Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 265-279

MARIA ANTONIETTA BARATTA (*)

Sulla varietà delle derivate direzionali di una funzione in un'algebra reale con unità. (**)

1. - Introduzione.

Il lavoro è dedicato allo studio della varietà delle derivate direzionali destre, sinistre di una funzione in una qualunque algebra A su $\boldsymbol{R}$ di dimensione finita n e dotata di unità (***).

Si stabilisce al n. **5** che, nello spazio euclideo n-dimensionale ampliato, la varietà in questione è una ipersuperficie algebrica di ordine n, che ammette una rappresentazione parametrica razionale.

Si mostra poi al n. **6** che il comportamento all'infinito della varietà dipende in modo essenziale dai divisori dello zero di A (Teor. $\mathbf{T}_1$). Inoltre la varietà passa per l'origine, se e solo se lo jacobiano dell'applicazione $y = f(x)$ riesce nullo (Teor. $\mathbf{T}_2$).

Al n. **7** si trova poi uno studio completo della varietà delle derivate direzionali con riferimento alle algebre A_8. Vengono esaminati anche i casi in cui la varietà riesce degenere.

Infine i nn. **8**, **9**, **10**, sono dedicati all'algebra dei quaternioni.

La varietà delle derivate direzionali viene studiata prima da un punto di vista generale. Si ottiene un risultato analogo a quello stabilito nel 1928 da E. KASNER relativo all'algebra $\boldsymbol{C}$ (Teor. $\mathbf{T}_3$, n. **8**).

Successivamente la varietà viene studiata in relazione alla classe delle funzioni di MARTINELLI (n. **9**) ed alla classe coniugata (n. **10**). Nel primo caso

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca G.N.S.A.G.A. del C.N.R. Ricevuto: 15-XII-1975.

(***) Ringrazio il prof. G. B. RIZZA per avermi suggerita questa ricerca.

la varietà è spezzata in due iperconi quadrici (teoremi $\mathbf{T}_4$, $\mathbf{T}_5$); nel secondo in un ipercono quadrico ed in una ipersfera (teorema $\mathbf{T}_6$).

2. - Generalità.

Sia A un'algebra associativa su $\boldsymbol{R}$ di dimensione finita e dotata di unità u.

Fissata in A una base $\{u_k\}$, ogni elemento $x \in A$ si può scrivere, in modo unico, nella forma:

$$x = x^k u_k\,, \qquad x^k \in \boldsymbol{R}\ (^1)\,.$$

Sia J l'applicazione iniettiva di A sullo spazio euclideo $\boldsymbol{R}^n$ definita da

$$J : x \mapsto (x^1, \ldots, x^n)\,. \tag{1}$$

Si consideri in A la topologia (di HAUSDORFF) immagine della topologia ordinaria di $\boldsymbol{R}^n$ mediante l'applicazione J^{-1}.

Nel seguito è opportuno ampliare nel modo consueto lo spazio euclideo $\boldsymbol{R}^n$, considerando lo spazio $\boldsymbol{R}^n$, descritto dalle coordinate omogenee $\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^n$, essendo $x^k = \xi^k/\xi^0$.

Come è noto, i divisori dello zero sinistri, destri, di A sono gli elementi x, per i quali si ha rispettivamente

$$\det(\gamma^r_{hk} x^h) = 0\,, \qquad \det(\gamma^r_{hk} x^k) = 0\,, \tag{2}$$

essendo γ^r_{hk} le costanti di moltiplicazione di A (²).

L'esistenza dell'unità u assicura che le (2) non sono identicamente soddisfatte, e inoltre che *ogni divisore dello zero sinistro è anche divisore dello zero destro* (³). In altre parole, nelle ipotesi attuali, le due equazioni (2) sono equivalenti.

Tenuta presente l'applicazione J, definita dalla (1), l'*insieme dei divisori dello zero di A, dà luogo in $\boldsymbol{R}^n$ ad un cono algebrico K di ordine n con vertice nell'origine.*

3. - Algebre A_2 e algebra Γ.

È noto che le algebre reali di dimensione 2 su $\boldsymbol{R}$, dotate di unità, sono commutative e, a meno di isomorfismi, si riducono a tre. Esse vengono nel

---

(¹) In questo lavoro si fa uso della convenzione di somma di EINSTEIN.

(²) Ved. p. es. G. SCORZA [9], p. 287.

(³) Ved. p. es. G. SCORZA [9], p. 213.

seguito indicate con A_ε ($\varepsilon = \pm 1, 0$). A_1 è isomorfa all'algebra $\boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}$, dove $\boldsymbol{R}$ è l'insieme dei reali pensato come algebra su se stesso e il simbolo $\oplus$ denota composizione diretta (*algebra bireale*). A_{-1} è l'insieme $\boldsymbol{C}$ dei numeri complessi pensato come algebra su $\boldsymbol{R}$ di dimensione due (*algebra complessa*). A_0 è l'unica delle tre algebre in considerazione che possegga elementi nilpotenti non nulli (algebra duale) (4).

Previa una opportuna scelta della base u_1, u_2, in A_ε, la tavola di moltiplicazione è data da $u_1 u_k = u_k u_1 = u_k$ $(k = 1, 2)$, $u_2 u_2 = \varepsilon u_1$, essendo $u_1 = u$ la unità dell'algebra.

Interessano per il seguito i *divisori dello zero di* A_ε. L'elemento $x = x^k u_k$ $(x_k \in \boldsymbol{R})$ di A_ε è un divisore dello zero se e solo se risulta:

$$(x^1)^2 - \varepsilon (x^2)^2 = 0 \text{ (}^5\text{)} .$$

I divisori dello zero sono quindi rappresentati in $\boldsymbol{R}^2$ da due rette per la origine, rispettivamente reali e distinte ($\varepsilon = 1$), complesse e coniugate ($\varepsilon = -1$), reali e coincidenti ($\varepsilon = 0$).

Si consideri ora l'algebra $\boldsymbol{\Gamma}$ dei *quaternioni reali*. $\boldsymbol{\Gamma}$ è *un'algebra con divisione di dimensione* 4 (6).

Denotata con $\{u_k\}$ la base canonica in $\boldsymbol{\Gamma}$ ($u_1 = u$ è l'unità di $\boldsymbol{\Gamma}$), la tavola di moltiplicazione è ben nota (7).

Conviene rilevare che in $\boldsymbol{\Gamma}$ *esiste uno ed un solo anti-isomorfismo involutorio k tale che, per ogni x di $\boldsymbol{\Gamma}$ si abbia*

$$x \cdot k(x) = N(x) u_1 \tag{3}$$

essendo $N(x)$ un numero reale positivo.

Esso è l'ordinario *coniugato*. Precisamente

$$k\colon x = x^1 u_1 + x^2 u_2 + x^3 u_3 + x^4 u_4 \mapsto \bar{x} = x^1 u_1 - x^2 u_2 - x^3 u_3 - x^4 x_4 .$$

In virtù dell'osservazione precedente l'ordinaria nozione di coniugio risulta indipendente dalla base scelta in $\boldsymbol{\Gamma}$.

---

(4) Per le nozioni essenziali sulle algebre ved. p. es. A. A. ALBERT **[1]**, 10; N. BOURBAKI **[4]**, Ch. 2, 7; B. SEGRE **[10]**, vol. I, Cap. IV, § 3; L. BASSOTTI e G. B. RIZZA **[3]**, n. 2.

(5) Qui e nel seguito, tra i divisori dello zero, si intende includere anche lo zero.

(6) Ved. p. es. B. SEGRE **[10]**, p. 432.

(7) Ved. p. es. B. SEGRE **[10]**, vol. II, p. 431.

Dalla (3), tenuto conto della tavola di moltiplicazione, segue

$$N(x) = \sum (x^k)^2 .$$

Il numero reale positivo $N(x)$ è la *norma di* x.

È comodo per il seguito porre

$$n(x) = (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 . \tag{4}$$

Nell'algebra $\mathbf{\Gamma}$ ogni elemento $x \neq 0$ è dotato di inverso e risulta

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{N(x)} .$$

Infine siano α, β elementi non nulli di $\mathbf{\Gamma}$. Essi a meno dell'applicazione J nel n. **2**, possono pensarsi come punti di $\boldsymbol{R}^4$. Ciò premesso, la condizione di ortogonalità tra le rette che uniscono l'origine ai punti α, β è data da

$$\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} = 0 . \tag{5}$$

4. - Derivate direzionali destre.

Sia $y = f(x)$ una funzione di classe C^1 definita in un aperto $U \in A$ e a valori in A. Con riferimento alla base $\{u_k\}$ è quindi:

$$y^k = y^k(x^1, \dots, x^n)$$

con le y^k funzioni di classe C^1 nell'aperto $JU \in \boldsymbol{R}^n$.

Sia $\underset{\circ}{x}$ un punto di U ed α un elemento di A, *non divisore dello zero* (⁸). Gli elementi

$$x = \underset{\circ}{x} + \alpha t , \qquad t \in \boldsymbol{R}$$

danno luogo in $\boldsymbol{R}^n$ ad una retta di coefficienti direttori α^k.

Ciò premesso, è naturale introdurre il *rapporto incrementale destro* $\Delta y (\Delta x)^{-1}$ *della funzione* $y = f(x)$ *nel punto* $\underset{\circ}{x}$ *e nella direzione* α. Precisamente

$$\Delta y (\Delta x)^{-1} = \Delta y (\alpha \Delta t)^{-1} .$$

(⁸) Come si è notato alla fine del n. **2** l'insieme dei divisori dello zero di A è un *sottoinsieme proprio di* A.

Il limite del rapporto $\Delta y(\Delta x)^{-1}$ per $\Delta t \to 0$ è *la derivata direzionale destra* $D_\alpha y$ della funzione $y = f(x)$ relativa alla direzione α ed al punto $\underset{\circ}{x}$ (9).

Precisamente risulta

$$D_\alpha y = \left(\frac{\partial y}{\partial x^k} \alpha^k \right) (\alpha)^{-1} \tag{6}$$

le $\partial y / \partial x^k$ intendendosi valutate in $\underset{\circ}{x}$.

In modo perfettamente analogo si perviene all'espressione della derivata direzionale sinistra ${}_\alpha D y$ della $y = f(x)$ relativa al punto $\underset{\circ}{x}$ e alla direzione α.

Può accadere che le derivate direzionali destre $D_\alpha y$, sinistre ${}_\alpha D y$, della funzione $y = f(x)$ nel punto $\underset{\circ}{x}$ risultino *indipendenti dalla direzione* α. In tal caso la funzione y si dice *monogena* a destra, sinistra, in $\underset{\circ}{x}$ e la $D_\alpha y$, ${}_\alpha D y$ è la sua *derivata* destra, sinistra, rispettivamente (10).

In questo caso, posto $p = f'(x_0) = D_\alpha y$, dalla (6) segue subito

$$\frac{\partial y^r}{\partial x^k} = \gamma^r_{hk} p^h , \qquad p^h \in \boldsymbol{R} , \tag{7}$$

le derivate a primo membro intendendosi valutate nel punto $\underset{\circ}{x}$. Dalle (7) eliminando le p^h discendono le condizioni di monogeneità.

5. - Varietà delle derivate direzionali. Prime osservazioni.

Sia $y = f(x)$ una funzione di classe C^1 in U ed $\underset{\circ}{x}$ un punto di U (n. 4).

Al variare della direzione α, *le derivate direzionali destre* $D_\alpha y$, *relative al punto* $\underset{\circ}{x}$, *costituiscono in* A *il sottoinsieme definito parametricamente dall'equazione:*

$$X = \left(\frac{\partial y}{\partial x^k} \alpha^k \right) (\alpha)^{-1} \tag{8}$$

intendendosi le $\partial y / \partial x^k$ *valutate in* $\underset{\circ}{x}$ (11).

Come già si è avvertita al n. 4 sono escluse le direzioni α divisori dello zero (destri) dell'algebra.

---

(9) L'esistenza e l'unicità del quoziente destro di Δy rispetto a Δx è assicurata dall'ipotesi fatta su α.

(10) Ved. p. es. G. B. Rizza [8]$_1$, p. 182-183; G. B. Rizza [8]$_2$, p. 310.

(11) Nel seguito ci si riferisce sempre alle derivate direzionali destre. L'altro caso è del tutto analogo.

Sia $\mathscr{V}$ *l'immagine in* $\boldsymbol{R}^n$ *di questo sottoinsieme.* La (8) può riguardarsi come una rappresentazione parametrica di $\mathscr{V}$. Essa *mostra che* $\mathscr{V}$ *è una varietà di dimensione* $n-1$ *in* $\boldsymbol{R}^n$ (12).

Si consideri, ora l'equazione

$$X\alpha = \frac{\partial y}{\partial x^k}\,\alpha^k \tag{9}$$

equivalente alla (8), quando la direzione α non è un divisore (destro) dello zero di A.

Si osservi, inoltre, che la (9) può anche scriversi

$$\gamma^r_{hk}\,\alpha^k X^h = \frac{\partial y^r}{\partial x^k}\,\alpha^k\,. \tag{10}$$

Il sistema (10), nelle ipotesi indicate su α, equivale, quindi, alla (8).

Poichè risulta $\det(\gamma^r_{hk} - \alpha^k) \neq 0$, dalla (10) si deduce che $\mathscr{V}$ è *una ipersuperficie razionale.*

È bene rilevare ora che la (9) ha senso anche per direzioni α divisori (destri) dello zero di A. Essa può dunque riguardarsi come una rappresentazione parametrica implicita di una *varietà* V, *rappresentante le derivate destre della funzione* $y = f(x)$ *in* $\underset{0}{x}$, *relative a tutte le direzioni* α.

Poichè ogni divisore (destro) dello zero di A può sempre ottenersi come limite di elementi di A non divisori (destri) dello zero, *la varietà* V *rappresentata dalle* (9), (10) *può pensarsi ottenuta completando opportunamente la varietà* $\mathscr{V}$.

Dalla (10), tenuto conto che le α^k non sono tutte nulle, discende *l'equazione cartesiana della varietà*

$$\det\left(\gamma^r_{hk}\,X^h - \frac{\partial y^r}{\partial x^k}\right) = 0\,. \tag{11}$$

V *è dunque una ipersuperficie algebrica di ordine* n *in* $\boldsymbol{R}^n$.

6. - Ulteriori risultati.

Conviene ora considerare nello spazio ampliato $\tilde{\boldsymbol{R}}^n$ la varietà $\tilde{V}$ di equazione

$$\det\left(\gamma^r_{hk}\,\xi^h - \frac{\partial y^r}{\partial x^k}\,\xi_0\right) = 0\,. \tag{12}$$

---

(12) Invero $\mathscr{V}$ è descritta dagli n parametri omogenei α^k.

Ciò premesso, *i punti impropri di $\tilde{V}$ si ottengono tutti e soltanto da direzioni α divisori (destri) dello zero.*

Infatti assegnata una $(n+1)$-pla $\tilde{X} = (\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^n)$ soddisfacente alla (12), esiste un $\alpha \neq 0$ tale che

$$\gamma_{hk}^r \alpha^k \xi^h = \frac{\partial y^r}{\partial x^k} \alpha^k \xi^0 . \tag{13}$$

Tenuto conto della (10), α può interpretarsi come una direzione, che dà luogo alla derivata destra $\tilde{X}$. In particolare se $\tilde{X}$ è un punto improprio ($\xi^0 = 0$) segue $\det(\gamma_{hk}^r \alpha^k) = 0$ e cioè α è un divisore (destro) dello zero di A.

È bene aggiungere una osservazione sui punti $\tilde{X}$ di $\tilde{V}$, corrispondenti ad un α *divisore* (*destro*) *dello zero*. In generale il rango della matrice

$$M_{n\ n+1} = \left(\frac{\partial y^r}{\partial x^k} \alpha^k \ \gamma_{hk}^r \alpha^k \right)$$

sarà massimo, cioè n. Tenuta presente la (13) si otterrà un unico punto $\tilde{X}$; questo è necessariamente improprio come appare subito dalla (10). Se invece il rango di $M_{n,\,n+1}$ è inferiore ad n, l'esame del sistema (10) mostra che ad un α divisore dello zero possono corrispondere anche punti $\tilde{X}$ proprii.

In definitiva, *indicata con $\tilde{V}_\infty$ la varietà dei punti impropri di $\tilde{V}$ e con V_0 l'insieme dei punti di V, che provengono da direzioni divisori (destri) dello zero, risulta*:

$$\tilde{V} = V \cup \tilde{V}_\infty = \mathscr{V} \cup V_0 \cup V_\infty .$$

Conviene ora enunciare i teoremi

T$_1$ – *Il cono che dall'origine proietta la varietà all'infinito di $\tilde{V}$ coincide con il cono K che rappresenta in $\boldsymbol{R}^n$ i divisori dello zero dell'algebra A.*

Infatti, tenuto conto della (12) si riconosce subito che $\tilde{V}_\infty$ ha per equazioni

$$\det(\gamma_{hk}^r \xi^h) = \xi^0 = 0 .$$

Si perviene poi subito al risultato, tenendo presente la (2).

T$_2$ – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista almeno una direzione α tale che risulti $D_\alpha y = 0$ è che sia*

$$\det\left(\frac{\partial y^r}{\partial x^k}\right) = 0 . \tag{14}$$

La condizione è necessaria. Infatti se il sistema (10) ha come soluzione $X^h = 0$ $(h = 1, \ldots, n)$, in corrispondenza di una n-upla α^k, con $\alpha = \alpha^k u_k \neq 0$, risulta $(\partial y^r / \partial x^k)\alpha^k = 0$ $(r = 1, \ldots, n)$ onde segue la (14).

La condizione è sufficiente. Infatti se vale la (14) esiste una n-upla α^k, con $\alpha = \alpha^k u_k \neq 0$ per la quale riesce $(\partial y^r / \partial x^k)\alpha^k = 0$. Di conseguenza il sistema (10) diviene $\gamma^r_{hk}\alpha^k X^h = 0$ e ammette come soluzioni $X^h = 0$, cioè $D_\alpha y = 0$.

Si consideri, infine, il caso particolare delle *funzioni monogene a destra.*

In virtù della (7), la (11) diviene

$$\det\left(\gamma^r_{hk}(X^h - p^h)\right) = 0 \, .$$

In conclusione se $y = f(x)$ è monogena a destra in $\underset{\circ}{x}$, *la varietà* $\mathcal{V}$ *si riduce al punto* $p = (p^1, \ldots, p^n)$, *mentre* V *è il cono* K_p *di vertice* p, *parallelo al cono* K *dei divisori* (*sinistri*) *dello zero* (n. **2**).

7. - Derivate direzionali nelle algebre A_ε.

Si considerino ora, in particolare, le algebre A_ε con le basi indicate al n. **3**.

Dalla (11) segue subito che la varietà V, *che rappresenta in* $\mathbf{R}^2$ *le derivate direzionali* (*destre*) *della funzione* $y = f(x)$ *nel punto* $\underset{\circ}{x}$, *è la conica di equazione*

$$(X^1)^2 - \varepsilon(X^2)^2 - (c^1_1 + c^2_2)X^1 + (c^1_2 + \varepsilon c^2_1)X^2 + c^1_1 c^2_2 - c^1_2 c^2_1 = 0,$$

dove si è posto $c^r_k = (\partial y^r / \partial x^k)_{\underset{\circ}{x}}$.

In accordo con il teorema $\mathbf{T}_1$ del n. **6**, *i punti impropri di* $\tilde{V}$ *coincidono con i punti impropri delle rette, che rappresentano in* $\mathbf{R}^2$, *i divisori dello zero di* A_ε (n. **3**).

Secondo che $\varepsilon = \pm 1, 0$ si ha rispettivamente *una iperbole equilatera*, con asintoti paralleli alle rette dei divisori dello zero, ed assi paralleli agli assi coordinati, *una circonferenza*, *una parabola* con asse parallelo alla retta dei divisori dello zero, cioè all'asse X^2 (13).

Si riconosce immediatamente che V è *degenere*, se e solo se

$$\varepsilon(c^1_1 - c^2_2)^2 = (c^1_2 - \varepsilon c^2_1)^2 \, . \tag{15}$$

---

(13) Nel caso dell'algebra complessa ($\varepsilon = -1$) il risultato è noto (circonferenza di KASNER). Ved. E. KASNER [**6**], pp. 75-82.

In particolare la (15) è soddisfatta se la funzione è monogena ([14]); anzi questo è l'unico caso per l'algebra $C \equiv A_{-1}$.

Se $\varepsilon = 0$, la (15) si riduce a $c_2^1 = 0$ e la parabola V degenera nelle rette

$$X^1 = c_1^1\,, \qquad X^1 = c_2^2\,; \tag{16}$$

queste coincidono se e solo se la funzione è monogena. Esclusa questa eventualità, i punti della prima retta provengono da direzioni α non divisori dello zero, quelli della seconda dall'unica direzione α divisore dello zero; pertanto le $(16)_1$, $(16)_2$ rappresentano rispettivamente i sottoinsiemi $\mathscr{V}$, V_0 di $\boldsymbol{R}^n$ (n. **5**, **6**).

Se $\varepsilon = 1$, la (15) si spezza nelle

$$c_1^1 - c_2^2 = \pm\,(c_2^1 - c_1^2) \tag{17}$$

e l'iperbole V degenera rispettivamente nelle rette

$$X^1 + X^2 = c_1^1 + c_1^2\,, \qquad X^1 - X^2 = c_1^1 - c_2^1 \tag{18}$$

o nelle rette

$$X^1 - X^2 = c_1^1 - c_1^2\,, \qquad X^1 + X^2 = c_1^1 + c_2^1\,. \tag{19}$$

Le due condizioni (17) sono simultaneamente soddisfatte se e solo se la funzione è monogena. In tal caso le coppie di rette (18), (19) coincidono.

I punti della retta $(18)_1$, $(19)_1$, rispettivamente, con la sola esclusione del punto $p = [((c_1^1 + c_2^2)/2,\ (c_2^1 + c_1^2)/2)]$, comune anche alle rette $(18)_2$, $(19)_2$ provengono da direzioni α non divisori dello zero e costituiscono la varietà $\mathscr{V}$, mentre i punti della $(18)_2$, $(19)_2$ provengono da direzioni α divisori dello zero e costituiscono la varietà V_0 (n. **6**).

8. - Derivate direzionali nell'algebra $\boldsymbol{\Gamma}$.

Si consideri ora l'algebra $\boldsymbol{\Gamma}$ dei quaternioni reali e in essa la base canonica (n. **3**). Conviene anzitutto ricordare che l'algebra $\boldsymbol{\Gamma}$ non ha divisori dello zero propri, onde *le varietà* $\mathscr{V}$ *e* V *del n.* **5**, *nel caso attuale coincidono.*

([14]) Ved. p. es. L. Bassotti e G. B. Rizza [3], p. 6.

Ciò premesso, la (11) diviene

$$\det\begin{pmatrix} X^1-c_1^1 & -X^2-c_2^1 & -X^3-c_3^1 & -X^4-c_4^1 \\ X^2-c_1^2 & X^1-c_2^2 & -X^4-c_3^2 & X^3-c_4^2 \\ X^3-c_1^3 & X^4-c_2^3 & X^1-c_3^3 & -X^2-c_4^3 \\ X^4-c_1^4 & -X^3-c_2^4 & X^2-c_3^4 & X^1-c_4^4 \end{pmatrix}=0 \tag{20}$$

avendo posto $c_k^r=(\partial y^r/\partial x^k)_{\overset{x}{0}}$.

Introdotte coordinate omogenee ξ^k (*n.* **2**), si sviluppi il determinante; la equazione (20) diviene (15)

$$F(\xi^0,\ldots,\xi^4)=\sum_0^4(-1)^h p_h(\xi^0)^h=0 \tag{21}$$

ove

$$S=(\xi^1)^2+(\xi^2)^2+(\xi^3)^2+(\xi^4)^2\,, \tag{22}$$

$$\begin{cases} p_0=\det(\gamma_{hk}^r\xi^h)=S^2\,, \qquad p_4=\det(c_h^r)\,, \\ p_1=S[(c_1^1+c_2^2+c_3^3+c_4^4)\xi^1+(c_2^1-c_1^2+c_3^4-c_4^3)\xi^2+ \\ \qquad +(c_1^3-c_3^1+c_4^2-c_2^4)\xi^3+(c_1^4-c_4^1+c_2^3-c_3^2)\xi^4]\,. \end{cases} \tag{23}$$

Sussiste il teorema

T$_3$ – *La varietà* $\tilde V$ *sega l'iperpiano improprio nell'assoluto* Ω *di* $\tilde{\mathbf{R}}^n$ *contato due volte. Precisamente,* Ω *è luogo di punti almeno doppi per la varietà* $\tilde V$.

La prima parte dell'asserto, che risulta in accordo con quanto affermato dal Teorema **T**$_1$ del n. **6**, segue direttamente dalle (21), (22), (23).

Per stabilire la seconda parte, si derivi la funzione $F(\xi^0,\ldots,\xi^4)$ primo membro della (21), rispetto alle variabili $\xi^0,\ldots,\xi^4$.

Tenuto conto delle (22) e (23) si ottiene

$$\frac{\partial F}{\partial\xi^0}=-p_1+\varrho_0\,,\qquad \frac{\partial F}{\partial\xi^j}=4S\xi^j+\varrho_j \qquad (j\neq 0)$$

dove $\varrho_0,\ldots,\varrho_4$ sono prodotti che hanno ξ^0 a fattore.

(15) Ved. p. es. F. Severi [**11**], p. 46.

Nei punti di Ω si annulla ξ^0, e quindi si annullano le ϱ_j; inoltre si annulla S e di conseguenza p_1. In definitiva su Ω riescono nulle le derivate $\partial F/\partial \xi^k$ $(k = 0, \dots, 4)$. Ciò prova l'asserto.

Il Teorema $\mathbf{T}_3$ può riguardarsi come una generalizzazione all'algebra $\mathbf{\Gamma}$ del classico risultato di E. KASNER per l'algebra $\boldsymbol{C}$ (16).

9. - Derivate direzionali delle funzioni di Martinelli.

Nell'algebra dei quaternioni $\mathbf{\Gamma}$ hanno interesse *le funzioni di Martinelli* (17) *e le loro coniugate*. Le due classi di funzioni vengono nel seguito indicate con $\mathcal{M}$, $\bar{\mathcal{M}}$, rispettivamente.

Sia $y = f(x)$ una funzione di classe C^1 in un aperto U di $\mathbf{\Gamma}$ a valori in $\mathbf{\Gamma}$. La funzione y appartiene alla classe $\mathcal{M}$, $\bar{\mathcal{M}}$ se e solo se, in ogni punto x di U si ha rispettivamente

$$\mathrm{d}y = A(x)\, \mathrm{d}x\, B(x)\,, \tag{24}$$

$$\mathrm{d}y = A(x)\, \mathrm{d}\bar{x}\, B(x)\,, \tag{25}$$

con $A(x)$, $B(x)$ quaternioni indipendenti da $\mathrm{d}x$ (18).

Si riconosce che sono funzioni di MARTINELLI, le funzioni lineari fratte e in particolare le funzioni lineari. Le funzioni lineari-fratte (e in particolare le funzioni lineari) della variabile coniugata $\bar{x}$, appartengono invece a $\bar{\mathcal{M}}$.

Ciò premesso, sussistono i teoremi

$\mathbf{T}_4$ – *Se $y = f(x)$ appartiene alla classe $\mathcal{M}$ e se nel punto $\underset{0}{x}$ di U si ha $a = A(\underset{0}{x}) \neq 0$, $b = B(\underset{0}{x}) \neq 0$, la varietà V delle derivate direzionali destre della funzione y è costituita da due iperconi isotropi H, $\bar{H}$ con vertici immaginari coniugati.*

$\mathbf{T}_5$ – *Gli iperconi H, $\bar{H}$ (oltre all'assoluto) hanno in comune una sfera Σ. I punti di Σ e i vertici di H, $\bar{H}$ sono i punti doppi di V. I punti di Σ sono gli unici punti reali di V.*

---

(16) Ved. la nota (13).

(17) Le funzioni di questo tipo, di una o più variabili quaternionali, hanno un ruolo essenziale nella definizione di varietà a struttura quaternionale generalizzata (E. MARTINELLI [7], p. 356). Queste funzioni rientrano come caso particolare tra quelle studiate da HAUSDORFF [5], pp. 43-61 e L. AUTONNE [2], pp. 53-104.

(18) Per la (24), si confronti E. MARTINELLI [7], p. 356 nel caso particolare che la matrice A abbia ordine 1.

Per stabilire i teoremi $\mathbf{T}_4$, $\mathbf{T}_5$ conviene anzitutto osservare che, tenuto conto della (24), la (8) diviene

$$X = a\alpha b\alpha^{-1}$$

(*equazione parametrica di* V).

Si consideri ora la *trasformazione*

$$X = aZ\,. \tag{26}$$

Come è noto, la (26) si può ottenere componendo una conveniente *rotazione con centro nell'origine* con *l'omotetia con centro nell'origine e rapporto* $\sqrt{N(a)}$ (19).

Ciò consente di ricondurre lo studio di $\mathcal{V}$ a quello, più semplice, della varietà W di equazione parametrica

$$Z = \alpha b\alpha^{-1}\,.$$

Eliminando i parametri α^k si ottiene l'equazione cartesiana

$$\det(\gamma^r_{hk} Z^h - \gamma^r_{kh} b^h) = 0\,.$$

Sviluppando poi il determinante a primo membro, che riesce pseudosimmetrico (20), e tenendo presente la (4), si perviene alla equazione

$$(Z^1 - b^1)^2[(Z^1 - b^1) + 2n(Z) + 2n(b)] + [n(z) - n(b)]^2 = 0\,. \tag{27}$$

Lo studio dei punti doppi di W non presenta difficoltà. Precisamente, i punti doppi di W sono i punti di coordinate

$$Z^1 = b^1 \pm \sqrt{n(b)}\,, \qquad Z^2 = Z^3 = Z^4 = 0 \tag{28}$$

e i punti della sfera

$$Z^1 - b^1 = N(Z) - N(b) = 0 \text{ (21)}\,. \tag{29}$$

(19) Ved. p. es. E. STUDY [**12**], p. 452. Si noti che, per ipotesi, è $a \neq 0$.
(20) Ved. p. es. F. SEVERI [**11**], p. 46.
(21) Il comportamento all'infinito delle varietà $\tilde{V}$ e $\tilde{W}$ è precisato dal $\mathbf{T}_3$ del n. **8**.

Si considerino ora gli *iperconi isotropi* con vertici nei punti di coordinate (28). Si ottengono le *equazioni*

$$(Z^1 - b^1 \mp i\sqrt{n(b)})^2 + n(Z) = 0 \,. \tag{30}$$

Si verifica poi senza difficoltà che il prodotto membro a membro delle (30) conduce alla (27). In definitiva, tenuta presente la osservazione sulla trasformazione (26) si perviene al Teorema $\mathbf{T}_4$.

Si noti che gli iperconi (30) hanno la medesima sezione con l'iperpiano $Z^1 = b^1$ e cioè la sfera di equazioni (29), luogo di punti doppi di W.

Infine discende direttamente dalla (27) che i punti reali di W sono i punti della sfera (29). In virtù della trasformazione (26), questi risultati portano subito al teorema $\mathbf{T}_5$.

10. - Derivate direzionali delle coniugate delle funzioni di Martinelli.

Per le funzioni di questa classe sussiste il teorema

$\mathbf{T}_6$ – *Se $y = f(x)$ appartiene alla classe $\mathscr{M}$ e se nel punto $\overset{\circ}{x}$ di U, si ha $a = A(\overset{\circ}{x}) \neq 0$, $b = B(\overset{\circ}{x}) \neq 0$, la varietà V delle derivate direzionali destre della funzione y è costituita dalla ipersfera S di centro nell'origine e raggio $\sqrt{N(a)\cdot N(b)}$ e dall'ipercono isotropo C di vertice $-a\bar{b}$.*

Poichè il vertice dell'ipercono C appartiene ad S, esso è *punto triplo* per V. Inoltre i *punti reali* di V sono, tutti e soli, i punti dell'ipersfera S. Conviene infine aggiungere l'osservazione

O. – *Il vertice del cono C rappresenta le derivate $D_\alpha y$ relative alle ∞^3 direzioni ortogonali alla direzione individuata dal quaternione b.*

Si noti infine che i risultati contenuti in $\mathbf{T}_6$ sono in accordo con quelli del Teorema $\mathbf{T}_3$ (n. **8**).

Per stabilire $\mathbf{T}_6$ si procede così.

Si riconosce immediatamente che, tenuto conto della (25), la (8) nel caso attuale diviene

$$X = a\bar{\alpha}b\alpha^{-1} \tag{30}$$

(*equazione parametrica di V*).

Come nel caso precedente, ci si può limitare a studiare la varietà di equazione parametrica

$$Z = \bar{\alpha}b\alpha^{-1} \,.$$

Eliminando i parametri α^k si ottiene l'equazione cartesiana

$$\det\left(\gamma^r_{hk} Z^h - \gamma^r_{kh} b^h (2\delta^1_k - 1)\right) = 0 ,$$

cioè

$$[N(Z) - N(b)][(Z^1 + b^1_1)^2 + (Z^2 - b^2)^2 + (Z^3 - b^3)^2 + (Z^4 - b^4)^2] = 0 .$$

Di qui, utilizzando la trasformazione (26), segue subito l'asserto del Teorema $\mathbf{T}_6$.

Si osservi poi che, se nella (30) si pone $X = -a\bar{b}$, si perviene alla condizione di ortogonalità $\alpha\bar{b} + b\bar{\alpha} = 0$ (n. 3), e viceversa. L'osservazione **O** è quindi dimostrata.

Bibliografia.

[1] A. A. Albert, *Modern Higher Algebra*, Univ. of Chicago Press, Chicago 1958.

[2] L. Autonne, *Sur les proprietés, qui pour les fonctions d'une variable hypercomplexes, correspondent à la monogéneité*, Journal de mathématique (6) **3** (1907), 53-104.

[3] L. Bassotti e G. B. Rizza, *Funzioni monogene nelle algebre reali di dimensione due e applicazioni conformi*, Rend. Mat. (6) **6** (1973), 381-397.

[4] N. Bourbaki, *Algebre* 1, 2, Herman, Paris 1958.

[5] F. Hausdorff, *Zur Theorie der sisteme complexen Zahlen*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math. Phys. Kl., **52** (1900), 43-61.

[6] E. Kasner, *General theory of polygenic or non-monogenic functions. The derivative congruence of circles*, Proceedings U.S.A. Academy **14** (1928), 75-82.

[7] E. Martinelli, *Varietà a struttura quaternionale generalizzata*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **26** (1959), 353-362.

[8] G. B. Rizza: $[\bullet]_1$ *Sulle funzioni analitiche nelle algebre ipercomplesse*, Pont. Acad. Sci. Comment. **14** (1950), 196-191; $[\bullet]_2$ *Teoria delle funzioni nelle algebre complesse dotate di modulo e commutative*, Rend. Mat. Appl. **12** (1953), 306-338.

[9] G. Scorza, *Corpi numerici ed algebre*, Principato, Messina 1921.

[10] B. Segre, *Forme differenziali e loro integrali*, Vol. I, II, Docet, Roma 1951.

[11] F. Severi, *Lezioni di Analisi*, I, Zanichelli, Bologna 1938.

[12] E. Study, *Nombres complexes*, Encyclopedie des Sciences Mathématique, vol. 1, Gauthier-Villars, Paris 1904.

Summary.

Let A be a real algebra with identity element. Let us denote $D_\alpha y$ the right derivative of the function $y = f(x)$ in A with respect to the direction α.

We study in $\boldsymbol{R}^n$ the algebraic surface representing $D_\alpha y$ when the direction α varies. Some results for an arbitrary algebra A, and, in particular, for the two-dimensional algebras and for the quaternion algebra are obtained.

* * *.