Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1976), 315-320

PATRIZIA LONGOBARDI e MERCEDE MAJ (*)

Su di un teorema di Heineken. (**)

1. – I sottogruppi normali di un gruppo G costituiscono un sottoreticolo modulare $n(G)$ del reticolo $l(G)$ di tutti i sottogruppi di G. Se G è un p-gruppo e se $n(G) \simeq n(H)$, ci si può chiedere quando H è necessariamente un p-gruppo; in tale ordine di idee H. Heineken [**5**] ha ottenuto i risultati che seguono.

Teorema A (cfr. [**5**], Satz 1). Siano: G un p-gruppo finito non ciclico, H un gruppo finito con derivato H' nilpotente. Se $n(G) \simeq n(H)$, H ha lo stesso ordine di G.

Teorema B (cfr. [**5**], Satz 2). Siano: G un p-gruppo finito con classe di nilpotenza 2, H un gruppo risolubile finito. Se $n(G) \simeq n(H)$, H ha lo stesso ordine di G.

Il Teorema A è stato opportunamente esteso al caso infinito da A. Franchetta e F. Tuccillo ([**4**], Teorema 1); del Teorema B si ottengono qui le generalizzazioni seguenti.

Teorema B_1. *Siano: G un p-gruppo nilpotente di classe 2 e a derivato ridotto, H un gruppo risolubile. Se $n(G) \simeq n(H)$, H è un p-gruppo ipercentrale equipotente a G.*

Teorema B_2. *Siano: G un p-gruppo nilpotente di classe 2, H un gruppo risolubile ed ipofinito. Se $n(G) \simeq n(H)$, H è un p-gruppo ipercentrale equipotente a G.*

Il Teorema B_1 viene dimostrato indipendentemente dal Teorema B, di quest'ultimo si fa però uso nella prova di B_2.

(*) Indirizzo degli Autori: P. Longobardi, Via Orsi 15/A, 80128 Napoli, Italia; M. Maj, Corso Europa 72, 80127 Napoli, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) - Ricevuto: 27-IX-1976.

2. – Si premettono alcuni lemmi utilizzati negli sviluppi successivi (per ciò che concerne nomenclatura e notazioni, si rimanda a [**8**]).

Lemma 1. *Sia G un gruppo ipocentrale e non localmente ciclico. Allora G/G' non è localmente ciclico* ([1]).

Dim. Negando la tesi, sia G/G' localmente ciclico e quindi (cfr. [**7**], corollario 2.11) riesce $[G, G'] = G'$; da ciò e dall'ipocentralità di G discende $G' = 1$, onde G è localmente ciclico (contro l'ipotesi).

Lemma 2. *Sia G un p-gruppo nilpotente e con G/G' finito. Allora anche G è finito.*

Dim. G risulta finitamente generabile (cfr. [**6**], p. 232), ma G è anche localmente finito e si ha subito la finitezza di G.

Lemma 3. *Sia G un p-gruppo nilpotente di classe 2 dotato di un sol sottogruppo normale minimale N. Allora $Z(G/N)$ non è localmente ciclico.*

Dim. ([2]) Si consideri un laterale $xZ(G) \in G/Z(G)$ di periodo p. Si ha $[x^p, g] = 1$ per ogni $g \in G$ e d'altra parte $[x, g] \in Z(G)$ per l'essere G di classe 2, si ottiene pertanto $[x, g]^p = [x^p, g] = 1$ e così $\langle [x, g] \rangle$ è un sottogruppo centrale e d'ordine p; ne segue $[x, g] \in N$ e $[xN, gN] = N$, onde $\langle xN \rangle$ è un sottogruppo $\neq 1$ di $Z(G/N)$.

G non è abeliano e perciò $G/Z(G)$ non è localmente ciclico, sicchè esiste un sottogruppo $\langle yZ(G) \rangle$ di $G/Z(G)$ avente ordine p e diverso da $\langle xZ(G) \rangle$, si ha come sopra $\langle yN \rangle \leqslant Z(G/N)$ e così $Z(G/N)$ non è localmente ciclico.

Lemma 4. *Un gruppo G, periodico e residuale S-gruppo* ([3]), *è un S-gruppo.*

Dim. Siano: p un numero primo, G_p $(G_{p'})$ il sottogruppo di G generato dai p-elementi (dai p'-elementi) di G. Considerato un $x \in G_p \cap G_{p'}$, non può essere $x \neq 1$ altrimenti esisterebbe un S-gruppo G/H con $x \notin H$, ma xH sarebbe simultaneamente un p-elemento ed un p'-elemento, sicchè si otterrebbe l'assurdo $x \in H$.

Quanto sopra assicura che $G_p \cap G_{p'} = 1$ e per l'arbitrarietà di p si ottiene $G = \otimes G_p$. Se in G_p vi fosse un q-elemento $x \neq 1$, si avrebbe la contraddizione $x \in G_p \cap G_q$, in tal modo G_p è un p-gruppo.

---

(1) I Lemmi 1 e 2 sono stati stabiliti in ipotesi più generali di quanto occorra per il seguito.

(2) Il Lemma 3 è sostanzialmente contenuto nella prova del Satz 2 di [**5**].

(3) S-gruppo è un gruppo (di torsione) prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow. Un gruppo G dicesi *residuale S-gruppo* se (e solo se) si ha $\bigcap_{X \in \Sigma} X = 1$ ove Σ è la famiglia degli $X \lhd G$ tali da essere G/X un S-gruppo.

Lemma 5. *Sia H un π-sottogruppo normale di Hall di un gruppo localmente finito G. Se $G/HZ_G(H)$ è al più numerabile, G si spezza su H.*

Dim. Cfr. ad es. [**3**], th. 3.

Lemma 6. *Sia Γ un gruppo irriducibile* (4) *di automorfismi di un gruppo abeliano $A \neq 1$. Se Γ è localmente finito, A ha esponente primo p ed il centralizzante di Γ in End (A) è un campo di caratteristica p e algebrico su Z/pZ.*

Dim. Cfr. [**1**], p. 385.

Lemma 7. *Sia G un p-gruppo abeliano non localmente ciclico. Se $n(G) \simeq \simeq n(H)$, si ha $G \simeq H$.*

Dim. Cfr. [**2**], p. 5.

Lemma 8. *Sia G un p-gruppo ipercentrale. Se $n(G) \simeq n(H)$, H è privo di sottogruppi normali $A \neq 1$ e $B \neq 1$ tra loro coprimi.*

Dim. Cfr. [**4**], Lemma 6.

Lemma 9. *Sia G un gruppo ipercentrale e periodico. Allora è periodico ogni gruppo risolubile H tale che $n(G) \simeq n(H)$.*

Dim. Cfr. [**4**], teor. 2.

Lemma 10. *Siano: G un p-gruppo nilpotente e non localmente ciclico, φ un isomorfismo $n(G) \to n(H)$. Allora, si ha $H' = \varphi G'$ e $G/G' \simeq H/H'$.*

Dim. G/G' non è localmente ciclico (cfr. Lemma 1) e pertanto $G/G' \simeq \simeq H/\varphi G'$ (cfr. Lemma 7), ne segue $\varphi G' \geqslant H'$.

Sia per assurdo $\varphi G' > H'$. Il gruppo H/H' è di torsione, infatti dall'essere H/H' abeliano e $l(H/H') \simeq n(G/\varphi^{-1}H')$ con $G/\varphi^{-1}(H')$ p-gruppo nilpotente, segue che ogni sottogruppo $\neq 1$ di H/H' include qualche sottogruppo minimale. H/H' è primario (cfr. Lemma 8) ed è poi un p-gruppo in quanto lo è $H/\varphi G' \simeq G/G'$, non è localmente ciclico perchè non lo è G/G'. Ne discende (Lemma 7) $H/H' \simeq G/\varphi^{-1}(H')$ e conseguentemente $\varphi^{-1} H' \geqslant G'$ e $H' \geqslant \varphi G'$.

Lemma 11. *Siano: G un p-gruppo nilpotente di classe 2, H un gruppo risolubile, φ un isomorfismo $n(G) \to n(H)$. Se $H/\varphi N$ è un p-gruppo e se N è un sottogruppo normale minimale di G, anche H è un p-gruppo.*

Dim. Si distinguano i casi seguenti:

(1) N è l'unico sottogruppo normale minimale di G. H è risolubile di torsione (cfr. Lemma 9) e quindi φN è un q-gruppo abeliano elementare, sicchè

(4) Γ è *irriducibile* nel senso che A ed 1 sono i soli sottogruppi Γ-invarianti di A.

si ha $Z_H(\varphi N) \geqslant \varphi N$. Per assurdo sia $p \neq q$. Non può essere $Z_H(\varphi N) > \varphi N$ altrimenti (cfr. Lemma 5) risulterebbe $Z_H(\varphi N) = K \times \varphi N$ con K e φN normali in H e tra loro coprimi, ciò che è contro il Lemma 8. In tal modo si è visto che $\varphi N = Z_H(\varphi N)$ e così $H/\varphi N$ è un gruppo irriducibile e localmente finito di automorfismi di φN, $Z(H/\varphi N)$ è allora un sottogruppo moltiplicativo e periodico di $End(\varphi N)$, sicchè (5) (Lemma 6) $Z(H/\varphi N)$ è localmente ciclico. La (1) ed il Lemma 3 assicurano che $Z(G/N)$ non è localmente ciclico, dalla locale finitezza del p-gruppo $H/\varphi N$ discende che pure $Z(H/\varphi N)$ non è localmente ciclico. Si è ottenuta così una contraddizione.

(2) G ammette un ulteriore sottogruppo normale minimale N. Negando la tesi, sia ancora φN abeliano di esponente $q \neq p$. Il quoziente $(\varphi N \cdot \varphi N_1)/\varphi N \simeq \simeq \varphi N_1$ è un p-gruppo e pertanto risultano φN e φN_1 coprimi e normali in H, ciò che non può essere a causa del Lemma 8.

3. – Si è ora in grado di dimostrare i teoremi di cui all'introduzione.

Teorema B_1. *Siano: G un p-gruppo nilpotente di classe 2 a derivato ridotto, H un gruppo risolubile, φ un isomorfismo $n(G) \to n(H)$. Allora H è un p-gruppo ipercentrale equipotente a G.*

Dim. Si condurrà la dimostrazione riconoscendo quanto segue:

(1) H è un p-gruppo. Si ha (cfr. Lemma 10) $\varphi G' = H'$ e $G/G' \simeq H/H'$, sicchè non è vuoto l'insieme Σ dei sottogruppi $K \lhd H$ tali da essere H/K un p-gruppo e $\varphi^{-1}K \leqslant G'$. Posto $X = \bigcap_{K \in \Sigma} K$, appare ovvio che H/X è residuale p-gruppo e quindi residuale S-gruppo, d'altra parte (Lemma 9) H/X risulta di torsione e pertanto (Lemma 4) H/X è un S-gruppo; ne segue (Lemma 8) che H/X è un p-gruppo. Si riconoscerà che $X = 1$. Supposto per assurdo $X \neq 1$ e tenuto conto che $\varphi^{-1}X \leqslant G'$, l'essere $G' \leqslant Z(G)$ e ridotto assicura la esistenza di un $Y < \varphi^{-1}X$ tale che $Y \lhd G$ e che $|\varphi^{-1}X/Y| = p$. Il sottogruppo $\varphi^{-1}X/Y$ è normale minimale in G/Y ed inoltre $n(G/Y) \simeq n(H/\varphi Y)$; allora, ricordato che H/X è un p-gruppo, il Lemma 11 assicura che lo è pure $H/\varphi Y$; ma tenuto conto che $\varphi Y < X$, si è ottenuta una contraddizione.

(2) H è ipercentrale. Sia $H/K \neq 1$ un quoziente di H. Il gruppo nilpotente $G/\varphi^{-1}K$ possiede un sottogruppo normale minimale $N/\varphi^{-1}K$ e così $\varphi N/K$ è normale minimale in H/K; ma H/K è localmente nilpotente e quindi $\varphi N/K \leqslant \leqslant Z(H/K)$. Per l'arbitrarietà di H/K, il gruppo H è ipercentrale.

(3) H è equipotente a G. Si può ragionare come nella dim. del teor. 1 di [**5**].

(5) I sottogruppi periodici del gruppo moltiplicativo di un campo sono localmente ciclici.

Teorema B_2. *Siano: G un p-gruppo nilpotente di classe $\leqslant 2$ e non localmente ciclico, H un gruppo risolubile ed ipofinito, φ un isomorfismo $n(G) \to n(H)$. Allora H è un p-gruppo ipercentrale equipotente ad H.*

Dim. Sia $H^{(0)} = H > H' = H^{(1)} \geqslant \ldots \geqslant H^{(n)} = 1$ la serie derivata di G. Se $n = 1$, si ha $G' = 1$ (cfr. Lemma 10) e così dal Lemma 7 segue $G \simeq H$.

Dopo quanto sopra, supposto $n > 1$, si procederà per induzione su n. Riesce $n(G/\varphi^{-1} H^{(n-1)}) \simeq n(H/H^{(n-1)})$ ed inoltre $G/G' \simeq (G/\varphi^{-1} H^{(n-1)})/(G/\varphi^{-1} H^{(n-1)})'$, tenuto conto che G/G' non è localmente ciclico a causa del Lemma 1, l'ipotesi induttiva assicura che $H/H^{(n-1)}$ è un p-gruppo ipercentrale. Il gruppo abeliano $H^{(n-1)} \neq 1$ è periodico (cfr. Lemma 9) ed è quindi un q-gruppo (q numero primo) a norma del Lemma 8. Si riconoscerà quanto segue:

(1) $p = q$. L'essere H ipofinito e $H^{(n-1)} \neq 1$ comporta l'esistenza di un sottogruppo $K < H^{(n-1)}$ e normale in H tale da essere $H^{(n-1)}/K$ normale minimale in H/K e perciò tale da essere $H^{(n-1)}/K$ un q-gruppo abeliano elementare (finito).

Sia per assurdo $p \neq q$. Il centralizzante $Z_{H/K}(H^{(n-1)}/K)$ coincide con $H^{(n-1)}/K$ altrimenti si avrebbe (Lemma 5): $Z_{H/K}(H^{(n-1)}/K) = (H^{(n-1)}/K) \times (S/K)$, con S/K p-gruppo $\neq 1$ e normale in H/K, ciò che non può essere a causa del Lemma 8. Si è così visto che $Z_{H/K}(H^{(n-1)}/K)$ coincide con $H^{(n-1)}/K$, onde $(H/K)/(H^{(n-1)}/K)$ è un gruppo di automorfismi di $H^{(n-1)}/K$ e risulta finito, ne segue la finitezza di $H/H^{(n-1)} \simeq (H/K)/(H^{(n-1)}/K)$ e quindi quella di $H/H' \simeq (H/H^{(n-1)})/(H'/H^{(n-1)})$. D'altra parte (Lemma 10) $G/G' \simeq H/H'$, in tale modo (Lemma 2) G è finito; da ciò e dall'essere $n(G) \simeq n(H)$, discende per l'ipofinitezza di H che H ha ordine finito. Allora ([**5**], Satz 2) H è un p-gruppo contro l'aver supposto $p \neq q$.

(2) H è ipercentrale ed equipotente a G come nella dim. del Teor. B_1.

Bibliografia.

[**1**] R. Baer, *Irreducible groups of automorphisms of abelian groups*, Pacific J. Math. **14** (1964), 385-406.

[**2**] M. Curzio, *Una caratterizzazione reticolare dei gruppi abeliani*, Rend. Mat. **24** (1965), 1-10.

[**3**] J. D. Dixon, *Complements of normal subgroups in infinite groups*, Proc. London Math. Soc. **17** (1967), 431-446.

[**4**] A. Franchetta e F. Tuccillo, *Su una classe di gruppi ipercentrali*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (in corso di stampa).

[5] H. Heineken, *Über die charakterisierung von Gruppen durch gewisse Untergruppenverbände*, J. Reine Angew. Math. **220** (1965), 30-36.

[6] A. G. Kurosh, *The theory of groups* (II), Chelsea Publ. Co., New York 1958.

[7] M. F. Newman and J. Wiègold, *Groups with many nilpotent subgroups*, Arch. Math. **15** (1964), 241-250.

[8] J. D. S. Robinson, *Finitess conditions and generalized soluble groups*, Part. 1-2, Ergebnisse der Mathematik, 1972.

Summary.

If G is a nilpotent p-group of class 2 with reduced commutator subgroup, if H is soluble and $n(G) \simeq n(H)$, then $|H| = |G|$ and H is a hypercentral p-group (the theorem is well known in the finite case, see Heineken [**5**]*).*

* * *