obtained. These results extend to systems and improve the kind of estimates given for a scalar equation by Kryloff, Picone, Colautti and others.

* * *