Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1976), 207-212

SALVATORE ANTONUCCI (*)

Conteggio di grafi planari massimali. (**)

1. - Introduzione.

Ricordiamo alcune definizioni ed introduciamo, per comodità, alcune notazioni; avvertiamo che parleremo sempre di grafi non orientati privi di cappi e di spigoli in parallelo.

Un grafo $\mathcal{G}$ *c-labeled* o *L_c-grafo* è una coppia (G, f_c), dove G è un grafo di ordine n con ciclo hamiltoniano c e f_c è una biiezione dell'insieme $V(G)$ nello insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ tale che, se è: $f_c(X) = i$ e $f_c(Y) = i + 1$ per $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n - 1$, è Y il successivo di X sul ciclo c secondo un prefissato verso di percorrenza. Se $f_c(X) = i$, si dirà che i è *l'indirizzo* di X.

Ricordiamo che un grafo si dice *esterno-planare* oppure un *O-grafo* (*outerplanar*, cfr. [2]) se è possibile rappresentarlo sul piano in modo che tutti i suoi vertici (più precisamente i punti che rappresentano i vertici) si trovino su una stessa faccia del grafo; un O-grafo si dice *massimale* o un *OM-grafo* se non è possibile aggiungere ad esso spigolo alcuno senza che si perda la esterno-planarità (¹). In pratica un OM-grafo di ordine n è un H-grafo (grafo con ciclo hamiltoniano) con $2n - 3$ spigoli dei quali n costituiscono il ciclo hamiltoniano e gli altri $n - 3$ (che diremo *corde*) si trovano, in una opportuna rappresentazione del grafo sul piano, in una sola delle regioni in cui il ciclo divide il piano, senza che si abbiano intersezioni di corde al di fuori degli estremi. È facile, poi, far vedere che un OM-grafo ha due vertici almeno di grado 2 (2-vertici); diremo che un OM-grafo che ha due 2-vertici soltanto è un *OM-grafo semplice*.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico della Facoltà d'Ingegneria, Università, 80100 Napoli, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.) - Ricevuto: 29-I-1976.

(¹) Qui e nel seguito saranno detti vertici, spigoli, cicli, ecc., sia i vertici, gli spigoli, i cicli di un grafo, che le loro rappresentazioni sul piano.

Dati due OM-grafi G' e G'', con $V(G') = V(G'')$ e con lo stesso ciclo, diremo che G' e G'' sono *associabili* se nessuna corda di G' è corda di G''. Un grafo G si dirà ottenuto dalla sovrapposizione di G' e di G'' se $V(G) = V(G')$ e se ha per spigoli gli spigoli del ciclo di G' più le corde di G' e di G''.

Nel seguito, per *numero* dei grafi di un certo tipo intenderemo il numero degli elementi di un insieme I dei grafi di quel tipo, di un prefissato ordine, a due a due non isomorfi, tale che ogni grafo di quel tipo sia isomorfo ad uno (e ad uno solo) elemento di I; per *conteggio* dei grafi di un certo tipo si intenderà il calcolo del numero degli elementi dell'insieme I suddetto, che si dirà anche insieme *campione*.

In questa Nota ci siamo occupati del conteggio degli L_cHM-grafi (L_c-grafi massimali) che siano ottenuti dalla sovrapposizione di L_cOM-grafi (L_c-grafi che siano OM-grafi), dei quali uno sia semplice.

Diciamo, allora, S un insieme campione di L_cOM-grafi semplici di ordine n; sia N_n il numero degli elementi di S e sia M_n il numero degli L_cOM-grafi associabili al generico elemento $\mathscr{P}_i$ di S (in [**1**] è dimostrato che tale numero è indipendente da $\mathscr{P}_i$). Diciamo, poi, T l'insieme degli L_cHM-grafi ottenuti sovrapponendo ad ogni elemento di S ognuno degli L_cOM-grafi ad esso associabili; evidentemente si ha: $|T| = M_nN_n$; inoltre ogni L_cHM-grafo del tipo suddetto è isomorfo ad un elemento di T almeno; T, però, contiene elementi isomorfi: se, difatti, si considera l'elemento $\mathscr{G}$ di T che si ottiene sovrapponendo allo L_cOM-grafo semplice $\mathscr{P}_i$ lo L_cOM-grafo semplice $\mathscr{P}_j$, si ha che $\mathscr{G}$ si otterrà anche sovrapponendo $\mathscr{P}_i$ a $\mathscr{P}_j$ (in [**1**] è dimostrato che questo è l'unico modo in cui si possono ottenere elementi isomorfi di T). Tenuto conto di questa osservazione e detti T' un sottoinsieme campione di T e $x_1^{(n)}$, per $i = 1, 2, \ldots, N_n$, il numero degli L_cOM-grafi semplici associabili ad un dato L_cOM-grafo semplice, si ha che:

$$|T'| = M_nN_n - \Big(\sum_{i=1}^{N_n} x_i^{(n)}\Big)/2\,. \tag{1}$$

Il conteggio degli L_cHM-grafi del tipo suddetto è pertanto ricondotto al calcolo di M_n, N_n e, per $i = 1, 2, \ldots, N_n$, di $x_i^{(n)}$.

2. - Conteggio.

Cominciamo con il calcolo di N_n. Diciamo $N_n^{(i)}$ il numero degli L_cOM-grafi semplici di ordine n per i quali uno dei due 2-vertici abbia un indirizzo prefissato i; si dimostra ([**1**]) che è:

$$N_n^{(i)} = 2^{n-4} \tag{2}$$

qualunque sia $i = 1, 2, \ldots, n$ e qualunque sia $n \geqslant 4$.

Poichè, poi, si può far vedere che: $N_n = (\sum_{i=1}^{n} N_n^{(i)})/2$, si ha

$$N_n = n2^{n-5} \qquad (n \geqslant 4)\,. \tag{3}$$

È stato utile conoscere, per i calcoli successivi, il numero $N_n^{(i,\,j)}$ degli L_cOM-grafi semplici aventi i due 2-vertici di indirizzo i e j. Si è dimostrato ([**1**]) che è

$$N_n^{(i,\,j)} = \binom{n-4}{j-i-2}\,, \tag{4}$$

supposto $j \geqslant i+2$, $i \geqslant 1$, $j \leqslant n$ ($<n$, se $i=1$), $n \geqslant 4$.

Passiamo al calcolo di M_n.

Per procedere, osserviamo preliminarmente che, detto X un insieme e $X_1, X_2, \ldots, X_k$ dei sottoinsiemi di X, si ha (per il principio di inclusione ed esclusione):

$$|X - \bigcup_{h=1}^{k} X_h| = |X| + \sum_{h=1}^{k} (-1)^h \Sigma^{(h)} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_h}|\,, \tag{5}$$

dove $\Sigma^{(h)}$ è estesa a tutte le h-uple $i_1, i_2, \ldots, i_h$ con $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_h \leqslant k$.

Consideriamo, poi, un L_cOM-grafo semplice di ordine n ($n \geqslant 4$) e diciamo $a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}$ le sue corde, numerate nel modo seguente: sia V il 2-vertice di indirizzo i più piccolo; detti V' e V'' i vertici adiacenti a V, sia a_1 la corda $\{V', V''\}$; la corda a_i, per $i = 2, 3, \ldots, n-3$, è la corda che ha un estremo coincidente con un estremo di a_{i-1} e l'altro estremo adiacente all'altro estremo di a_{i-1}; diciamo, pure, $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \ldots, A_n^{(n-3)}$ insiemi campioni di L_cOM-grafi di ordine n che hanno corde aventi per indirizzi degli estremi gli stessi indirizzi degli estremi delle corde $a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}$ rispettivamente; diciamo, infine, A_n un insieme campione di L_cOM-grafi di ordine n. Allora si ha

$$M_n = |A_n - \bigcup_{i=1}^{n-3} A_n^{(i)}|\;; \tag{6}$$

il calcolo di M_n è quindi ricondotto, in base alla (5), al calcolo di $|A_n|$ ed al calcolo delle quantità

$$\Sigma^{(h)} |A_n^{(i_1)} \cap A_n^{(i_2)} \cap \ldots \cap A_n^{(i_h)}|\,,$$

dove $\Sigma^{(h)}$ è estesa a tutte le h-uple $i_1, i_2, \ldots, i_h$ per cui risulti $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots . < i_h \leqslant n-3$.

Si può far vedere (l.c.), effettuando il calcolo di dette quantità, che il numero M_n non dipende dallo L_cOM-grafo semplice assegnato.

Per effettuare il calcolo di $|A_n|$ osserviamo innanzitutto che un L_cOM-grafo di ordine n può avere al massimo $[n/2]$ 2-vertici, come è immediato verificare. Diciamo, dunque, $M_{k,n}$ il numero degli L_cOM-grafi di ordine n con k 2-vertici, dove $k = 2, 3, \ldots, [n/2]$. Evidentemente si ha

$$|A_n| = \sum_{k=2}^{[n/2]} M_{k,n} \qquad \text{per} \quad n \geqslant 4 . \tag{7}$$

Diciamo, pure, $R_{k,n}$ il numero degli L_cOM-grafi di ordine n con k 2-vertici dei quali uno abbia indirizzo prefissato i (tale numero è indipendente dall'indice i); si dimostra (l.c.) che è

$$M_{k,n} = (nR_{k,n})/k ; \tag{8}$$

il calcolo di $|A_n|$ è quindi, in definitiva, ricondotto al calcolo delle quantità $R_{k,n}$, per $k = 2, 3, \ldots, [n/2]$.

Orbene, si dimostra (l.c.) che è

$$R_{k,n} = 2R_{k,n-1} + (n - 2k + 1) R_{k-1,n-1}/(k-1) ;$$

da queste formule ricorrenti è possibile dedurre che

$$R_{k,n} = \binom{n-4}{2(k-2)} \cdot 2^{n-k-2} \cdot (2k-5)!!/(k-1)! \tag{9}$$

per $k = 3, 4, \ldots, [n/2]$ e per $n \geqslant 6$. Da ciò, tenendo conto della (7) e della (8) e del fatto che è: $R_{2,n} = 2^{n-4}$, si ottiene

$$|A_n| = \left(\sum_{k=3}^{[n/2]} \frac{n}{k} \binom{n-4}{2(k-2)} \cdot 2^{n-k-2} (2k-5)!!/(k-1)!\right) W + n2^{n-5}, \tag{10}$$

dove $W = 0$ se $n < 6$ e $= 1$ se $n \geqslant 6$.

Per quanto riguarda le quantità $\Sigma^{(h)} |A_n^{(i_1)} \cap A_n^{(i_2)} \cap \ldots \cap A^{(i_h)}_n|$ si ha (l.c.):

$$\Sigma^{(h)} |A_n^{(i_1)} \cap A_n^{(i_2)} \cap \ldots \cap A_n^{(i_h)}| = \bar{\Sigma} S_{j_1} S_{j_2} \ldots S_{j_{h+1}} , \tag{11}$$

dove $\bar{\Sigma}$ è estesa a tutte le $(h+1)$-ple $j_1, j_2, \ldots, j_{h+1}$ di interi maggiori o uguali a 1, per i quali si ha

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_{h+1} = n - 2 \tag{12}$$

e dove $S_t = |A_{t+2}|$.

Passiamo, ora, al calcolo delle quantità $x_i^{(n)}$. Per tale calcolo, ci serviremo della formula (5). Precisamente, diciamo $\bar{A}_n$ un insieme campione di L_cOM-grafi semplici di ordine n e diciamo $A_{n,i}^{(k)}$, per $k = 1, 2, \ldots, n-3$, un insieme campione di L_cOM-grafi semplici di ordine n che hanno la corda $a_k^{(i)}$ (precisamente, che hanno una corda che ha per indirizzi degli estremi quelli degli estremi di $a_k^{(i)}$) di un dato L_cOM-grafo semplice $\mathscr{W}_i$ di ordine n (le cui corde siano numerate nel modo descritto sopra); se $x_i^{(n)}$ è il numero degli L_cOM-grafi semplici associabili a $\mathscr{W}_i$ si ha

$$x_i^{(n)} = |\bar{A}_n - \bigcup_{l=1}^{n-3} A_{n,i}^{(l)}| \tag{13}$$

e quindi, in base alla (5), si ha che il calcolo delle $x_i^{(n)}$ è ricondotto al calcolo di $|\bar{A}_n|$ ed al calcolo delle quantità

$$\Sigma^{(h)} |\bigcap_{t=1}^{h} A_{n,i}^{(i_t)}| , \tag{14}$$

dove la somma è estesa a tutte le h-uple $i_1, i_2, \ldots, i_h$ di interi tali che $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_h \leqslant n-3$.

Si ha subito che $|\bar{A}_n| = N_n$; per quanto riguarda il calcolo della (14), osserviamo anzitutto che ad ogni L_cOM-grafo semplice di ordine n si può associare, in modo biunivoco, una sequenza di $n-4$ interi

$$k_1, k_2, \ldots, k_{n-4} , \tag{15}$$

dove $k_i = 0$ o 1, per $i = 1, 2, \ldots, n-4$ (con una certa regola descritta in [1]); orbene, se la (15) è la sequenza associata a $\mathscr{W}_i$, si dimostra che è

$$|\bigcap_{t=1}^{h} A_{n,i}^{(i_t)}| = 2^{n+i_1-i_h-4} \prod_{t=1}^{h-1} \binom{i_{t+1}-i_t}{K_t} , \tag{16}$$

dove $K_t = \sum_{l=i_t}^{i_{t+1}-1} k_l$.

Da ciò si ottiene

$$x_i^{(n)} = n 2^{n-5} + \sum_{h=1}^{n-3} (-1)^h \Sigma^{(h)} 2^{n+i_1-i_h-4} \prod_{t=1}^{h-1} \binom{i_{t+1}-i_t}{K_t} ; \tag{17}$$

quindi si ha

$$\sum_{i=1}^{N_n} x_i^{(n)} = \frac{n\Sigma^* Q}{2} ,$$

dove Σ^* è estesa a tutte le $(n-4)$-ple (15) e dove si è posto uguale a Q il secondo membro della (17).

In [**1**], infine, si è anche dimostrato che, indicato con E_n il numero degli OM-grafi semplici di ordine n, si ha

$$E_n = 2^{n-6} + 2^{[(n-6)/2]} \qquad (n \geqslant 6) .$$

Bibliografia.

[**1**] S. Antonucci, *Conteggio di grafi planari*, Atti Conv. Geom. Comb. Modena 1975 (in corso di stampa).

[**2**] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[**3**] F. Harary: [•]$_1$ *Graph theory*, Addison Wesley Publ. Com., Londra 1969; [•]$_2$ *Unsolved problems in the enumeration of graphs*, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. **5** (1960), 63-95.

[**4**] G. Polya, *Kombinatorische anzahlbestimmungen für gruppen, graphen und chemische verbindungen*, Acta Math. (1937), 145-254.

[**5**] R. C. Read, *The enumeration of locally restricted graphs* (I), J. London Math. Soc. **34** (1959), 417-436.

Summary.

We study the enumeration of planar maximal graphs with a hamiltonian cycle. We find formulas for enumeration of outerplanar maximal graphs with only two vertices of degree two, of labeled opportunely outerplanar maximal graphs and of labeled opportunely planar maximal graphs with a hamiltonian cycle, obtained by superimposition of two outerplanar maximal graphs of which one has only two vertices of degree two. The obtained results are related without any proof; for further details we refer to [**1**].

* * *