Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1976), 277-285

VITTORIO MANGIONE e ALBERTO VEZZANI (*)

Teoremi di rappresentazione per le connessioni della classe $\mathscr{D}$ e di alcune sue sottoclassi notevoli. (**)

1. - Introduzione.

Nel lavoro [2] è stata introdotta, su di una varietà riemanniana, *una classe di connessioni*, denotata con $\mathscr{D}$, che gode di interessanti proprietà. Ivi sono state caratterizzate le *connessioni simmetriche, metriche, semisimmetriche, semimetriche, di Levi-Civita generalizzate* (brevemente *della classe* $\mathscr{L}$), *appartenenti alla classe* $\mathscr{D}$.

In questo lavoro viene stabilito anzitutto un *teorema di rappresentazione* per le connessioni della classe $\mathscr{D}$ (Teorema $\mathbf{T}_2$, n. **6**). *Teoremi di rappresentazione* sono anche ottenuti per ciascuna delle sottoclassi precedentemente accennate (Teoremi $\mathbf{T}_3$, $\mathbf{T}_4$, n. **6**; $\mathbf{T}_5$, n. **7**; $\mathbf{T}_6$, $\mathbf{T}_7$, n. **8**).

Nelle formule che rappresentano le connessioni delle varie classi intervengono, come elementi arbitrari, campi tensoriali di tipo $(1, 2)$ (in particolare simmetrici, emisimmetrici); ciò dà indicazioni sulla esistenza e sulla consistenza quantitativa delle connessioni di ciascuna classe.

Nelle considerazioni, che conducono ai risultati citati, gioca un ruolo importante la possibilità, legata alla struttura riemanniana, di decomporre una arbitraria connessione Λ secondo la formula $\Lambda = \overset{\circ}{\Gamma} + \Sigma_\Lambda + T_\Lambda$, dove $\overset{\circ}{\Gamma}$ denota la connessione di Levi-Civita, mentre Σ_Λ, T_Λ sono campi tensoriali di tipo $(1, 2)$ rispettivamente simmetrico, emisimmetrico (n. **4**).

Intervengono nelle formule di rappresentazione l'*omomorfismo idempotente* ω, con l'aggiunto ω^*, e l'*omomorfismo* Ω, costruito a partire da ω, relativi ai ten-

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) – Ricevuto: 22-VI-1976.

sori di tipo (1, 2) e qui considerati per la prima volta (n. **2**). Il teorema $\mathbf{T}_1$ del n. **3**, essenziale nelle dimostrazioni dei teoremi $\mathbf{T}_3$, $\mathbf{T}_4$, $\mathbf{T}_5$ mostra l'opportunità di introdurre l'omomorfismo Ω.

2. - Preliminari.

Sia V una varietà riemanniana di dimensione $n \geqslant 2$ e classe C^r $(r \geqslant 2)$, x un punto di V, τ lo spazio vettoriale tangente a V in x, τ_* lo spazio vettoriale duale. Sia poi g il campo di classe C^1 che definisce la metrica su V (1). Conviene denotare con $g \in \tau_* \otimes \tau_*$ anche il tensore metrico nel punto x di V (2) e con $G \in \tau \otimes \tau$ il tensore definito dall'uguaglianza

$$c_1^1(g \otimes G) = \delta \quad (^3)\,. \tag{1}$$

Interviene nel seguito lo spazio vettoriale $\mathscr{T} = \tau_* \otimes \tau_* \otimes \tau$. Indicati con σ e ε gli *omomorfismi di simmetrizzazione, di emisimmetrizzazione* di $\mathscr{T}$ (4), è utile considerare l'*omomorfismo involutorio* $\alpha = \sigma - \varepsilon$ e indicare con $\mathscr{T}_\sigma$, $\mathscr{T}_\varepsilon$ i sottospazi vettoriali costituiti dai tensori simmetrici, emisimmetrici di $\mathscr{T}$.

3. - Omomorfismi ω e Ω.

Nello spazio vettoriale $\mathscr{T}$ si consideri l'*omomorfismo* ω, essenziale nel seguito, definito per ogni tensore L di $\mathscr{T}$ da

$$\omega L = \frac{1}{n}\, \delta \otimes c_1^1 L\,. \tag{2}$$

Indicata con I l'identità di $\mathscr{T}$, sia poi $\omega^* = I - \omega$. Si riconosce subito che ω è un omomorfismo idempotente, cioè $\omega^2 = \omega$, e che risulta

$$c_1^1 \omega^* L = 0\,. \tag{3}$$

---

(1) Per le nozioni fondamentali che intervengono si veda p. es. J. A. Schouten [**4**], Cap. 1, 2, 3; K. Yano [**5**], Cap. 1; K. Yano and S. Bochner [**6**], Cap. 1.

(2) Anche nel seguito una stessa lettera indica un campo di tensori su V o il tensore che rappresenta quel campo nel punto x di V, a seconda del contesto.

(3) δ è il tensore di Kronecker. In generale c_k^j è l'applicazione tensoriale di contrazione relativa allo j-simo indice di contravarianza e al k-simo indice di covarianza (ved. p. es. N. Bourbaki [**1**]$_1$, p. 45).

(4) Indotti in $\mathscr{T}$ dagli analoghi omomorfismi di $\tau_* \otimes \tau_*$.

Dalla (2) per via diretta segue subito

$$\omega\alpha\omega = \frac{1}{n}\,\omega\,. \tag{4}$$

Interessa nel seguito individuare i tensori simmetrici, emisimmetrici di $\operatorname{Im}\omega^*$. A tal fine è utile introdurre l'*omomorfismo* di $\mathscr{T}$

$$\Omega = \omega^* + n\omega^*\alpha\omega^*\,. \tag{5}$$

Sussiste innanzitutto l'osservazione

O_1. *L'omomorfismo Ω è permutabile con l'isomorfismo α; cioè*

$$\Omega\alpha = \alpha\Omega\,. \tag{6}$$

Tenuto presente che $\sigma - \varepsilon = \alpha$ e $\sigma + \varepsilon = I$, segue la *permutabilità* di Ω con σ e ε.

Conviene poi osservare esplicitamente che dalla (5) discende

$$\omega^*\Omega = \Omega\omega^* = \Omega\,. \tag{7}$$

Ciò premesso l'accennata questione relativa ai tensori *simmetrici, emisimmetrici* di $\operatorname{Im}\omega^*$ è risolta dal teorema:

$\mathbf{T}_1$. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il tensore $\omega^* C$ sia simmetrico, emisimmetrico, è che sia rispettivamente*

$$\omega^* C = \Omega S\,, \qquad \omega^* C = \Omega E\,, \tag{8}$$

con C, S, E tensori appartenenti ordinatamente a $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}_\sigma$, $\mathscr{T}_\varepsilon$.

4. - Dimostrazioni.

Per dimostrare O_1 si osservi che, attesa la definizione di ω^* e la (4), la (5) diviene

$$\Omega = (I + n\alpha) - n(\alpha\omega + \omega\alpha)\,.$$

Ricordato poi il carattere involutorio dell'omomorfismo α (n. **2**) segue subito l'asserto.

Per la dimostrazione di $\mathbf{T}_1$ si noti dapprima che, indicato con C un tensore di $\mathscr{T}$, l'ipotesi di simmetria per $\omega^* C$, cioè $\varepsilon\omega^* C = 0$, tenuto presente che $\varepsilon = (I - \alpha)/2$ e che $\omega^* = I - \omega$, diviene $C - \omega C = \alpha C - \alpha\omega C$. Operando con l'omomorfismo idempotente ω, si ottiene $\omega\alpha C = \omega\alpha\omega C$ che, per la (4), equivale alla

$$\omega(C - n\alpha C) = 0 .$$

In virtù di un lemma ben noto (5) si ha dunque

$$C - n\alpha C = \omega^* L ,$$

con L tensore arbitrario di $\mathscr{T}$.

Di conseguenza

$$\sigma C = \frac{1}{1-n}\sigma\omega^* L , \qquad \varepsilon C = \frac{1}{1+n}\varepsilon\omega^* L \ \text{(6)}$$

e infine

$$C = \frac{1}{1-n}\sigma\omega^* L + \frac{1}{1+n}\varepsilon\omega^* L . \tag{9}$$

Dalla (9) si deduce facilmente che

$$(1 - n^2)\,\omega^* C = \big(\omega^*(\sigma + \varepsilon)\,\omega^* + n\omega^*(\sigma - \varepsilon)\,\omega^*\big)\,L$$

onde, tenuta presente la (5) e l'idempotenza di ω^*, si può scrivere

$$(1 - n^2)\omega^* C = \Omega L.$$

Poichè per ipotesi $\omega^* C$ è simmetrico e d'altronde Ω e σ sono permutabili, risulta

$$(1 - n^2)\,\omega^* C = \sigma\Omega L = \Omega\sigma L .$$

Introdotto infine il tensore simmetrico $S = \big(1/(1 - n^2)\big)\,\sigma L$ che risulta arbitrario in $\mathscr{T}_\sigma$ a causa dell'arbitrarietà di L in $\mathscr{T}$, si ottiene in conclusione

$$\omega^* C = \Omega S.$$

Si è così provato che dalla simmetria di $\omega^* C$ segue necessariamente la prima delle (8).

---

(5) Ved. p. es. N. Bourbaki $[\mathbf{1}]_2$, Proposition 1, p. 7; K. Yano [**5**], p. 133.

(6) È sufficiente tener presente che $\sigma\alpha = \sigma$, $\varepsilon\alpha = -\varepsilon$.

La dimostrazione del viceversa è immediata tenendo conto della permutabilità di Ω con ε.

In modo del tutto analogo si procede per stabilire il teorema $\mathbf{T}_1$ nel caso emisimmetrico.

5. - Connessioni su V.

Si consideri ora sulla *varietà riemanniana* V una *connessione* Λ.

Come è noto, indicata con $\overset{\circ}{\Gamma}$ la connessione di Levi-Civita, definita dalla metrica g, con riferimento al punto x di V, può scriversi univocamente

$$\Lambda = \overset{\circ}{\Gamma} + \Sigma_\Lambda + T_\Lambda\,, \tag{10}$$

essendo Σ_Λ un tensore di $\mathscr{T}_\sigma$ e T_Λ un tensore di $\mathscr{T}_\varepsilon$ (*torsione* di Λ) (7).

È noto allora che se in ogni punto x di V risulta $T_\Lambda = 0$, $\Sigma_\Lambda = 2\sigma\gamma(T_\Lambda)$, $\Sigma_\Lambda = 0$, la *connessione* è rispettivamente *simmetrica*, *metrica*, *di Levi-Civita generalizzata* (*brevemente della classe* $\mathscr{L}$) (8).

In [**2**] sono state introdotte e studiate le *connessioni della classe* $\mathscr{D}$, alle quali è dedicato il presente lavoro. Esse sono caratterizzate dalla *condizione*

$$c_1^1(\Sigma_\Lambda + T_\Lambda) = 0 \ (^9)\,. \tag{11}$$

Nel medesimo lavoro sono state caratterizzate tutte le sottoclassi di $\mathscr{D}$ che intervengono nel seguito.

6. - Teoremi di rappresentazione.

Le premesse dei numeri precedenti consentono di stabilire alcuni *teoremi di rappresentazione*.

Indicati con $\overset{\circ}{\Gamma}$ la *connessione di Levi-Civita* e con C un *arbitrario tensore* di $\mathscr{T}$, sussiste il *teorema*

---

(7) Ved. p. es. V. Mangione e A. Vezzani [**2**], (6), n. 3.

(8) Ved. p. es. G. B. Rizza [**3**]$_1$, [**3**]$_2$; V. Mangione e A. Vezzani [**2**]. γ è l'*isomorfismo involutorio* introdotto da G. B. Rizza in [**3**]$_1$ definito per ogni tensore L di $\mathscr{T}$ da $\gamma(L) = c_2^2(c_1^1(g \otimes L) \otimes G)$.

(9) Ved. V. Mangione e A. Vezzani [**2**], n. 7.

$\mathbf{T}_2$. *Le connessioni della classe $\mathscr{D}$ sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto x di V, dalla*

$$\Lambda = \overset{\circ}{\Gamma} + \omega^* C \, . \tag{12}$$

Indicato poi con S, E un arbitrario *tensore simmetrico, emisimmetrico* di $\mathscr{T}$, sussistono i *teoremi*

$\mathbf{T}_3$. *Le connessioni simmetriche della classe $\mathscr{D}$ sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto x di V, dalla*

$$\Lambda = \overset{\circ}{\Gamma} + \Omega S \, . \tag{13}$$

$\mathbf{T}_4$. *Le connessioni di Levi-Civita generalizzate appartenenti alla classe $\mathscr{D}$ sono, tutte e sole, rappresentate nel punto x di V, dalla*

$$\Lambda = \overset{\circ}{\Gamma} + \Omega E \, . \tag{14}$$

Per stabilire $\mathbf{T}_2$ si osservi che, se Λ è data dalla (12), si ha

$$c_1^1(\Sigma_\Lambda + T_\Lambda) = c_1^1 \omega^* C = 0$$

a causa della (3) del n. **3**; onde la (11) è soddisfatta.

Viceversa se Λ è della classe $\mathscr{D}$, dalla (11), tenuta presente la (2) del n. **3**, segue $\omega(\Sigma_\Lambda + T_\Lambda) = 0$. In virtù di un noto lemma già utilizzato al n. **4** ([10]), segue $\Sigma_\Lambda + T_\Lambda = \omega^* C$ con C tensore arbitrario di $\mathscr{T}$. Tenuto conto della (10) il teorema $\mathbf{T}_2$ è così dimostrato.

Per stabilire i teoremi $\mathbf{T}_3$, $\mathbf{T}_4$ si noti anzitutto che in virtù della permutabilità di Ω con σ ed ε, le connessioni rappresentate dalle (13), (14) sono rispettivamente connessioni simmetriche, di Levi-Civita generalizzate. Esse appartengono poi alla classe $\mathscr{D}$ in base al teorema $\mathbf{T}_2$ a causa della (5).

Viceversa se Λ è una connessione della classe $\mathscr{D}$ si ha

$$\Sigma_\Lambda + T_\Lambda = \omega^* C \, .$$

Se poi Λ è simmetrica, appartenente alla classe $\mathscr{L}$, il tensore $\omega^* C$ deve risultare, rispettivamente, simmetrico, emisimmetrico. Il teorema $\mathbf{T}_1$ conduce allora immediatamente alle (13), (14).

([10]) Cfr. nota ([5]).

7. - Connessioni metriche della classe $\mathscr{D}$.

Si considerino ora le *connessioni metriche della classe* $\mathscr{D}$ già studiate in [**2**]. Sia E un arbitrario tensore emisimmetrico di $\mathscr{T}$; sussiste il *teorema di rappresentazione.*

$\mathbf{T}_5$. *Le connessioni metriche della classe* $\mathscr{D}$ *sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto* x *di* V, *dalla*

$$A = \overset{\circ}{\Gamma} + 2\sigma\gamma\Omega E + \Omega E \,. \tag{15}$$

Il teorema $\mathbf{T}_5$ si dimostra rapidamente. È bene ricordare anzitutto che per le connessioni metriche è $\Sigma_A = 2\sigma\gamma(T_A)$ (11); fra queste quelle appartenenti alla classe $\mathscr{D}$ sono caratterizzate dalla condizione $c_1^1 T_A = 0$ (12).

Dunque se una connessione A è metrica e appartiene alla classe $\mathscr{D}$, si ha $\omega T_A = 0$, onde in virtù del lemma già utilizzato altre volte (13), deve essere $T_A = \omega^* L$. Poichè T_A è emisimmetrico, il teorema $\mathbf{T}_1$ del n. **3** precisa che $T_A = \Omega E$ con E tensore emisimmetrico di $\mathscr{T}$. In conclusione la (10) diviene la (15).

Inversamente se A è data dalla (15), poichè il tensore ΩE è emisimmetrico come E, in virtù della osservazione O_1, A è certamente una connessione metrica, la quale appartiene anche a $\mathscr{D}$, in quanto in virtù delle (3), (5)

$$c_1^1 \Omega E = c_1^1 \omega^*(I + n\alpha\omega^*) E = 0 \,.$$

In particolare si possono considerare le *connessioni metriche appartenenti alla classe* $\mathscr{L}$ che, come è noto, *costituiscono una sottoclasse di* $\mathscr{D}$ (14). Poichè G. B. Rizza in $[\mathbf{3}]_2$ ha mostrato che le connessioni metriche di $\mathscr{L}$ sono tutte e sole della forma

$$A = \overset{\circ}{\Gamma} + \tilde{E} - 2\varepsilon\gamma\tilde{E} \,, \tag{16}$$

con $\tilde{E}$ arbitrario tensore di $\mathscr{T}_\varepsilon$, la (16) fornisce una rappresentazione delle connessioni della suddetta sottoclasse di $\mathscr{D}$.

---

(11) Ved. G. B. Rizza $[\mathbf{3}]_1$, p. 170, (22).
(12) Ved. V. Mangione e A. Vezzani [**2**], teorema T_6.
(13) Cfr. nota (5).
(14) L'affermazione segue dall'osservazione fatta alla fine del n. 7 e dal teorema T_5 di [**2**].

Si riconosce infatti che la (16) è della forma (14). È sufficiente notare che, come si verifica senza difficoltà, $\omega(\tilde{E} - 2\varepsilon\gamma\tilde{E}) = 0$. Pertanto il tensore emisimmetrico $\tilde{E} - 2\varepsilon\gamma\tilde{E}$ appartiene ad Im ω^* e quindi (teorema $\mathbf{T}_1$) è della forma ΩE, in accordo col teorema $\mathbf{T}_4$.

8. - Connessioni semi-metriche o semisimmetriche della classe $\mathcal{D}$.

Si considerino infine le *connessioni semi-metriche* e le *connessioni semisimmetriche* appartenenti alla classe $\mathcal{D}$.

Siano E un arbitrario tensore emisimmetrico di $\mathcal{T}$ ed S un arbitrario tensore simmetrico di $\mathcal{T}$; sussistono i *teoremi di rappresentazione*

$\mathbf{T}_6$. *Le connessioni semi-metriche della classe $\mathcal{D}$ sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto x di V, dalla*

$$\Lambda = \overset{\circ}{\Gamma} + 2\sigma\gamma E - 4\sigma\omega E + \frac{2}{n} c_1^1(G \otimes c_1^1 E \otimes g) + E\,. \tag{17}$$

$\mathbf{T}_7$. *Le connessioni semisimmetriche della classe $\mathcal{D}$ sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto x di V, dalla*

$$\Lambda = \overset{\circ}{\Gamma} + S + \frac{2n}{1-n}\,\varepsilon\omega S\,. \tag{18}$$

Per dimostrare $\mathbf{T}_6$ si noti anzitutto che, se Λ è della forma (17), risulta

$$\Sigma_\Lambda = 2\sigma\gamma E - 4\sigma\omega E + \frac{2}{n} c_1^1(G \otimes c_1^1 E \otimes g)\,, \qquad T_\Lambda = E.$$

Tenute presenti la (10) del lavoro [2] e la (2), Λ risulta semi-metrica relativamente a $u = -(4/n)\,c_1^1 E$ ed appartiene alla classe $\mathcal{D}$ perchè $c_1^1 T_\Lambda = -(n/4)u$ ([15]).

Inversamente, se Λ è una connessione semi-metrica relativamente a u, Σ_Λ, T_Λ ed u sono legati dalla (10) del lavoro [2]. Se poi essa appartiene alla classe $\mathcal{D}$ in base al teorema $\mathbf{T}_6$ del lavoro [2] deve essere $u = -(4/n)\,c_1^1 T_\Lambda$. Dunque Λ può scriversi nella forma (17).

([15]) Ved. V. Mangione e A. Vezzani [2], teorema $\mathbf{T}_6$.

Per provare $\mathbf{T}_7$ si ragiona in modo analogo. Se la connessione Λ è della forma (18), risulta $\Sigma_\Lambda = S$, $T_\Lambda = (2n/(1-n))\,\varepsilon\omega S$. Λ è dunque semisimmetrica relativamente a $t = (2/(n-1))\,c_1^1 S$ (16). Tenuto presente il teorema $\mathbf{T}_9$ del lavoro [**2**] (caso $\varphi = 0$) (17) si riconosce che Λ appartiene alla classe $\mathscr{D}$.

Inversamente, se Λ è una connessione semisimmetrica relativamente a t, risulta $T_\Lambda = \varepsilon(t \otimes \delta)$. Se poi Λ appartiene alla classe $\mathscr{D}$, in base al teorema $\mathbf{T}_9$ del lavoro [**2**] è $t = (2/(n-1))\,c_1^1 \Sigma_\Lambda$. In conclusione Λ è della forma (18).

---

(16) Ved. V. Mangione e A. Vezzani [**2**], n. 4.

(17) Si tenga conto dell'osservazione al termine del n. 9 di [**2**].

Bibliografia.

[**1**] N. Bourbaki: $[\bullet]_1$ *Algèbre*, ch. 3, Hermann, Paris 1958; $[\bullet]_2$ *Algèbre*, ch. 8, Hermann, Paris 1958.

[**2**] V. Mangione e A. Vezzani, *Due classi di connessioni sulle varietà riemanniane e quasi hermitiane*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **34** (1975-76).

[**3**] G. B. Rizza: $[\bullet]_1$ *Connessioni metriche sulle varietà quasi hermitiane*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **1** (1969); $[\bullet]_2$ *Alcuni risultati sulle varietà riemanniane e quasi hermitiane*, X Congresso Un. Mat. Ital. Cagliari, Settembre 1975.

[**4**] J. A. Schouten, *Ricci calculus*, Springer, Berlin 1954.

[**5**] K. Yano, *Differential geometry on complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, Oxford 1955.

[**6**] K. Yano and S. Bochner, *Curvature and Betti numbers*, Princeton Univ. Press, Princeton 1953.

Summary.

Representation theorems for the set $\mathscr{D}$ of connections and for some remarkable subsets of $\mathscr{D}$ on riemannian manifolds are obtained.

* * *