Riv. Mat. Univ. Parma (4) 2 (1976), 199-206

STEFANIA DONNINI (*)

Una relazione concernente le connessioni di una varietà quasi hermitiana. (**)

1. - Introduzione.

In ogni punto x di una varietà quasi hermitiana V, sussiste una notevole relazione che lega il tensore di Kähler $\overset{\circ}{\mathscr{K}}$, il tensore di Nijenhuis N e il tensore $\overset{\circ}{D}J$ ottenuto dal tensore J della struttura quasi complessa per derivazione covariante nella connessione di Levi-Civita $\overset{\circ}{\Gamma}$. Tale relazione consente, come è noto, di caratterizzare le varietà kähleriane come quelle varietà per le quali, in ogni punto, il campo J riesce parallelo nella connessione $\overset{\circ}{\Gamma}$.

Nel presente lavoro si introducono i tensori $\mathscr{K}(\Lambda)$, $D_\Lambda J$, $\mathscr{N}(\Lambda)$ che generalizzano formalmente i tensori $\overset{\circ}{\mathscr{K}}$, $\overset{\circ}{D}J$ ed N (nella forma totalmente covariante), considerando in luogo della connessione di Levi-Civita $\overset{\circ}{\Gamma}$ una qualunque connessione Λ di V (n. **4**, **5**). Si mostra poi al n. **6** che tra di essi sussiste una *relazione fondamentale*, generalizzazione di quella classica.

Dalla relazione ottenuta discendono i teoremi T_1, T_2 del n. **7**, il secondo dei quali fornisce una nuova caratterizzazione delle varietà kähleriane, analoga, ma più generale di quella ricordata all'inizio.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito come Borsista del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.)
Una parte dei risultati, già apparsi nella Tesi di Laurea, n. [2] della bibliografia, è stata esposta in una Riunione del G.N.S.A.G.A. (Perugia, aprile 1975). – Ricevuto: 28-I-1976.

2. - Struttura quasi hermitiana.

Sia V una *varietà a struttura quasi hermitiana* (¹), $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$ $(n \geqslant 2)$, $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}} V = 2n+1$. Sia x un punto di V, T_x lo spazio vettoriale tangente in x a V, T_x^* lo spazio vettoriale duale.

Si considerino il campo tensoriale misto J di classe C^{2n} che determina la *struttura quasi complessa* di V, il *campo di Nijenhuis* N, associato a tale struttura, e una *struttura Riemanniana* g di classe C^1, che, come lecito, si suppone *adattata* alla struttura quasi complessa (²).

Conviene indicare con i simboli J, N, g anche i tensori — appartenenti rispettivamente agli spazi $T_x^* \otimes T_x$, $T_x^* \otimes T_x^* \otimes T_x$, $T_x^* \otimes T_x^*$ — che rappresentano nel punto x di V i campi sopra considerati.

In virtù del fatto che la metrica è adattata, nel punto x di V si ha

$$g = c_1^1 c_2^2 (g \otimes J \otimes J) \;(^3)\,. \tag{1}$$

In altri termini, V è dotata di metrica adattata se e solo se il tensore $H \in T_x^* \otimes T_x^*$, definito nel punto x di V da

$$H = c_2^1 (J \otimes g) \tag{2}$$

risulta *emisimmetrico* (⁴).

Sia poi $\overset{\circ}{\Gamma}$ la *connessione di Levi-Civita* definita dalla metrica (⁵).

Si consideri infine il *campo tensoriale di Kähler* $\overset{\circ}{\mathscr{K}}$ e si indichi ancora con il simbolo $\overset{\circ}{\mathscr{K}}$ il tensore appartenente allo spazio $T_x^* \otimes T_x^* \otimes T_x^*$ che lo rappresenta nel punto x di V. Tale tensore, come noto, è definito dalla relazione

$$\overset{\circ}{\mathscr{K}} = 6 \varepsilon_{123} \overset{\circ}{D} H \;(^6) \tag{3}$$

dove $\overset{\circ}{D}H$ è il tensore di $T_x^* \otimes T_x^* \otimes T_x^*$ ottenuto da H per derivazione covariante nella connessione di Levi-Civita.

(¹) Per le nozioni generali si veda p. es. K. Yano [**8**], Ch. 5, 6, 9.

(²) Ved. p. es. B. Eckmann [**3**], p. 18.

(³) In generale c_k^i è l'applicazione tensoriale di contrazione relativa all'i-esimo indice di contravarianza e al k-esimo indice di covarianza (cfr. p. es. N. Bourbaki [**1**], p. 45).

(⁴) Ved. p. es. B. Eckmann [**3**], p. 19.

(⁵) Ved. p. es. K. Yano [**8**], (1.16), p. 4.

(⁶) In generale $\sigma_{j_1 j_2 j_3 \dots j_t}$ è l'applicazione tensoriale di simmetrizzazione rispetto agli indici $j_1 j_2 j_3 \dots j_t$ di covarianza. Quando si opera su tensori (p, 2), in luogo di σ_{12} scriveremo sempre σ.

Come è noto V è a *struttura hermitiana* se e solo se, in ogni punto di V, risulta $N=0$ (7); cioè se la struttura quasi complessa è indotta da una struttura complessa. In particolare V è *kähleriana* se e solo se, in ogni punto di V, risulta simultaneamente $N=0$, $\overset{\circ}{\mathscr{K}}=0$.

3. - Relazione fondamentale.

Introdotto il tensore $\overset{\circ}{D}J \in T_x^* \otimes T_x^* \otimes T_x$ ottenuto da J per derivazione covariante nella connessione di Levi-Civita, il *campo tensoriale di Nijenhuis* N nel punto x di V può scriversi

$$N = -4\varepsilon c_3^1(J \otimes \varepsilon(\overset{\circ}{D}J)) \text{ (8)}. \tag{4}$$

Interviene nel seguito anche il campo tensoriale $\overset{\circ}{\mathscr{N}}$, rappresentato nel punto x di V dal tensore, indicato anch'esso con $\overset{\circ}{\mathscr{N}}$, definito da

$$\overset{\circ}{\mathscr{N}} = c_3^1(N \otimes g) = -4\varepsilon_{12}\, c_3^1(J \otimes \varepsilon_{12}\overset{\circ}{D}H). \tag{5}$$

È ovvio che *le condizioni* $N=0$, $\overset{\circ}{\mathscr{N}}=0$ *sono equivalenti.*

È anche utile osservare che dalla (2), tenuto conto che $\overset{\circ}{D}g=0$ (9) si ottiene

$$\overset{\circ}{D}H = c_1^1(g \otimes \overset{\circ}{D}J) \tag{6}$$

onde *le condizioni* $\overset{\circ}{D}J=0$, $\overset{\circ}{D}H=0$ *risultano equivalenti.*

Ciò premesso, posto $\alpha = \sigma - \varepsilon$, in ogni punto x di V, *sussiste la relazione*

$$\overset{\circ}{\mathscr{N}} = 2\varepsilon_{12}(c_2^1(J \otimes \overset{\circ}{\mathscr{K}})) + 2c_2^1(H \otimes \alpha\overset{\circ}{D}J) \text{ (10)}. \tag{7}$$

Questa uguaglianza permette di ottenere una caratterizzazione delle varietà kähleriane. Precisamente, *condizione necessaria e sufficiente affinchè la varietà quasi hermitiana* V *sia kähleriana è* $\overset{\circ}{D}J=0$ (11).

(7) Ved. A. Newlander - L. Nirenberg [**6**], p. 393.

(8) In generale $\varepsilon_{j_1,j_2,\dots,j_t}$ è l'applicazione tensoriale di emisimmetrizzazione rispetto agli indici $j_1, j_2, \dots, j_t$ di covarianza. Quando si opera su tensori di tipo (p. 2), in luogo di ε_{12} scriveremo sempre ε.

(9) Ved. p. es. K. Yano [**8**], (1.22), p. 5.

(10) Ved. K. Yano [**8**], (4.10), p. 141.

(11) Ved. p. es. S. Kobayashi - K. Nomizu [**4**], pp. 148-149.

Invero, dalla condizione, tenute presenti le (3), (4) e le osservazioni precedenti si ha subito $N = 0$, $\overset{\circ}{\mathscr{K}} = 0$, onde V è kähleriana (n. **2**). Inversamente se V è kähleriana i tensori N e $\overset{\circ}{\mathscr{K}}$ sono nulli su V (n. 2) e per una delle osservazioni ricordate anche $\overset{\circ}{\mathscr{N}} = 0$; dalla (7) segue ormai subito $\overset{\circ}{D}J = 0$.

4. - Connessioni su V. Il campo tensoriale $R(\Lambda)$.

Si consideri ora su V una connessione Λ; sia Γ_Λ la *connessione simmetrica associata* a Λ e T_Λ la *torsione* di Λ. Indicando con Λ e Γ_Λ anche i relativi simboli di connessione, nel punto x di V si può scrivere

$$\Lambda = \Gamma_\Lambda + T_\Lambda \tag{8}$$

e risulta

$$\Gamma_\Lambda = \sigma\Lambda\,, \qquad T_\Lambda = \varepsilon\Lambda \text{ (}^{12}\text{)}\,. \tag{9}$$

Interviene nel seguito il campo tensoriale $R(\Lambda)$, introdotto da G. B. Rizza nel lavoro [**7**], rappresentato nel punto x di V dal tensore di $T_x^* \otimes T_x^* \otimes T_x$ indicato anch'esso con $R(\Lambda)$ e definito da

$$R(\Lambda) = -\,4\varepsilon c_3^1(J \otimes \varepsilon(D_\Lambda J)), \text{ (}^{13}\text{)} \tag{10}$$

dove $D_\Lambda J$ è il tensore ottenuto da J per derivazione covariante nella connessione Λ. Ad $R(\Lambda)$ si perviene formalmente a partire dal tensore N, sostituendo alla connessione di Levi-Civita la connessione Λ.

Tra i tensori N e $R(\Lambda)$ sussiste la relazione

$$R(\Lambda) = N + 4K(T_\Lambda), \text{ (}^{14}\text{)} \tag{11}$$

ove T_Λ è la torsione della connessione Λ e K un conveniente omomorfismo dello spazio $T_x^* \otimes T_x^* \otimes T_x$ in sè, introdotto da G. B. Rizza ([15]). In particolare se Λ è simmetrica, cioè $T_\Lambda = 0$, risulta $R(\Lambda) = N$.

([12]) Le applicazioni tensoriali σ e ε si intendono estese in modo naturale ai coefficienti della connessione.
([13]) Cfr. p. es. G. B. Rizza [**7**], p. 237.
([14]) Cfr. V. Mangione [**5**], p. 143.
([15]) Ved. G. B. Rizza [7], p. 241.

Poichè, come è noto, è

$$c_2^1(J \otimes J) = -\delta ,$$

per derivazione covariante risulta

$$(c_3^1 + c_2^2)(D_A J \otimes J) = 0 . \tag{12}$$

Se A è una connessione metrica, cioè risulta $D_A g = 0$, le condizioni $D_A J = 0$, $D_A H = 0$ risultano equivalenti.

Si consideri su V un campo di vettori covarianti, rappresentato nel punto x di V dal vettore $\boldsymbol{t}$. Una connessione A si dice *J-semisimmetrica* relativamente a quel campo se la sua torsione T_A nel punto x di V è definita da

$$T_A = \varepsilon(t \otimes J) . \tag{13}$$ [16]

5. - I campi tensoriali $\mathscr{K}(A)$ e $\mathscr{N}(A)$.

In relazione alla connessione A si considerino i campi tensoriale $\mathscr{K}(A)$ e $\mathscr{N}(A)$ rappresentati nel punto x di V dai tensori, indicati anch'essi con $\mathscr{K}(A)$ e $\mathscr{N}(A)$, definiti da

$$\mathscr{K}(A) = 6\varepsilon_{123} D_A H , \tag{14}$$

$$\mathscr{N}(A) = -4\varepsilon_{12} c_3^1(J \otimes \varepsilon_{12} D_A H) . \tag{15}$$

Ai campi tensoriali $\mathscr{K}(A)$, $\mathscr{N}(A)$ si perviene formalmente a partire dai campi $\overset{\circ}{\mathscr{K}}$, $\overset{\circ}{\mathscr{N}}$ sostituendo alla connessione di Levi-Civita la connessione A.

Dal confronto tra le espressioni di $\mathscr{K}(A)$, $\mathscr{N}(A)$ e le espressioni originarie $\overset{\circ}{\mathscr{K}}$, $\overset{\circ}{\mathscr{N}}$, tenute presenti le (8), (10), (2) e la relazione (11), si perviene senza difficoltà alle

$$\mathscr{K}(A) = \overset{\circ}{\mathscr{K}} + 12\varepsilon_{123}\big(c_2^1(H \otimes T_A)\big) , \tag{16}$$

$$\mathscr{N}(A) = \overset{\circ}{\mathscr{N}} + 4c_3^1\big(K(T_A) \otimes g\big) - 2\varepsilon_{12}(D_A g) + 2c_3^1 c_3^1\big(\varepsilon(J \otimes J) \otimes D_A g\big) , \tag{17}$$

dove T_A è la torsione della connessione A e K è l'omomorfismo già ricordato in precedenza.

---

(16) Ved. G. B. Rizza [7], p. 238.

Sussiste la proprietà

P_1. *Se la connessione Λ è J-semisimmetrica risulta $\mathscr{K}(\Lambda)=\overset{\circ}{\mathscr{K}}$. Se Λ è anche metrica, si ha inoltre $\mathscr{N}(\Lambda)=\overset{\circ}{\mathscr{N}}$.*

Un calcolo diretto mostra che nelle ipotesi di J-semisimmetrica si ha $\varepsilon_{123}(c_2^1(H\otimes T_\Lambda)=0$; dalla (16) segue la prima affermazione. Nella stessa ipotesi, in base al teorema T_{14} del lavoro [7] di G. B. Rizza ed alla (11), segue $K(T_\Lambda)=0$. Quindi se $D_\Lambda g=0$, dalla (17) segue la seconda affermazione.

6. - Relazione generale tra $D_\Lambda J$, $\mathscr{N}(\Lambda)$, $\mathscr{K}(\Lambda)$.

Tra i tensori $D_\Lambda J$, $\mathscr{N}(\Lambda)$, $\mathscr{K}(\Lambda)$, introdotti ai n. 4, 5, sussiste una *relazione fondamentale*, che generalizza la (7) del n. **3**. Precisamente

$$\mathscr{N}(\Lambda)=2\varepsilon_{12}\big(c_2^1(J\otimes\mathscr{K}(\Lambda))\big)+2\varepsilon_{12}\big(c_2^1(H\otimes\alpha D_\Lambda J)\big)\,. \tag{18}$$

Se la connessione Λ soddisfa la *condizione*

$$\alpha_{12}D_\Lambda g=c_4^1c_5^2(J\otimes J\otimes D_\Lambda g)\,, \tag{19}$$

dove $\alpha_{12}=\sigma_{12}-\varepsilon_{12}$, in particolare, se Λ è una connessione metrica la (18) si riduce alla

$$\mathscr{N}(\Lambda)=2\varepsilon_{12}c_2^1\big(J\otimes\mathscr{K}(\Lambda)\big)+2c_2^1(H\otimes\alpha D_\Lambda J) \tag{20}$$

del tutto analoga alla (7) del n. **3**.

Alla (18) si perviene così. Tenuta presente la (12) del n. **4**, risulta

$$\varepsilon_{12}\big(c_2^1(H\otimes\alpha D_\Lambda J)\big)=\varepsilon_{12}c_1^1\big(g\otimes c_3^1(J\otimes D_\Lambda J)\big),$$

si verifica poi direttamente che

$$\varepsilon_{12}\big(c_1^1(g\otimes c_3^1(J\otimes D_\Lambda J)\big)=-\,\varepsilon_{12}c_3^1(J\otimes\alpha D_\Lambda H)\big)\,.$$

A questo punto, tenuto conto delle definizioni di $\mathscr{N}(\Lambda)$, $\mathscr{K}(\Lambda)$ al n. **5**, è facile riconoscere che i due membri della (18) sono uguali.

Per giungere alla (20) si noti anzitutto che

$$c_3^1(J\otimes\alpha D_\Lambda H)=+\,c_2^1(H\otimes\alpha D_\Lambda J)+c_4^1c_5^2(J\otimes J\otimes D_\Lambda g)$$

e, analogamente

$$c_3^1(J \otimes \alpha D_A(\alpha H)) = c_4^1(J \otimes c_1^1(g \otimes D_A J)) - \alpha_{12} D_A g \, .$$

I primi membri sono opposti in virtù della emisimmetria di H (n. 2); di qui, tenuto conto della (12) del n. **4**, se sussiste la condizione (19) del n. **6**, il tensore $c_2^1(H \otimes \alpha D_A J)$ risulta emisimmetrico nei primi due indici di covarianza e dalla (18) discende subito la (20).

7. - Alcuni risultati.

La relazione ottenuta al n. **6** consente di stabilire i teoremi

T_1. *Se A è una connessione metrica, $D_A J = 0$ implica $\mathscr{N}(A) = 0 = \mathscr{K}(A)$, e viceversa.*

T_2. *Sia A una connessione metrica e J-semisimmetrica. Condizione necessaria e sufficiente affinchè la varietà quasi hermitiana V sia kähleriana è $D_A J = 0$.*

Poichè la connessione di LEVI-CIVITA $\overset{\circ}{\Gamma}$ è metrica e simmetrica (e quindi J-semisimmetrica), il teorema T_2 generalizza il classico risultato, ricordato alla fine del n. **3**.

Per il teorema T_1, si noti che dalle condizioni $D_A J = 0$, $D_A H = 0$, equivalenti in virtù di una osservazione del n. **4**, tenute presenti le (14), (15) del n. **5** si ha subito $\mathscr{K}(A) = \mathscr{N}(A) = 0$. L'inverso si prova direttamente utilizzando la relazione (20) (17).

Tenuto conto del teorema T_1 e della proprietà P_1 del n. **5**, nelle ipotesi del teorema T_2, $D_A J = 0$ equivale a $\overset{\circ}{\mathscr{K}} = \overset{\circ}{\mathscr{N}} = 0$, cioè a $\overset{\circ}{\mathscr{K}} = 0$ ed $N = 0$, vale a dire all'essere la varietà V kähleriana (n. **2**).

---

(17) Perchè da $\mathscr{K}(A) = \mathscr{N}(A) = 0$ segua $D_A J = 0$ basta che la connessione soddisfi alla condizione (19).

Bibliografia.

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre*, **3**, Hermann, Paris 1958.

[2] S. DONNINI, *Una relazione generale e altri risultati concernenti le connessioni su di una varietà quasi hermitiana*, Tesi di Laurea n. 687, Parma, Novembre 1974.

[3] B. Eckmann, *Cours sur les variètés complexes*, C.I.M.E., III ciclo, Varenna, Cremonese, Roma 1953.

[4] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Interscience Publ., New York 1963.

[5] V. Mangione, *Su alcune classi di connessioni di una varietà quasi complessa*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **9** (1968).

[6] A. Newlander and L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. Mat. **65** (1957).

[7] G. B. Rizza, *Sulle connessioni di una varietà quasi complessa*, Ann. Mat. (4) **68** (1965).

[8] K. Yano, *Differential Geometry on complexes and almost complexes spaces*, Pergamon Press, Oxford 1965.

Summary.

It is common knowledge that on the almost - hermitian manifold subsists an interesting relation between the Nijenhuis' tensor, the Kahler's tensor and the tensor $\overset{\circ}{D} J$ *obtained from the tensor* J *of the almost-complex structure by means of covariant derivation Levi-Civita's connection. In this paper, a more general relation is established, where Levi-Civita connection is replaced by an arbitrary connection. This result permit to obtain a simple characterisation of the kahlerian manifolds, considering the* J*-semisimetric metric connections.*

* * *