Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1976), 269-276

C. BALLARDINI e E. COMPARINI FATTORI (*)

Campi elettromagnetici in cavità con pareti asimmetricamente assorbenti (**)

1. – In un precedente lavoro [1] sono state studiate le perturbazioni che i modi del tipo di quelli relativi alle guide perfette, di una cavità risonante parallelepipeda retta, subiscono a causa del piccolo assorbimento dovuto alla non perfetta conducibilità di una parete terminale della cavità (cioè perpendicolare alla direzione di propagazione del campo).

Per l'interesse (verosimilmente anche applicativo) che può presentare, è qui esposto l'analogo problema (1), nell'ipotesi che l'unica parete debolmente assorbente sia parallela alla direzione di propagazione; in particolare si dimostra, in prima approssimazione, che non esiste attenuazione e che nella cavità possono sussistere, nonostante la presenza della parete assorbente, modi del tipo TE delle cavità perfette (2). Si determinano inoltre le pulsazioni effettive e le costanti di smorzamento dei campi in prima approssimazione.

2. – Consideriamo ancora, come nel lavoro [1] (3), la cavità parallelepipeda retta riferita alla terna cartesiana $Oxyz$ centrata in un vertice O con assi (di versori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) diretti secondo i tre spigoli, di lunghezza a, b, l rispettiva-

(*) Indirizzo: Istituto Matematico «Salvatore Pincherle», Università, 40127 Bologna, Italia.

(**) Ricevuto: 18-VI-1976.

(1) Trattato come Tesi di Laurea da uno degli autori (E. COMPARINI FATTORI, Istituto di Matematica, Università di Parma, Dicembre 1975).

(2) Questi risultati sono in contraddizione solo apparente con quanto può provarsi per le guide indefinite, cioè in presenza di campi propagantesi in un solo verso (cfr. [2]).

(3) Si noti il banale errore di stampa nella penultima formula a pag. 86 di [1] ove deve leggersi «cos (βz)» anzichè «sen (βz)».

mente; e sia assorbente (cioè di conducibilità finita, seppure convenientemente grande γ') la parete $x = a$ (in luogo della $z = l$ considerata in [1]).

Il problema oggetto del nostro studio si identifica con la ricerca dei due vettori complessi

$$
(1) \quad \begin{cases} \mathscr{E}(P, t) \;= [(E_{z1}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{E}_{t1}) \exp[-j\beta z] + (E_{z2}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{E}_{t2}) \exp[j\beta z]] \exp[j\omega t] \\ \mathscr{H}(P, t) = [(H_{z1}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{H}_{t1}) \exp[-j\beta z] + (H_{z2}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{H}_{t2}) \exp[j\beta z]] \exp[j\omega t], \end{cases}
$$

che soddisfano le equazioni di MAXWELL sulle pareti della cavità; nelle (1) β, ω sono costanti non nulle, mentre (per $i = 1, 2$) gli scalari E_{zi}, H_{zi} ed i vettori $\boldsymbol{E}_{ti}$, $\boldsymbol{H}_{ti}$ sono tutti funzioni delle sole variabili x, y ed è inoltre

$$
(2) \qquad \boldsymbol{E}_{ti} \cdot \boldsymbol{k} = 0 , \qquad \boldsymbol{H}_{ti} \cdot \boldsymbol{k} = 0 .
$$

Ora un calcolo privo di difficoltà permette intanto di stabilire che le (1) sono soluzioni delle equazioni di Maxwell solo se gli scalari E_{zi}, H_{zi} sono soluzioni delle equazioni differenziali

$$
(3) \qquad \Delta E_{zi} + h^2 E_{zi} = 0 , \qquad \Delta H_{zi} + h^2 H_{zi} = 0 , \qquad (i = 1, 2) ,
$$

nelle quali si è posto

$$
(4) \qquad h^2 = \omega^2 \varepsilon\mu - \beta^2
$$

(ε, μ costanti elettromagnetiche del mezzo, interno alla cavità) e ove i vettori $\boldsymbol{E}_{ti}$, $\boldsymbol{H}_{ti}$ sono dati dalle relazioni

$$
(5) \quad \begin{cases} h^2 \boldsymbol{E}_{ti} = j[(-1)^i \beta \nabla E_{zi} + \omega\mu \boldsymbol{k} \times \nabla H_{zi}] \\ h^2 \boldsymbol{H}_{ti} = j[(-1)^i \beta \nabla H_{zi} - \omega\varepsilon \boldsymbol{k} \times \nabla E_{zi}] , \end{cases}
$$

deducibili dalle (3) e dalle equazioni

$$
(6) \quad \begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E}_{ti} + j\omega\mu H_{zi} \boldsymbol{k} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H}_{ti} - j\omega\varepsilon E_{zi} \boldsymbol{k} = 0 , \end{cases}
$$

$$
(7) \quad \begin{cases} \nabla E_{zi} \times \boldsymbol{k} + j(-1)^i \beta \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_{ti} = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_{ti} \\ \nabla H_{zi} \times \boldsymbol{k} + j(-1)^i \beta \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H}_{ti} = j\omega\varepsilon \boldsymbol{E}_{ti} , \end{cases}
$$

dirette conseguenze delle equazioni di Maxwell.

D'altra parte le soluzioni delle (3), delle quali interessa qui studiare l'esistenza nella cavità in esame, si assumono del tipo

$$(8)\qquad \begin{cases} H_{zi} = [A_{1i}\cos(px) + A_{2i}\operatorname{sen}(px)][B_{1i}\cos(qy) + B_{2i}\operatorname{sen}(qy)] \\ E_{zi} = [C_{1i}\cos(px) + C_{2i}\operatorname{sen}(px)][D_{1i}\cos(qy) + D_{2i}\operatorname{sen}(qy)]\,, \end{cases}$$

dove le costanti p, q sono non negative, non entrambe nulle (4), legate dalla relazione

$$(9)\qquad p^2 + q^2 = h^2\,,$$

e le condizioni al contorno, per le sei pareti della cavità, sono espresse dalle dieci equazioni

$$(10)\qquad \boldsymbol{E}_{t1} + \boldsymbol{E}_{t2} = 0 \qquad (z = 0)\,,$$

$$(11)\qquad \boldsymbol{E}_{t1}\exp[-j\beta l] + \boldsymbol{E}_{t2}\exp[j\beta l] = 0 \qquad (z = l)\,,$$

$$(12)\qquad E_{zi} = 0\,,\quad \frac{\partial H_{zi}}{\partial n} = 0 \qquad (x = 0)\,,\ (y = 0)\,,\ (y = b)\,,$$

$$(13)\qquad \begin{cases} (E_{y1} - ZH_{z1})\exp[-j\beta z] + (E_{y2} - ZH_{z2})\exp[j\beta z] = 0 \\ (E_{z1} + ZH_{y1})\exp[-j\beta z] + (E_{z2} + ZH_{y2})\exp[j\beta z] = 0, \end{cases} \qquad (x = a)\,,$$

ove $Z = (1+j)\sqrt{\omega\mu'/2\gamma'}$ essendo μ' la permeabilità magnetica, γ' la conducibilità della parete assorbente e avendo designato con E_{zi}, H_{zi}, E_{yi}, H_{yi} le componenti cartesiane secondo gli assi z, y dei componenti superficiali dei due campi.

Si tratta ora di determinare soluzioni del tipo (8) che verifichino le condizioni al contorno (10), (11), (12), (13).

3. – Supponiamo in prima ipotesi che sia

$$(14)\qquad p^2 \neq 0\,,\qquad q^2 \neq 0\,;$$

dalle (10), (11) seguono subito le due alternative

$$(15)\qquad \boldsymbol{E}_{ti} = 0\,,$$

$$(15)'\qquad \beta = \frac{\pi r}{l} \qquad \text{con}\quad r = 1, 2, \ldots\,,$$

(4) Il caso di $h^2 = 0$ è palesemente privo di interesse.

delle quali soltanto la (15)′ è valida ai nostri fini, in quanto la prima comporta necessariamente l'annullamento del campo nella cavità. Dalla prima delle (6) e dalla (10) segue che è

$$H_{z1} + H_{z2} = 0 \tag{16}$$

e che quindi, tenuto conto della (10) e della seconda delle (7), è

$$\mathbf{H}_{t1} - \mathbf{H}_{t2} = 0\,, \tag{17}$$

ed anche, per la seconda delle (6)

$$E_{z1} - E_{z2} = 0\,. \tag{18}$$

La (15)′ comporta, per la realtà dei possibili valori della costante β, l'assenza di attenuazione nella cavità, e, inoltre, per le (16), (18) la forma più semplice delle (8)

$$\left\{\begin{aligned} H_{z1} = -H_{z2} &= [A_1 \cos(px) + A_2 \operatorname{sen}(px)]\,[B_1 \cos(qy) + B_2 \operatorname{sen}(qy)] \\ E_{z1} = E_{z2} \quad &= [C_1 \cos(px) + C_2 \operatorname{sen}(px)]\,[D_1 \cos(qy) + D_2 \operatorname{sen}(qy)]\,. \end{aligned}\right. \tag{8′}$$

Le condizioni (12) imposte alle H_{zi}, E_{zi} fornite dalle (8′) comportano sei identità (qui omesse per brevità) che possono essere verificate (sempre nell'ipotesi (14)) per le seguenti quattro coppie di valori degli scalari E_{zi}, H_{zi}

$$E_{zi} = 0\,, \qquad H_{zi} = 0\,, \tag{19}$$

$$E_{zi} = 0\,, \qquad H_{z1} = -H_{z2} = A \cos(px) \cos\left(\frac{\pi m}{b}\,y\right)\,, \tag{20}$$

$$E_{z1} = E_{z2} = C \operatorname{sen}(px) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{b}\,y\right)\,, \qquad H_{zi} = 0\,, \tag{21}$$

$$\left\{\begin{aligned} &E_{zi} = C \operatorname{sen}(px) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{b}\,y\right) \\ &H_{z1} = -H_{z2} = A \cos(px) \cos\left(\frac{\pi m}{b}\,y\right)\,, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

dove si è posto per brevità

$$A_1 B_1 = A\,, \qquad C_2 D_2 = C\,, \tag{23}$$

$$q = \frac{\pi m}{b} \qquad m = 1, 2, \dots\,. \tag{24}$$

Osservato ora che la coppia (19) comporta l'annullamento del campo (cfr. le (5)), e che le coppie (20), (21) si riducono alla (19) quando sia, rispettivamente, $A = 0$, $C = 0$ — le quali sono d'altronde conseguenze delle condizioni (13) applicate rispettivamente alle (20) e (21) — resta da studiare la eventuale compatibilità della coppia (22), per valori entrambi non nulli delle costanti A, C, con l'ultima condizione al contorno (13).

Si ottiene così il sistema di equazioni lineari omogenee (cfr. anche, per questo sistema [**3**])

$$\begin{cases} C\left[\dfrac{\pi^2 rm}{bl}\,\mathrm{sen}\,(pa)\right] + A[\omega\mu p\,\mathrm{sen}\,(pa) - Z_j h^2 \cos(pa) = 0 \\[2ex] C\,[Z\omega\varepsilon p \cos(pa) + jh^2\,\mathrm{sen}\,(pa)] + A\left[-Z\dfrac{\pi^2 rm}{bl}\cos(pa)\right] = 0\,, \end{cases} \tag{25}$$

nelle due incognite A, C, che potranno avere valori non nulli se e solo se è verificata l'equazione

$$p\omega\mu\,\mathrm{sen}^2(pa) - jZ(\varepsilon\mu\omega^2 + p^2)\,\mathrm{sen}\,(pa)\cos(pa) - Z^2\varepsilon\omega p\cos^2(pa) = 0\,, \tag{26}$$

la quale insieme alla

$$\varepsilon\mu\,\omega^2 - p^2 = \pi^2\left[\frac{m^2}{b^2} + \frac{r^2}{l^2}\right], \tag{27}$$

ovvia conseguenza delle (4), (9), (15'), (24), definisce le due quantità p, ω che caratterizzano il campo qui oggetto di studio (cfr. n. 5).

4. – Se in luogo dell'ipotesi (14) ammettiamo ora che sia

$$p = 0\,, \qquad q \neq 0\,, \tag{14'}$$

le (8) assumono la forma

$$\begin{cases} E_{zi} = M_{1i}\cos(qy) + M_{2i}\,\mathrm{sen}\,(qy) \\[1ex] H_{zi} = N_{1i}\cos(qy) + N_{2i}\,\mathrm{sen}\,(qy)\,, \end{cases} \tag{8''}$$

e le condizioni al contorno (10), (11) comportano ancora le conseguenze (16), (17), (18), dalle quali segue subito che deve essere $M_{i1} = M_{i2} = M_i$, $N_{i1} = -N_{i2} = N_i$ $(i = 1, 2)$.

Le condizioni (12) possono essere verificate, o assumendo

$$M_i = N_i = 0 \,, \tag{28}$$

il che comporta l'annullamento del campo, o assumendo

$$M_1 = M_2 = N_2 = 0 \,, \qquad q = \frac{s\pi}{b} \qquad (s = 1, 2, \dots) \,, \tag{29}$$

che corrisponde ad un campo con componenti longitudinali

$$E_{zi} = 0 \,, \qquad H_{z1} = -H_{z2} = N_1 \cos\left(\frac{s\pi}{b}\, y\right) .$$

Ma le condizioni (13) permettono di mostrare che deve essere $N_1 = 0$; ne segue pertanto che l'ipotesi (14') comporta necessariamente l'annullamento del campo. Un procedimento del tutto analogo a quello ora accennato, ma nell'ipotesi che sia

$$p \neq 0 \,, \qquad q = 0 \,, \tag{14''}$$

conduce ad un campo con componenti longitudinali

$$E_{zi} = 0 \,, \qquad H_{z1} = -H_{z2} = N_1 \cos (px)$$

soddisfacenti alle condizioni al contorno (10), (11), (12); la condizione (13) sulla parete assorbente comporta la relazione

$$j\omega\mu \operatorname{sen}(pa) + Zp \cos(pa) = 0 \,, \tag{30}$$

che, come nel caso trattato al n. **3**, determina insieme alla (27), con $m = 0$, il campo qui in esame.

5. – Per la determinazione approssimata delle soluzioni delle due equazioni (26), (30), seguiremo un procedimento analogo a quello usato nel lavoro [**1**], ma ricercheremo solo approssimazioni del primo ordine sulla correzione della pulsazione ω_0 relativa al caso perfetto, correzione che legheremo al piccolo parametro adimensionale $\eta = \sqrt{\mu/(2\omega_0\gamma'\mu^2 l^2)}$. Posto quindi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\pi^2}{\varepsilon\mu}\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{r^2}{l^2}\right)} \,, \qquad R = \frac{\varepsilon\mu\omega_0^2 a^2}{\pi^2 n^2} \,, \; \omega = \omega_0(1 + u\eta), \; (n, m, r = 1, 2, \dots) \,,$$

e dividendo la (26) per $(\omega_0 \mu\pi n)/a$ e la (30) per $\omega_0\mu$, le due equazioni si riducono alle equivalenti nella incognita complessa u

$$(26)' \quad \left\{ \begin{aligned} &(1+u\eta)\sqrt{1+2Ru\eta+Ru^2\eta^2}\,\mathrm{sen}^2\left(n\pi\sqrt{1+2Ru\eta+Ru^2\eta^2}\right)+\\ &+(1-j)n\eta\pi\sqrt{1+u\eta}(1+R+4Ru\eta+2Ru^2\eta^2)\cdot\\ &\cdot\mathrm{sen}\left(n\pi\sqrt{1+2Ru\eta+Ru^2\eta^2}\right)\cos\left(n\pi\sqrt{1+2Ru\eta+Ru^2\eta^2}\right)-\\ &-2j\eta^2Rn^2\pi^2(1+u\eta)^2\sqrt{1+2Ru\eta+Ru^2\eta^2}\cdot\\ &\cdot\cos^2\left(n\pi\sqrt{1+2Ru\eta+Ru^2\eta^2}\right)=0\,, \end{aligned}\right.$$

$$(30)' \quad \left\{ \begin{aligned} &j(1+u\eta)\,\mathrm{sen}\left(n\pi\sqrt{1+2Ru\eta+Ru^2\eta^2}\right)+\\ &+(j+1)\eta\sqrt{1+u\eta}\,n\pi\sqrt{1+2Ru\eta+Ru^2\eta^2}\cdot\\ &\cdot\cos\left(n\pi\sqrt{1+2Ru\eta+Ru^2\eta^2}\right)=0\,. \end{aligned}\right.$$

Sviluppando in serie di η e trascurando i termini di ordine superiore, si perviene alle due identità rispetto a η:

$$(26)'' \qquad \eta[u^2R+u(1-j)(R+1)-2j]=0 \qquad \forall\eta\,,$$

$$(30)'' \qquad \eta[juR+1+j]=0 \qquad \forall\eta\,,$$

che ci assegnano le soluzioni, rispettivamente per la (26)′

$$(31) \qquad u=j-1\,,$$

$$(32) \qquad u=\frac{j-1}{R}\,,$$

e per la (30)′ la soluzione (32).

Bibliografia.

[1] C. Ballardini, *Pulsazioni effettive e smorzamenti in cavità con pareti assorbenti*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **9** (1968), 83-90.

[2] L. Caprioli, *Sul campo elettromagnetico nelle guide rettangolari con pareti assorbenti*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **16** (1961), 273-280.

[3] M. L. De Socio, *Sulla instabilità delle onde elettromagnetiche in una guida a pareti non perfettamente conduttrici*, Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna (10) **10** (1952-53), 47-50.

Summary.

In a rectangular parallelepiped-shaped cavity resonator, the modes of a perfect waveguide are perturbed by the little absorption due to the imperfect conductivity of a side parallel with the electromagnetic-field wave propagation direction. The real pulsations and the damping constants of the field, which one can find in a such a cavity, are determined in a first approximation.

* * *