Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1976), 213-220

CARLO MARCHINI (*)

Alcune questioni di semantica in un topos elementare. (**)

1. – Sia E un topos elementare con classificatore dei sottoggetti *true*: $1 \to \Omega$.

Sia $\mathscr{L}$ un linguaggio del primo ordine, con eguaglianza, ad una sorta di variabili e siano $\mathscr{V}$ l'insieme (numerabile) delle variabili libere e Ξ l'insieme (numerabile) delle variabili vincolate (1). Sia infine A l'oggetto di base di una data E-realizzazione $\mathscr{R}$ del linguaggio $\mathscr{L}$, nel senso di [**1**] (2).

Sia α una espressione di $\mathscr{L}$, con $\sigma(\alpha)$ si indicherà l'insieme delle variabili libere presenti nella data espressione; se α è una formula di $\mathscr{L}$, con $\bar{\alpha}$ si indicherà la chiusura universale di α. Nel seguito con V, V', W e W' si indicheranno sempre insiemi finiti di variabili libere.

Osservazione 1. Poichè si considera un linguaggio ad una sola sorta di variabili se V e W sono non vuoti e $V \subseteq W$, la proiezione canonica $\pi\colon A^W \to A^V$ è un epimorfismo (anzi una ritrazione).

Osservazione 2. Sia α una formula di $\mathscr{L}$ e sia $\sigma(\alpha) \subseteq V \subseteq W$, con $V \neq \emptyset$. Allora

$$|\alpha, V| = true_{A^V} \qquad \text{se e solo se} \qquad |\alpha, W| = true_{A^W} .$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico « G. Vitali », 41100 Modena, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) – Ricevuto: 29-I-1976.

(1) Cfr. [**3**] di cui si assumono anche le definizioni di espressione e di formula ben formata.

(2) Di tale lavoro si utilizzeranno alcune notazioni e risultati anche senza farne esplicita menzione. L'ipotesi che E sia un topos elementare è qui usata per semplicità, anche se sovrabbondante, e per uniformità con [**1**].

Infatti se $\pi\colon A^W \to A^V$ è la proiezione canonica si ha:

$$|\alpha, W| = |\alpha, V|\pi .$$

Con $\mathscr{T}$ si indicherà l'insieme dei termini di $\mathscr{L}$. Data una **sostituzione** $s\colon \mathscr{V} \to \mathscr{T}$, per ogni espressione α del linguaggio, con α^s si indicherà l'espressione ottenuta sostituendo le variabili libere di α con i termini corrispondenti secondo s. Sia $V \neq \emptyset$ e s una sostituzione. Posto

$$s\{V\} = \bigcup_{x\in V} \sigma(s(x)) ,$$

la sostituzione s induce un morfismo $s_V\colon A^{s\{V\}} \to A^V$, definito da

$$\varepsilon_x^V s_V = |s(x), s\{V\}| \qquad (x \in V) . \tag{1}$$

Con queste notazioni si può stabilire il seguente

Lemma 1. *Siano*: $t \in \mathscr{T}$, s *una sostituzione e* $V \neq \emptyset$ *tali che* $\sigma(t) \subseteq V$ *e* $W = s\{V\}$. *Allora si ha*:

$$|t, V| s_V = |t^s, W| .$$

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione sul numero di simboli funzionali presenti nel termine t.

a) Sia $t = c$, costante individuale; allora $t^s = c$. Detto per ogni insieme finito $U \subseteq \mathscr{V}$, $a_U\colon A^U \to 1$ il morfismo canonico, si ha:

$$|c, V| s_V = |c| a_V s_V = |c| a_W = |c, W| .$$

b) Sia $t = x \in \mathscr{V}$, allora $t^s = s(x)$; per la (1)

$$|x, V| s_V = \varepsilon_x^V s_V = |s(x), W| .$$

c) Sia $t = f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ e sia, per ipotesi induttiva,

$$|t_i, V| s_V = |t_i^s, W| \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) .$$

Essendo $t^s = f(t_1^s, t_2^s, \ldots, t_k^s)$, si ha, con semplici calcoli,

$$|t, V| s_V = |f| \{|t_1, V|, |t_2, V|, \ldots, |t_k, V|\} s_V =$$
$$= |f| \{|t_1^s, W|, |t_2^s, W|, \ldots, |t_k^s, W|\} = |t^s, W| . \blacksquare$$

Proposizione 1. *Siano*: α *una formula di* $\mathscr{L}$, s *una sostituzione*, $V \neq \emptyset$ *tali che* $\sigma(\alpha) \subseteq V$ *e* $W = s\{V\}$. *Allora si ha*:

$$|\alpha, V|s_V = |\alpha^s, W|. \tag{2}$$

Dimostrazione. Anche questa dimostrazione procede per induzione, fatta stavolta sul numero dei connettivi e quantificatori presenti nella formula.

a) Sia $\alpha = P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, formula atomica; si ha $\alpha^s = P(t_1^s, t_2^s, \ldots, t_k^s)$. In questo caso si procede in modo analogo a quanto fatto al punto *c*) del Lemma 1.

b) Sia $\alpha = \beta \otimes \gamma$, con $\otimes$ un qualunque connettivo binario. Per ipotesi induttiva la (2) vale per le formule β e γ. D'altra parte la applicazione

$$\mathrm{Mor}_E(s_V, \Omega)\colon \mathrm{Mor}_E(A^V, \Omega) \to \mathrm{Mor}_E(A^W, \Omega)$$

è un omomorfismo di algebre di Heyting, sicchè vale la (2). Il caso della negazione è del tutto analogo.

c) Sia $\alpha = (\exists\xi)\beta(\xi)$ e $x \notin V \cup W$; sia r la sostituzione definita da:

$$\begin{cases} r(z) = s(z) & \text{per ogni } z \neq x\,, \\ r(x) = x\,. \end{cases}$$

si ha allora $\alpha^s = \big((\exists\xi)\beta(\xi)\big)^s = (\exists\xi)\big(\beta(\xi)\big)^r$. Posto $W' = W \cup \{x\}$ e $V' = V \cup \{x\}$ si ha $W' = r\{V'\}$. Indicate con $\pi\colon A^{V'} \to A^V$ e $\pi'\colon A^{W'} \to A^W$ le proiezioni canoniche, la famiglia

$$(\pi'\colon A^{W'} \to A^W;\ r_{V'}\colon A^{W'} \to A^{V'})$$

è compatibile per il diagramma

$$A^W \xrightarrow{s_V} A^V \xleftarrow{\pi} A^{V'} \tag{3}$$

in quanto, per ogni $z \in V$, in virtù della (1) si ha:

$$\varepsilon_z^V \pi r_{V'} = \varepsilon_z^{V'} r_{V'} = |r(z), W'| = |s(z), W|\pi' = \varepsilon_z^V s_V \pi'\,.$$

Inoltre se

$$(m\colon B \to A^W;\ m'\colon B \to A^{V'})$$

è una famiglia compatibile per il diagramma (3), si consideri il morfismo $l\colon B \to A^{W'}$ definito dalle eguaglianze

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \varepsilon_z^{W'} l = \varepsilon_z^W m & \text{per ogni } z \in W\,, \\ \varepsilon_x^{W'} l = \varepsilon_x^{V'} m'\,. \end{cases}$$

È facile verificare che

$$\text{(5)} \qquad m = \pi' l\,; \qquad m' = r_{V'} l\,;$$

viceversa la (5) implica la (4). Al pull-back così ottenuto, è possibile applicare la condizione di BECK (cfr. [2]), relativamente al morfismo $|\beta(x), V'|$, da cui

$$\exists_\pi(|\beta(x), V'|)\, s_V = \exists_{\pi'}(|\beta(x), V'|\, r_{V'})\,.$$

Ma per ipotesi induttiva si ha

$$|\alpha, V|\, s_V = \exists_\pi(|\beta(x), V'|)\, s_V = \exists_{\pi'} |\beta(x)^r, W'| = |(\exists\xi)(\beta(\xi))^r, W| = |\alpha^s, W|\,.$$

Il caso $\alpha = (\forall\xi)\beta(\xi)$ si dimostra in modo del tutto analogo, sfruttando la condizione di BECK relativa al quantificatore universale (cfr. [2]). ∎

Corollario 1. *Siano: α una formula di $\mathscr{L}$, s una sostituzione, $V \neq \emptyset$, tali che $\sigma(\alpha) \subseteq V$ e $s_V\colon A^{s\{V\}} \to A^V$ sia un epimorfismo. Allora si ha*:

$$|\alpha, V| = true_{A^V} \quad \textit{se e solo se} \quad |\alpha^s, s\{V\}| = true_{A^{s\{V\}}}\,. \ ∎$$

Proposizione 2. *Siano: $\alpha(x)$ una formula di $\mathscr{L}$, $V \neq \emptyset$, tali che $\sigma(\alpha(x)) \subseteq V$. Allora si ha*

$$|(\forall\xi)\alpha(\xi), V| = true_{A^V} \quad \textit{se e solo se} \quad |\alpha(x), V| = true_{A^V}\,.$$

Dimostrazione. Sia $y \notin V$ e si ponga $V' = V \cup \{y\}$. Detta $\pi\colon A^{V'} \to A^V$ la proiezione canonica, si ha

$$|(\forall\xi)\alpha(\xi), V| = \forall_\pi |\alpha(y), V'|.$$

Sfruttando la definizione e le proprietà del quantificatore universale, se $|(\forall\xi)\alpha(\xi), V| = true_{A^V}$ allora $|\alpha(y), V'| = true_{A^{V'}}$ e viceversa. Sia s lo scambio fra x e y. Con tale sostituzione si ha, posto $W = s\{V'\}$, che $V \subseteq W$ e $s_{V'}\colon A^W \to A^{V'}$

è un epimorfismo (anzi un isomorfismo con inverso s_W) inoltre $(\alpha(y))^s = \alpha(x)$. Applicando il Corollario 1 si ha $|\alpha(y), V'| = true_{A^{V'}}$ se e solo se $|\alpha(x), W| = true_{A^W}$. Ma per la Osservazione 2, si ha $|\alpha(x), W| = true_{A^W}$ se e solo se $|\alpha(x), V| = true_{A^V}$.

Corollario 2. *Siano: α una formula di $\mathscr{L}$, $V \neq \emptyset$, tali che $\sigma(\alpha) \subseteq V$. Si ha allora:*

$$|\alpha, V| = true_{A^V} \qquad \text{se e solo se} \qquad |\bar{\alpha}, V| = true_{A^V} . \ \blacksquare$$

Osservazione 3. Sin qui si è sempre supposto $V \neq \emptyset$. Se però α è un enunciato di $\mathscr{L}$, ha senso considerare il morfismo $|\alpha, \emptyset|: 1 \to \Omega$. Se il morfismo canonico $a: A \to 1$ è un epimorfismo, è possibile estendere i risultati e le dimostrazioni precedenti anche al caso di $V = \emptyset$. Tale condizione è soddisfatta se A ha elementi, cioè se $\mathrm{Mor}_E(1, A) \neq \emptyset$ (in particolare se $\mathscr{L}$ ha costanti individuali).

2. – Siano $\mathscr{L}'$ una espansione di $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}'$ una E-realizzazione di $\mathscr{L}'$ e $\mathscr{R}$ la data E-realizzazione di $\mathscr{L}$; si dirà che $\mathscr{R}'$ è una espansione di $\mathscr{R}$ ad $\mathscr{L}'$ se e solo se A è l'oggetto di base per entrambe le realizzazioni ed inoltre $\mathscr{R}$ ed $\mathscr{R}'$ coincidono sui simboli di $\mathscr{L}$. Per evitare confusioni, si userà il simbolo $|...|'$ in relazione ad $\mathscr{R}'$. Si ha la seguente

Osservazione 4. Ovviamente si ha che se α è una formula di $\mathscr{L}$ e $\sigma(\alpha) \subseteq V$, $|\alpha, V|' = |\alpha, V|$.

Lemma 2. *Siano: $\alpha = (\exists\xi)\beta(\xi)$ una formula di $\mathscr{L}$ con $\emptyset \neq \sigma(\alpha) = \{y_1, y_2, ..., y_k\}$, variabili libere distinte, $V \supseteq \sigma(\alpha)$, f un simbolo funzionale k-ario non appartenente a $\mathscr{L}$. Se esiste una espansione $\mathscr{R}'$ di $\mathscr{R}$ a $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{f\}$ tale che $|\beta(f(y_1, y_2, ..., y_k)), V|' = true_{A^V}$, allora $|\alpha, V| = true_{A^V}$.*

Dimostrazione. In virtù della Osservazione 2 si può supporre $V = \sigma(\alpha)$. Per ipotesi esiste una E-realizzazione $\mathscr{R}'$ di $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{f\}$ tale che $|\beta(f(y_1, y_2, ..., y_k)), V|' = true_{A^V}$. Fissata una variabile libera $y \notin V$ sia $s: \mathscr{V} \to \mathscr{T}'$ (con $\mathscr{T}'$ si indichi l'insieme dei termini di $\mathscr{L}'$), definita dalle seguenti eguaglianze

$$\begin{cases} s(y) = f(y_1, y_2, ..., y_k) , \\ s(z) = z \qquad \text{per ogni } z \neq y . \end{cases}$$

Si ha $(\beta(y))^s = \beta(f(y_1, y_2, ..., y_k))$. Si ponga $V' = V \cup \{y\}$ e sia $\pi: A^{V'} \to A^V$ la proiezione canonica. Per costruzione $s\{V'\} = V$ e $s_{V'}: A^V \to A^{V'}$ è un morfismo inverso destro della proiezione π. Per la definizione di quantificatore esistenziale si ha

$$|\beta(y),\ V'|' \leqslant \exists_\pi |\beta(y),\ V'|'\pi\,.$$

Ma $\mathrm{Mor}_E(s_{V'}, \Omega)\colon \mathrm{Mor}_E(A^{V'}, \Omega) \to \mathrm{Mor}_E(A^V, \Omega)$ è crescente e quindi per la Proposizione 1

$$|\beta(f(y_1, y_2, \ldots, y_k)),\ V|' = |\beta(y),\ V'|'s_{V'} \leqslant \exists_\pi |\beta(y),\ V'|'\pi s_{V'} = |\alpha,\ V|'\,.$$

Dalla Osservazione 4 e dalla ipotesi segue ora $|\alpha,\ V| = true_{A^V}$. ∎

Lemma 3. *Siano $\alpha = (\exists\xi)\beta(\xi)$ un enunciato di $\mathscr{L}$, V un insieme (eventualmente vuoto), c una costante individuale non appartenente a $\mathscr{L}$. Se esiste una espansione $\mathscr{R}'$ di $\mathscr{R}$ a $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{c\}$, tale che $|\beta(c),\ V|' = true_{A^V}$ allora $|\alpha,\ V| = true_{A^V}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Lemma 2. Si osservi che poichè $\mathscr{L}'$ ha almeno una costante individuale il morfismo canonico $a\colon A \to 1$ è una ritrazione. Si può quindi utilizzare quanto detto alla Osservazione 3. ∎

Sia α una formula di $\mathscr{L}$ in forma normale prenessa; con $\mathfrak{S}(\alpha)$ si indicherà la corrispondente formula aperta in forma di Skolem. La formula $\mathfrak{S}(\alpha)$ non è una formula di $\mathscr{L}$, bensì di una espansione di $\mathscr{L}$. Con $\mathscr{L}_\alpha$ si indicherà la più piccola espansione di $\mathscr{L}$ tale che $\mathfrak{S}(\alpha)$ ne sia una formula. Con tali notazioni si ha il seguente

Teorema 1. *Sia α una formula di $\mathscr{L}$ in forma normale prenessa, $V \supseteq \sigma(\alpha)$. Se esiste una espansione $\mathscr{R}'$ di $\mathscr{R}$ a $\mathscr{L}_\alpha$ tale che $|\mathfrak{S}(\alpha),\ V|' = true_{A^V}$, allora $|\alpha,\ V| = true_{A^V}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione procede applicando ripetutamente (un numero finito di volte) i Lemmi 2 e 3 e la Proposizione 2, iniziando dal quantificatore «più esterno» e proseguendo da sinistra a destra. ∎

3. – Sia E un topos soddisfacente l'assioma di scelta cioè tale che ogni epimorfismo sia una ritrazione. Sotto tale ipotesi aggiuntiva si vuole provare l'inverso del Teorema 1.

Lemma 4. *Siano: $\alpha = (\exists\xi)\beta(\xi)$ una formula di $\mathscr{L}$ con $\emptyset \neq \sigma(\alpha) = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, variabili libere distinte, $V \supseteq \sigma(\alpha)$, f un simbolo funzionale k-ario non appartenente a $\mathscr{L}$. Se $|\alpha,\ V| = true_{A^V}$, allora esiste una espansione $\mathscr{R}'$ di $\mathscr{R}$ a $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{f\}$ tale che $|\beta(f(y_1, y_2, \ldots, y_k)),\ V|' = true_{A^V}$.*

Dimostrazione. Sia $|\alpha, V| = true_{A^V}$; si vuole definire una espansione $\mathscr{R}'$ di $\mathscr{R}$ a $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{f\}$, e quindi basta dare una interpretazione di f. In virtù della Osservazione 2, si può supporre $V = \sigma(\alpha)$. Sia poi $y \notin V$ e si ponga $V' = V \cup \{y\}$ e $\pi \colon A^{V'} \to A^V$ sia la proiezione canonica. Con

$$v\colon Val\,(\beta(y),\, V') \to A^{V'}$$

si indichi la controimmagine di $true\colon 1 \to \Omega$ nel morfismo $|\beta(y),\, V'|'$ e con

$$Val\,(\beta(y),\, V') \xrightarrow{e} Val((\exists\xi)\beta(\xi),\, V) \xrightarrow{u} A^V$$

la epi-mono fattorizzazione di $\pi v\colon Val\,(\beta(y),\, V') \to A^V$. Per l'assioma di scelta esiste $e'\colon Val\,((\exists\xi)\beta(\xi),\, V) \to Val\,(\beta(y),\, V')$, un morfismo inverso destro di e; inoltre poichè $|\alpha, V| = true_{A^V}$, il morfismo u è un isomorfismo.

Si può porre

$$|f|' = \varepsilon_y^{V'} v e' u^{-1}\colon A^V \to A\,.$$

Ciò completa la definizione della E-realizzazione $\mathscr{R}'$, espansione di $\mathscr{R}$ a $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{f\}$. Detta $s\colon \mathscr{V} \to \mathscr{T}'$ la sostituzione definita come nel Lemma 2 si ha $s\{V'\} = V$ e $s_{V'}$ è un morfismo inverso destro della proiezione canonica π. Con tali notazioni si può provare

$$ve' = s_{V'} u\,. \tag{6}$$

Infatti se $z \in V$, $\varepsilon_z^{V'} ve' = \varepsilon_z^V \pi v e' = \varepsilon_z^V u e e' = \varepsilon_z^V u$, mentre dalla (1) $\varepsilon_z^{V'} s_{V'} u = \varepsilon_z^V u$. Inoltre ancora per la (1) si ha

$$\varepsilon_y^{V'} s_{V'} u = |f(y_1, y_2, \ldots, y_k),\, V|' u = |f|' u = \varepsilon_y^{V'} v e' u^{-1} u = \varepsilon_y^{V'} ve'\,.$$

Si può concludere che la (6) è così provata.

Detto $\lambda\colon Val\,(\beta(y),\, V') \to 1$ il morfismo canonico, si ha

$$true\,\lambda = |\beta(y),\, V'|' v$$

e quindi, sfruttando la (6) e la Proposizione 1,

$$true_{A^V} = true\,\lambda e' u^{-1} = |\beta(y),\, V'|' v e' u^{-1} = |\beta(y),\, V'|' s_{V'} u u^{-1} = \\ = |\beta(f(y_1, y_2, \ldots, y_k),\, V)|'\,. \blacksquare$$

Lemma 5. *Siano: $\alpha = (\exists\xi)\beta(\xi)$ un enunciato di $\mathscr{L}$, V un insieme eventualmente vuoto, c una costante individuale non appartenente a $\mathscr{L}$. Se $|\alpha, V| = true_{A^V}$, allora esiste una espansione $\mathscr{R}'$ di $\mathscr{R}$ a $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{c\}$ tale che $|\beta(c), V|' = true_{A^V}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Lemma 4. Si osservi soltanto che se $|\alpha, \emptyset| = true$, si ha $\varepsilon_v^{\{v\}} v e' u^{-1} \colon 1 \to A$ e perciò A ha elementi: si può dunque applicare quanto detto alla Osservazione 3. ∎

Teorema 2. *Sia α una formula di $\mathscr{L}$ in forma normale prenessa, $V \supseteq \sigma(\alpha)$. Se $|\alpha, V| = true_{A^V}$, allora esiste una espansione $\mathscr{R}'$ di $\mathscr{R}$ a $\mathscr{L}_\alpha$ tale che $|\mathfrak{S}(\alpha), V|' = true_{A^V}$.*

Dimostrazione. Si costruisce $\mathscr{R}'$ mediante l'uso dei Lemmi 4 e 5 ed utilizzando altresì la Proposizione 2. ∎

Corollario 3. *Sia α una formula di $\mathscr{L}$ in forma normale prenessa, $V \supseteq \sigma(\alpha)$. Allora si ha:*

$|\alpha, V| = true_{A^V}$ se e solo se esiste una espansione $\mathscr{R}'$ di $\mathscr{R}$ a $\mathscr{L}_\alpha$ tale che $|\mathfrak{S}(\alpha), V|' = true_{A^V}$. ∎

Bibliografia.

[1] M. Coste, *Logique du 1-er ordre dans les topos elementaires* (Note dattiloscritte).

[2] F. W. Lawvere, *Equality in hyperdoctrines and comprehension schema as an adjoint functor*, Proc. Symposia in Pure Math. **17** (1970), 1-14.

[3] H. Rasiowa and R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics*, PWN, Warszawa 1963.

Summary.

For realizations in an elementary topos E satisfying AC, (referring to the definition of truth to be found in [**1**]*) we prove the following: a prenex formula α is true in a realization $\mathscr{R}$ if there is an expansion $\mathscr{R}'$ of $\mathscr{R}$ in which the Skolem transform of α is true.*

* * *