Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 247-264

ALESSANDRO BICHARA (*)

Sui k-archi di un bipiano. (**)

1. - Introduzione.

In questo lavoro ci occuperemo dei fondamenti della teoria degli archi di un bipiano finito.

Il concetto di bipiano verrà introdotto come una particolarizzazione di quello di λ-piano, il quale è, a sua volta, una generalizzazione spontanea di quello di piano proiettivo. Nei n. **2** e **3**, dopo aver dato la definizione di λ-piano, ne studieremo alcune principali proprietà, trattando l'argomento da un punto di vista essenzialmente geometrico e senza mai far ricorso alla teoria dei disegni.

Passeremo quindi nel n. **4** ad esaminare i bipiani e più in particolare le proprietà dei loro k-archi. Diremo k-arco di un bipiano ogni insieme costituito da k dei suoi punti, di cui mai tre allineati. I concetti collegati a quello di k-arco (rette tangenti, secanti, completezza, etc.) e quelli analoghi per la teoria degli archi di un piano proiettivo, risulteranno definiti in modo formalmente identico.

Nei nn. **5** e **6** ci occuperemo della teoria degli archi nei bipiani di ordine dispari e di ordine pari, rispettivamente, pervenendo, tra l'altro, ai seguenti risultati:

I. – *Se* $(\alpha, \mathscr{B})$ *è un bipiano di ordine* $q = 2s+1$ *ed* S *è un suo* k*-arco, risulta* $k \leqslant s+2$. *Se è* $k = s+2$, *per ogni punto del bipiano non appartenente ad* S *passano o zero o due tangenti ad* S *e per ogni punto di* S *passano* $2(s+1)$ *secanti e una tangente.*

(*) Indirizzo: Via S. Francesco a Ripa 136, 00153 Roma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche ed Applicazioni del C.N.R. - Ricevuto: 10-XII-1975.

II. – *Se* $(\alpha, \mathscr{B})$ *è un bipiano di ordine* $q = 2s$ *e* S *è un suo* k*-arco, risulta* $k \leqslant s + 2$. *Se è* $k = s + 2$ *per ogni punto di* S *passano* $2(s+1)$ *secanti e nessuna retta del bipiano è tangente ad* S. *Un* $(s+1)$*-arco* K *del bipiano è incompleto se e solo se esiste un punto del bipiano per cui passano tutte e sole le tangenti a* K; K *è invece completo se e solo se esiste un punto del bipiano per cui non passa alcuna tangente a* K.

2. - Definizione di λ-piano e sue prime proprietà.

Dicesi λ-piano ($\lambda \geqslant 1$) una coppia $(\alpha, \mathscr{B})$, ove:

(i) α è un insieme non vuoto, i cui elementi diconsi *punti* del λ-piano,

(ii) $\mathscr{B}$ è una famiglia propria e non vuota di parti proprie di α, i cui elementi diconsi *rette* del λ-piano, tale che verifichi i due seguenti assiomi:

A_1) *due qualsiasi rette distinte si intersecano in esattamente* λ *punti,*

A_2) *per due qualsiasi punti distinti passano esattamente* λ *rette.*

Se $(\alpha, \mathscr{B})$ e $(\alpha', \mathscr{B}')$ sono due λ-piani ed f è un' applicazione biiettiva di α su α', diremo che f è un *isomorfismo* tra $(\alpha, \mathscr{B})$ e $(\alpha', \mathscr{B}')$ se essa trasforma ogni elemento di $\mathscr{B}$ in un elemento di $\mathscr{B}'$ e se la sua inversa f^{-1} trasforma ogni elemento di $\mathscr{B}'$ in un elemento di $\mathscr{B}$ (nel senso che, quando un punto, variando in α, descrive tutta una retta b di $\mathscr{B}$, allora la sua immagine in f descrive tutta una retta b' di $\mathscr{B}'$; analogamente per f^{-1}).

Con il simbolo $\underline{\mathrm{Hom}}((\alpha, \mathscr{B}), (\alpha', \mathscr{B}'))$ indicheremo l'insieme (eventualmente vuoto) degli isomorfismi tra i λ-piani $(\alpha, \mathscr{B})$ e $(\alpha', \mathscr{B}')$. Se $f \in \mathrm{Hom}((\alpha, \mathscr{B}), (\alpha', \mathscr{B}'))$, scriveremo anche:

$$f\colon (\alpha, \mathscr{B}) \to (\alpha', \mathscr{B}') .$$

Evidentemente, quali che siano gli isomorfismi

$$f\colon (\alpha, \mathscr{B}) \to (\alpha', \mathscr{B}') \qquad \text{e} \qquad g\colon (\alpha', \mathscr{B}') \to (\alpha'', \mathscr{B}'') ,$$

il loro prodotto $g \circ f$, effettuato secondo l'ordinaria legge di composizione delle applicazioni, è un isomorfismo tra $(\alpha, \mathscr{B})$ e $(\alpha'', \mathscr{B}'')$. La trasformazione identica di α è manifestamente un isomorfismo tra $(\alpha, \mathscr{B}')$ e $(\alpha, \mathscr{B})$ stesso. Per ogni $\lambda \geqslant 1$, la totalità dei λ-piani assume allora struttura di categoria quando per ogni coppia ordinata di λ-piani $((\alpha, \mathscr{B}), (\alpha', \mathscr{B}'))$ si definisce l'insieme dei morfismi di $(\alpha, \mathscr{B})$ in $(\alpha', \mathscr{B}')$ come l'insieme degli isomorfismi tra $(\alpha, \mathscr{B})$ e $(\alpha', \mathscr{B}')$ e quando si assume come legge di composizione dei morfismi l'ordinario prodotto operatorio delle applicazioni (cfr. [**7**], n. **1**).

Se $(\alpha, \mathscr{B})$ è un λ-piano e P un suo punto, con il termine *fascio di rette di centro* P si indicherà l'insieme F_P così definito:

$$F_P \equiv \{b \in \mathscr{B} / P \in b\}. \tag{2.1}$$

Cominciamo a provare che:

III. – *Sia $(\alpha, \mathscr{B})$ un λ-piano. In esso esistono almeno $\lambda + 2$ punti non allineati (cioè non appartenenti ad una stessa retta) e $\lambda + 2$ rette non formanti fascio. Ogni sua retta ha almeno $\lambda + 1$ punti ed ogni suo fascio ha almeno $\lambda + 1$ rette. Inoltre, fissato un punto P di α, esiste una retta non passante per esso e fissata una retta r di $\mathscr{B}$, esiste un punto non su essa.*

Dimostrazione. Esiste almeno una retta perchè $\mathscr{B}$ è non vuota. Ogni retta contiene almeno un punto ed esiste un punto al di fuori di essa (perchè una retta è parte propria di α). Esistono allora due punti in α. Sia P un qualsiasi punto di α e sia Q un punto diverso da P. Se r è una delle λ rette per P e Q, si indichi con $\bar{Q}$ un punto al di fuori di essa. Per P e $\bar{Q}$ passano λ rette distinte tra loro e da r; allora per P passano almeno $\lambda + 1$ rette, cioè:

$$|F_P| \geqslant \lambda + 1, \qquad \forall P \in \alpha. \tag{2.2}$$

Sia b una qualsiasi retta del λ-piano ed s una retta diversa da b (si è appena visto che esistono almeno $\lambda + 1$ rette). Poichè b ed s si intersecano in λ punti, si ha: $|b| \geqslant \lambda$, $\forall b \in \mathscr{B}$. Per provare che è:

$$|b| \geqslant \lambda + 1, \qquad \forall b \in \mathscr{B}, \tag{2.3}$$

distinguiamo i due casi $\lambda = 1$, $\lambda > 1$.

Se è $\lambda = 1$, sia P un qualsiasi punto di b e sia Q un qualsiasi punto non appartenente a b. Con u si indichi la congiungente P e Q. In virtù di (2.2) per Q passa almeno un'altra retta e sia essa v. P non appartiene a v. La intersezione $\bar{P}$ di b e v è allora un punto di b diverso da P, onde la (2.3) per $\lambda = 1$.

Se è $\lambda > 1$, si supponga $|b| = \lambda$. Sia P un qualsiasi punto di b e sia Q un qualsiasi punto non appartenente a b. Per P e Q passano λ rette distinte tra loro e da b; siano u e v due di esse.

Poichè u interseca b in λ punti ed è $|b| = \lambda$, si ha:

$$u \cap b = b. \tag{2.4}$$

Analogamente:

$$v \cap b = b \,. \tag{2.5}$$

Dalle (2.4) e (2.5) ed appartenendo Q all'insieme $u \cap v$, si ha $u \cap v \supseteq \supseteq b \cup \{Q\}$, da cui: $|u \cap v| \geqslant \lambda + 1$ e ciò è escluso per la A_1. Si è così provata la (2.3) per $\lambda > 1$.

Sia ora r una retta e Q un punto fuori di essa. L'insieme $A = r \cup \{Q\}$ è costituito da almeno $\lambda + 2$ punti non allineati (r non contiene Q e una retta diversa da r interseca A in al più $\lambda + 1$ punti).

Sia P un qualsiasi punto di α, esiste almeno una retta non passante per P perchè, se Q è un punto diverso da P, le rette per Q sono almeno $\lambda + 1$ e quelle che lo congiungono a P sono esattamente λ. Sia s una retta non per P. L'insieme $B = F_P \cup \{s\}$ è costituito da almeno $\lambda + 2$ rette non formanti fascio (se tutte le rette di B formassero fascio con centro P' dovrebbe essere $P' \neq P$, perchè P non appartiene a s, ma allora per P e P' passerebbero le rette di F_P che sono almeno $\lambda + 1$). È così provato l'asserto.

Esistono di fatto λ-piani con $\lambda + 2$ punti, $\lambda + 2$ rette e tali che ogni retta ha $\lambda + 1$ punti e ogni fascio ha $\lambda + 1$ rette; chiameremo tali λ-piani *λ-piani minimi*. Uno di essi si ottiene fissando un insieme α costituito da $\lambda + 2$ elementi e prendendo come famiglia $\mathscr{B}$ delle rette quella dei complementari dei singoli elementi di α, cioè $\mathscr{B} = \{C(P)\}_{P \in \alpha}$. Evidentemente *due λ-piani minimi sono isomorfi.*

Sia $(\alpha, \mathscr{B})$ un λ-piano. Con il termine *struttura duale* di $(\alpha, \mathscr{B})$ indicheremo la coppia (cfr. (2.1)):

$$(\mathscr{B}, \{F_P\}_{P \in \alpha}) \,. \tag{2.6}$$

La struttura duale del λ-piano $(\alpha, \mathscr{B})$ sarà sovente indicata con il simbolo $(\alpha, \mathscr{B})^*$.

In proposito proveremo ora che:

IV. – *La struttura duale $(\alpha, \mathscr{B})^*$ di un λ-piano $(\alpha, \mathscr{B})$ è un λ-piano.*

Dimostrazione. La famiglia $\{F_P\}_{P \in \alpha}$ è una famiglia non vuota di parti proprie di $\mathscr{B}$ (per la (2.2) e per l'ultima asserzione di prop. III); essa è anche una famiglia propria (perchè se fosse $F_P = F_Q$ con $P \neq Q$ ogni retta di F_P dovrebbe passare per Q ed allora per A_2) si avrebbe $|F_P| \leqslant \lambda$; ma per la prop. III è $|F_P| \geqslant \lambda + 1$).

È verificata la A_1), perchè due fasci distinti hanno in comune tutte e sole le λ rette che congiungono i loro due distinti centri.

Poichè per due rette distinte r ed s passano esattamente λ fasci, quelli cioè i cui centri sono le λ intersezioni di r ed s, è verificata anche la A_2), onde l'asserto.

Se $(\alpha, \mathscr{B})$ è un λ-piano, il λ-piano duale di $(\alpha, \mathscr{B})^*$ è indicato con il simbolo $(\alpha, \mathscr{B})^{**}$ ed è detto λ-piano *biduale* di $(\alpha, \mathscr{B})$.

È ora possibile provare che:

V. – *Un λ-piano $(\alpha, \mathscr{B})$ è sempre isomorfo al suo biduale $(\alpha, \mathscr{B})^{**}$.*

Dimostrazione. Applicando le definizioni si ha:

$$(\alpha, \mathscr{B})^{**} = (\mathscr{B}, \{F_P\}_{P\in\alpha})^* = (\{F_P\}_{P\in\alpha}, \{\mathscr{F}_r\}_{r\in\mathscr{B}}) ,$$

ove è

$$\mathscr{F}_r = \{F_P\}_{P\in r} .$$

Sia allora f l'applicazione di α in $\{F_P\}_{P\in\alpha}$ così definita:

$$f\colon P \in \alpha \to F_P \in \{F_P\}_{P\in\alpha} . \tag{2.7}$$

La f è manifestamente biiettiva; inoltre è $f(r) = \mathscr{F}_r$, $f^{-1}(\mathscr{F}_r) = r$. Allora f è un isomorfismo tra $(\alpha, \mathscr{B})$ e $(\alpha, \mathscr{B})^{**}$, onde l'asserto.

L'isomorfismo tra $(\alpha, \mathscr{B})$ e $(\alpha, \mathscr{B})^{**}$ definito dalla (2.7) è detto *isomorfismo canonico* tra il λ-piano $(\alpha, \mathscr{B})$ e il suo biduale $(\alpha, \mathscr{B})^{**}$.

3. - Generalità sui λ-piani finiti.

Nel seguito saranno considerati soltanto λ-piani finiti (costituiti cioè da un numero finito di punti).

Un 1-piano risulta evidentemente un piano proiettivo (riducibile o irriducibile; ricordiamo che un piano proiettivo dicesi irriducibile se contiene quattro punti di cui mai tre allineati, riducibile in caso contrario). La nozione di λ-piano è dunque una generalizzazione spontanea di quella di piano proiettivo. Come è noto (cfr. [6]) *se $(\alpha, \mathscr{B})$ è un piano proiettivo irriducibile ed n e la cardinalità di una sua retta, si ha $n \geqslant 3$ ed inoltre*:

$$\text{(i)}_\lambda \qquad \forall b \in \mathscr{B}, \qquad |b| = n .$$

$$\text{(ii)}_\lambda \qquad \forall P \in \alpha, \qquad |F_P| = n .$$

$$\text{(iii)}_\lambda \qquad |\alpha| = |\mathscr{B}| = n(n-1) + 1 .$$

Il risultato ora citato ammette una generalizzazione al caso $\lambda > 1$; però, mentre per il caso classico $\lambda = 1$ giuoca un ruolo essenziale l'ipotesi di irriducibilità, nella sua generalizzazione non interviene alcun concetto analogo. Precisamente dimostriamo che:

VI. – *Se* $(\alpha, \mathscr{B})$ *è un* λ*-piano, con* $\lambda > 1$, *ed* n $(n \geqslant \lambda + 1$, cfr. prop. III) *è la cardinalità di una sua retta* r, *risulta*:

$$(\mathrm{i})_\lambda \qquad \forall b \in \mathscr{B}, \qquad |b| = n .$$

$$(\mathrm{ii})_\lambda \qquad \forall P \in \alpha, \qquad |F_P| = n .$$

$$(\mathrm{iii})_\lambda \qquad |\alpha| = |\mathscr{B}| = \frac{n(n-1)}{\lambda} + 1 .$$

Dimostrazione. Proviamo intanto che se s è una retta e Q un suo punto, si ha:

$$(3.1) \qquad |F_Q| = |s| .$$

Si considerino infatti le coppie di tipo

$$(3.2) \qquad (X, x), \qquad \text{ove} \qquad X \in s - \{Q\},\ x \in F_Q - \{s\},\ X \in x .$$

Si osservi che l'insieme delle coppie suddette è non vuoto (sia $\bar{Q}$ un punto al di fuori di s; è Q diverso da $\bar{Q}$; se x è una delle λ rette contenenti Q e $\bar{Q}$, è x diversa da s; sia allora X uno dei $\lambda - 1 \geqslant 1$ punti di $s \cap x$ diversi da Q; la coppia (X, x) è del tipo (3.2)).

Esistono due modi per determinare il numero, indicato con M, delle coppie del tipo (3.2):

I modo: ogni retta x di F_Q che sia diversa da s interseca s in $\lambda - 1$ punti diversi da Q. È allora:

$$(3.3) \qquad M = (|F_Q| - 1)(\lambda - 1) .$$

II modo: i punti di s diversi da Q sono $|s| - 1$ e ciascuno di essi è congiunto a Q da $\lambda - 1$ rette diverse da s. Onde:

$$(3.4) \qquad M = (|s| - 1)(\lambda - 1) .$$

Dalle (3.3) e (3.4) si ha:

$$(|F_Q|-1)(\lambda-1)=(|s|-1)(\lambda-1)\,.$$

Poichè $\lambda>1$ si ottiene subito la (3.1).

È possibile ora dimostrare la $(\mathrm{i})_\lambda$. Sia s una qualsiasi retta diversa dalla retta r di cardinalità n di cui all'enunciato. Se Q è uno dei λ punti di $s\cap r$, in forza della (3.1) è:

$$|s|=|F_Q|=|r|=n\,,$$

da cui la $(\mathrm{i})_\lambda$.

Sia ora P un qualsiasi punto di α. In virtù della proposizione III, esistono $\lambda+1$ rette passanti per P; sia t una di esse; per la (3.1) e la $(\mathrm{i})_\lambda$ è

$$|F_P|=|t|=n\,,$$

da cui la $(\mathrm{ii})_\lambda$.

Si considerino ora le coppie di tipo:

$$(Y,y)\,,\qquad \text{ove}\qquad Y\in\alpha\,,\ y\in\mathscr{B}\,,\ Y\in y\,. \tag{3.5}$$

Esistono due modi per determinare il numero, indicato con L, delle coppie di tipo (3.5):

I modo: poichè per ogni punto passano n rette, è:

$$L=|\alpha|n\,. \tag{3.6}$$

II modo: poichè ogni retta contiene n punti, è:

$$L=|\mathscr{B}|n\,. \tag{3.7}$$

Detta N la cardinalità di α, dalla (3.6) e dalla (3.7) si ha:

$$|\mathscr{B}|=|\alpha|=N\,. \tag{3.8}$$

Sia H il numero delle coppie $((X,Y),b)$ ove (X,Y) *è una coppia non ordinata* *di punti distinti della retta b*. Le coppie non ordinate di punti distinti di α sono $\binom{N}{2}$ e per due tali punti passano λ rette, onde è:

$$H = \binom{N}{2} \cdot \lambda \,. \tag{3.9}$$

Poichè le rette di $(\alpha, \mathscr{B})$ sono N (cfr. (3.8)) e ciascuna di esse individua $\binom{n}{2}$ coppie non ordinate di suoi distinti punti, è:

$$H = \binom{n}{2} N \,. \tag{3.10}$$

Dalle (3.9) e (3.10) si ottiene la

$$\frac{n(n-1)}{2} N = \lambda \frac{N(N-1)}{2} \,. \tag{3.11}$$

Infine dalle (3.8) e (3.11) si ha la $(\mathrm{iii})_\lambda$ e quindi l'asserto.

Se $(\alpha, \mathscr{B})$ è un λ-piano con $\lambda \neq 1$, ed n è la cardinalità di una sua retta, il numero (cfr. prop. III):

$$q = n - \lambda \geqslant 1 \tag{3.12}$$

dicesi *ordine* di $(\alpha, \mathscr{B})$. Una tale definizione corrisponde alla analoga per i piani proiettivi irriducibili. Dalla proposizione VI si ha subito che:

VII. – *Sia* $(\alpha, \mathscr{B})$ *un λ-piano di ordine q. Risulta*: $q = 1$ *se e solo se* $(\alpha, \mathscr{B})$ *è un λ-piano minimo*.

Poichè un λ-piano minimo esiste ed è unico (cfr. n. **2**), per il seguito escluderemo il caso $q = 1$. Supporremo sempre, per l'ordine q di un λ-piano $(\alpha, \mathscr{B})$, che sia:

$$q \geqslant 2 \,. \tag{3.13}$$

Con il termine *struttura complementare* del λ-piano $(\alpha, \mathscr{B})$ indicheremo la coppia

$$(\alpha, \mathscr{B}') \,, \qquad \text{ove} \qquad \mathscr{B}' = \{\alpha - b\}_{b \in \mathscr{B}} \,. \tag{3.14}$$

Dimostriamo che:

VIII. – *Se* $(\alpha, \mathscr{B})$ *è un* λ*-piano, con* $\lambda \neq 1$*, o un piano proiettivo irriducibile, di ordine* $q \geqslant 2$*, la sua struttura complementare è un* λ'*-piano di ordine* q'*, con:*

$$\lambda' = \frac{q^2 - q}{\lambda} \geqslant 1\,, \qquad q' = q \geqslant 2\,. \tag{3.15}$$

Dimostrazione. $\mathscr{B}'$ è una famiglia propria e non vuota di parti proprie di α poichè lo è $\mathscr{B}$.

Siano r' ed s' due rette distinte di $\mathscr{B}'$ e siano r ed s i rispettivi complementari in α, elementi di $\mathscr{B}$ (r' ed s' siffatti esistono sempre poichè esistono sempre r ed s per prop. III). Poichè è $|r \cup s| = 2q + \lambda$ (cfr. prop. VI, la (3.12) e le analoghe per i piani proiettivi irriducibili), si ha:

$$|r' \cap s'| = |Cr \cap Cs| = |C(r \cup s)| = |\alpha| - (2q + \lambda) = \frac{q^2 - q}{\lambda}. \tag{3.16}$$

Indicato con λ' l'ultimo membro della (3.16) è (cfr. (3.13)): $\lambda' > 0$. La A_1) è così verificata.

Se P e Q sono due qualsiasi punti distinti di α, un elemento di $\mathscr{B}'$ li contiene entrambi se e solo se il suo complementare in α non contiene nè l'uno nè l'altro. Il numero delle rette di $\mathscr{B}$ che passano per uno almeno dei due punti P e Q è $2q + \lambda$. Detto λ'' il numero delle rette di $\mathscr{B}'$ passanti per P e Q, è allora:

$$\lambda'' = |\mathscr{B}| - (2q + \lambda) = \lambda' \tag{3.17}$$

onde la A_2).

Se n' è la cardinalità della generica retta r' del λ'-piano $(\alpha, \mathscr{B}')$, deve essere: (cfr. (3.12)):

$$n' = |\alpha| - |r| = \frac{q(q - 1 + \lambda)}{\lambda}\,, \qquad \text{ove} \qquad r = \alpha - r'\,. \tag{3.18}$$

Per le (3.12) e (3.18) l'ordine q' di $(\alpha, \mathscr{B}')$ è dato dalla seconda delle (3.15), onde l'asserto.

4. - Generalità sui k-archi di un bipiano.

Un 2-piano dicesi *bipiano*. *Se* $(\alpha, \mathscr{B})$ *è un bipiano di ordine* $q \geqslant 2$, *si ha* (cfr. prop. VI):

$$(\mathrm{i})_2 \qquad \forall b \in \mathscr{B}, \qquad |b| = q + 2 .$$

$$(\mathrm{ii})_2 \qquad \forall P \in \alpha, \qquad |F_P| = q + 2 ,$$

$$(\mathrm{iii})_2 \qquad |\alpha| = |\mathscr{B}| = \frac{(q+2)(q+1)}{2} + 1 .$$

Il bipiano di ordine $q = 2$ esiste; un modello è dato dalla struttura complementare del piano proiettivo irriducibile di ordine due. Esso è unico come subito si prova.

Il bipiano di ordine $q = 3$ esiste; un modello è costruibile al seguente modo. Sia Q l'insieme dei quadrati non nulli di Z_{11}; per ogni fissato x appartenente a Z_{11} si ponga $Q_x = \{y + x\}_{y \in Q}$; la coppia $(Z_{11}, \{Q_x\}_{x \in Z_{11}})$ è il modello cercato come provato da BRUCK (cfr. [2]). Tale bipiano è unico come si può facilmente provare.

Nel n. **6** saranno dati due modelli di bipiani, tra loro non isomorfi, aventi lo stesso ordine $q = 4$, di questi il primo è dovuto a CAMERON (cfr. [**3**], n. 2), il secondo è dovuto all'Autore e compare qui per la prima volta.

Dicesi *k-arco* di un bipiano $(\alpha, \mathscr{B})$ ogni insieme costituito da k punti di α, di cui mai tre allineati. Diremo che un k-arco K di un bipiano è *incompleto* se esiste un k'-arco K' contenente propriamente K; in tal caso diremo anche che K è *immergibile* in K'. Se invece K non è immergibile in alcun altro k'-arco del bipiano, diremo che esso è *completo*.

In un bipiano $(\alpha, \mathscr{B})$ una retta di $\mathscr{B}$ che intersechi in 0, 1, 2 punti un k-arco dicesi rispettivamente *esterna*, *tangente*, *secante* di K. Proviamo che:

IX. - *Se* Σ *è il numero di tutte le secanti di un k-arco di un bipiano, risulta*:

$$\Sigma = k(k-1) . \tag{4.1}$$

Dimostrazione. Per una coppia di punti distinti del k-arco passano esattamente due secanti. Coppie distinte individuano secanti distinte ed allora è $\Sigma = 2\binom{k}{2}n$, onde l'asserto.

X. - *Per ogni punto di un k-arco* K *di un bipiano di ordine* q *passano esattamente* $\tau = q - 2k + 4$ *tangenti. Il numero totale delle tangenti di* K *è allora* $T = k(q - 2k + 4)$.

Dimostrazione. Sia P un qualsiasi punto di K. Per P passano $q+2$ rette del bipiano che incontrano K in almeno un punto; poichè le secanti per P sono $2(k-1)$ (P è congiunto ad ogni altro punto del k-arco da due secanti) le tangenti per P sono $\tau = q+2-2(k-1)$. Poichè per punti distinti di K passano tangenti distinte si ha l'asserto.

XI. – *Per un punto di un bipiano non appartenente ad un k-arco K, passa un numero pari di tangenti a K.*

Dimostrazione. Sia P un punto siffatto. Si considerino le coppie di tipo

$$(Q, r), \qquad \text{ove } Q \in K \text{ e } r \text{ è una congiungente } P \text{ e } Q . \tag{4.2}$$

Sia L il numero di tutte le coppie del tipo (4.2). Poichè K possiede k punti e per ognuno di essi passano due rette che lo congiungono a P, si ha:

$$L = 2k . \tag{4.3}$$

Se ora con τ e σ si indicano i numeri di tutte le rette per P che siano rispettivamente tangenti e secanti K (cioè intersecano K in 1 o 2 punti, rispettivamente), è:

$$L = \tau + 2\sigma . \tag{4.4}$$

Dalle (4.3) e (4.4) si ha la

$$2k = \tau + 2\sigma , \tag{4.5}$$

onde l'asserto.

Dalle prop. IX e X si ha che:

XII. – *Le rette di un bipiano di ordine $q \geqslant 2$, esterne ad un k-arco, sono in numero di*

$$k^2 - k(q+3) + 1 + \frac{(q+1)\cdot(q+2)}{2} > 0 .$$

Da prop. X e dovendo essere $\tau \geqslant 0$, risulta :

XIII. – *Se* $(\alpha, \mathscr{B})$ *è un bipiano di ordine* q *e* K *è un suo* k*-arco, è*:

$$k \leqslant \frac{q}{2} + 2\,, \qquad \textit{se } q \textit{ è pari}\,. \tag{4.6}$$

$$k \leqslant \frac{q-1}{2} + 2\,, \qquad \textit{se } q \textit{ è dispari}\,. \tag{4.7}$$

Infine da prop. X ed essendo $\tau \equiv q \pmod 2$, risulta:

XIV. – *Per un punto di un* k*-arco di un bipiano, passa un numero di tangenti a* K *che ha la stessa parità dell'ordine del bipiano.*

Dalle ultime due proposizioni è evidente che a questo punto dobbiamo distinguere il caso q pari dal caso q dispari. Esempi di k-archi « massimali », nel senso che $k = q/2 + 2$ se q pari o $k = (q-1)/2 + 2$ se q è dispari, saranno forniti nel n. **5** e nel n. **6** rispettivamente.

Dimostriamo infine che *se* K *è un* k*-arco di un bipiano* $(\alpha, \mathscr{B})$ *di ordine* q, *risulta*:

$$K \textit{ completo} \Rightarrow k \geqslant 1 + \sqrt{\frac{q+1}{2}}\,. \tag{4.8}$$

Dimostrazione. Se è $k = q/2 + 2$, con q pari, la (4.8) è immediata. In ogni altro caso, se P è un punto di K, esiste almeno una tangente a K in P, e sia essa t. Si considerino le coppie di tipo:

$$(Q, s)\,, \qquad \text{ove } Q \in t - \{P\} \text{ ed } s \text{ è una secante di } K \text{ per } Q\,. \tag{4.9}$$

Se K è completo per ogni punto di α, e dunque di $t - \{P\}$, passa almeno una secante di K. Indicato con N il numero delle coppie di tipo (4.9), si ha allora:

$$K \text{ completo} \Rightarrow N \geqslant q + 1\,. \tag{4.10}$$

Poichè ognuna delle $2(k-1)$ secanti di K per P interseca t in un punto diverso da P e poichè ciascuna delle $2\binom{k-1}{2}$ restanti secanti interseca t in due punti diversi da P, risulta:

$$N = 2(k-1) + 2(k-1)(k-2)\,. \tag{4.11}$$

Dalle (4.10) e (4.11) si ha l'asserto.

5. - I k-archi di un bipiano di ordine dispari.

Se $(\alpha, \mathscr{B})$ è un bipiano di ordine $q=2s+1$ dalla (4.7) si ha che per ogni suo k-arco risulta $k \leqslant s+2$ e quindi un $(s+2)$-arco (supposto esistente) è sempre completo. Proviamo che:

XV. – *Se S è un* $(s+2)$-arco *di un bipiano* $(\alpha, \mathscr{B})$ *di ordine* $q=2s+1$, *per un punto di α non appartenente ad S passano o zero o due tangenti ad S.*

Dimostrazione. Sia P un punto di α non appartenente ad S e sia τ il numero delle rette del bipiano tangenti ad S per P. Se $\tau=0$ non vi è nulla da dimostrare.

Sia $\tau>0$ e sia t una tangente ad S per P. Detto T il punto di S appartenente a t, si considerino le coppie

$$(Q, t_Q)\,, \qquad \text{ove } Q \in t-\{T\} \text{ e } t_Q \text{ è una tangente per } Q \text{ diversa da } t. \tag{5.1}$$

M sia il numero delle coppie del tipo (5.1). Le tangenti di S sono in numero di $s+2$ (cfr. prop. X); quelle diverse da t sono $s+1$; ciascuna di queste incontra t in due punti, entrambi diversi da T (per prop. X per T passa esattamente una tangente ed è t), onde è:

$$M=2(s+1)\,. \tag{5.2}$$

L'ordine del bipiano è $q=2s+1$: i punti di t diversi da T sono $2(s+1)$; per ognuno di essi passa almeno una tangente diversa da t (cfr. prop. XI). Allora è $M \geqslant 2(s+1)$ e vale il segno di uguaglianza se, e solo se, per ogni punto Q di t che sia diverso da T (e dunque anche per P) passa esattamente una tangente diversa da t. Per la (5.2) si ha l'asserto.

Dalle prop. IX, X, XIII e XV si ha la prop. I.

Se S è un $(s+2)$-arco di un bipiano $(\alpha, \mathscr{B})$ di ordine $q=2s+1$, i punti di α possono allora essere ripartiti in tre classi disgiunte: classe dei *punti appartenenti* all'arco S, per ognuno dei quali passano una tangente e $2(s+1)$ secanti; classe dei *punti esterni* ad S, per ognuno dei quali passano due tangenti, $s+1$ secanti (cfr. la (4.5)) ed s rette esterne all'arco; classe dei *punti interni* ad S, per ognuno dei quali passano $s+2$ secanti, $s+1$ rette esterne e non passa alcuna tangente ad S. I punti appartenenti ad S sono ovviamente in numero di $s+2$. Poichè le tangenti di S sono $s+2$ e due tangenti distinte si intersecano in due punti esterni, il numero di questi ultimi è $2\binom{s+2}{2}=(s+1)\cdot$ $\cdot(s+2)$. Il numero dei punti interni è allora

$$(2s+3)(s+1)+1-(s+2)-(s+1)(s+2)+s(s+1)\ .$$

Se $s=1$ è $q=3$. Nel bipiano di ordine $q=3$ (cfr. n. 4) per due punti passano due rette di 5 punti ciascuna; la loro unione insiemistica è costituita da 8 punti; uno qualsiasi dei restanti tre punti del bipiano, assieme ai due inizialmente dati, costituisce un 3-arco S. S in tal caso come, è facile verificare, individua 3 punti appartenenti ad esso, 6 punti ad esso esterni e 2 punti interni.

La coppia (α, θ), ove α è l'insieme dei punti del bipiano di ordine $q=3$ e θ è l'insieme dei suoi 3-archi, è un disegno con parametri $v=11$, $b=55$, $k=3$, $r=15$, $\lambda=3$.

6. - I k-archi di un bipiano di ordine pari.

Se $(\alpha, \mathscr{B})$ è un bipiano di ordine $q=2s$ per ogni suo k-arco risulta $k\leqslant s+2$ e quindi un $(s+2)$-arco K di $(\alpha, \mathscr{B})$ è sempre completo. Le secanti di K sono in numero di $(s+1)\cdot(s+2)$, le rette di $\mathscr{B}$ esterne a K sono in numero di s^2 e non esistono tangenti a K (cfr. prop. XIII, IX, XII e X).

Alla fine di questo numero daremo due esempi di bipiani non isomorfi di ordine $q=2s$, con $s=2$, in cui esistono $(s+2)$-archi. Nel primo di tali due esempi ogni $(s+1)$-arco è incompleto mentre nel secondo non tutti gli $(s+1)$-archi sono incompleti. È questo il punto in cui i risultati ottenuti sui k-archi di un bipiano maggiormente si differenziano da quelli classici della teoria degli archi nei piani proiettivi irriducibili.

Un $(s+1)$-arco S di un bipiano di ordine $q=2s$ ammette $2(s+1)$ tangenti (due per ogni suo punto), $s(s+1)$ secanti ed s^2 rette esterne (cfr. prop. XIII, IX, XII e X).

Cominciamo a provare che:

XVI. – *Sia S un $(s+1)$-arco di un bipiano di ordine $q=2s$ e P un punto del bipiano non appartenente ad S. Il numero delle secanti per P ed S uguaglia il numero delle rette per P che sono esterne ad S.*

Dimostrazione. Se τ, σ, ε indicano rispettivamente il numero delle tangenti, secanti e rette esterne ad S per P, è:

$$\tau + \sigma + \varepsilon = 2(s + 1)\,, \tag{6.1}$$

essendo $q = 2s$. Dalle (6.1) e (4.5) si ha $\sigma = \varepsilon$, cioè l'asserto.

Possiamo ora provare che:

XVII. – *Un $(s + 1)$-arco S di un bipiano $(\alpha, \mathscr{B})$ di ordine $q = 2s$ è incompleto se, e solo se, esiste (ed è quindi unico) un punto N di α per cui passano tutte e sole le rette di $\mathscr{B}$ che sono tangenti ad S.*

Dimostrazione. Se N è un punto di α non appartenente ad S, l'insieme $S \cup \{N\}$ è un $(s + 2)$-arco se e solo se per N non passano secanti di S. Ciò, per prop. XVI, equivale a dire che ogni retta per N è tangente ad S. Poichè per un punto di un bipiano di ordine $q = 2s$ passano $2(s + 1)$ rette e poichè le tangenti ad S sono $2(s + 1)$, si ha l'asserto.

Il punto indicato con N nella prop. precedente, se esiste, dicesi *nucleo* dell'$(s + 1)$- arco S.

Mostreremo ora che:

XVIII. – *Se S è un $(s + 1)$-arco di un bipiano $(\alpha, \mathscr{B})$ di ordine $q = 2s$ e per ogni punto di α passa almeno una tangente ad S, allora per ogni punto di una secante di S passano esattamente due tangenti ad S.*

Dimostrazione. Sia r una delle $s(s + 1)$ secanti di S. Si considerino le coppie di tipo:

$$(Q, t)\,, \qquad \text{ove } Q \in r \text{ e } t \text{ è una tangente per } Q \text{ ad } S\,. \tag{6.2}$$

Le tangenti di S sono in numero di $2(s + 1)$ e ciascuna di esse interseca r in due punti. Se M è la cardinalità dell'insieme di tutte le coppie del tipo (6.2) si ha:

$$M = 4(s + 1)\,. \tag{6.3}$$

Per ognuno dei $2(s + 1)$ punti di r passano almeno due tangenti ad S (poichè ne passano due nei punti di $r \cap S$ e, per ogni altro punto di r passandone una ne passano almeno due, per la prop. XI). È allora $M \geqslant 4(s + 1)$ e vale il segno di uguaglianza se e solo se per ogni punto di r passano esattamente due tangenti ad S. Per la (6.3) si ha l'asserto.

Possiamo ora provare che:

XIX. – *Se S è un $(s+1)$-arco di un bipiano $(\alpha, \mathscr{B})$ di ordine $q=2s$ e per ogni punto di α passa almeno una tangente ad S, allora S è incompleto.*

Dimostrazione. Sia t una delle $2(s+1)$ tangenti ad S e sia T il punto di $S \cap t$. Si considerino le coppie di tipo:

$$(Q, t_Q), \qquad \text{ove } Q \in t \text{ e } t_Q \text{ è una tangente per } Q \text{ diversa da } t\,. \tag{6.4}$$

Indicato con L il numero di tutte le coppie del tipo (6.4), poichè ognuna delle $2(s+1)$-1 tangenti ad S diverse da t interseca t in due punti, è:

$$L = 4(s+1) - 2\,. \tag{6.5}$$

Per ognuno dei $2(s+1)$ punti di t passa almeno una tangente ad S diversa da t (per prop. XI e perchè per T passano due tangenti). È allora $L \geqslant 2(s+1)$ e vale il segno di uguaglianza se e solo se per ogni punto di t passa esattamente una tangente diversa da t. Per la (6.5) ed essendo $4(s+1)-2 > 2(s+1)$, deve esistere qualche punto di t per cui passa più di una tangente ad S diversa da t. Sia N un punto siffatto. Per N passano più di due tangenti e per prop. XVIII non può passarvi alcuna secante. Allora ogni retta per N è tangente ad S (cfr. prop. XVI). Per la prop. XVIII si ha l'asserto.

Proviamo infine che:

XX – *Sia S un $(s+1)$-arco di un bipiano $(\alpha, \mathscr{B})$ di ordine $q=2s$. S è completo se, e solo se, esiste un punto di α per cui non passa alcuna tangente ad S; cioè S è incompleto se, e solo se, per ogni punto di α passa almeno una tangente ad S.*

Dimostrazione. Sia S completo. Per la prop. XIX deve esistere qualche punto di α per cui non passano tangenti ad S, che altrimenti sarebbe incompleto, quindi la prima parte dell'asserto.

Sia ora P un punto di α per cui non passa alcuna tangente ad S. Detta r una secante per P si considerino le coppie di tipo

$$(Q, t)\,, \qquad \text{ove } Q \in r \text{ e } t \text{ è una tangente ad } S \text{ per } Q\,. \tag{6.6}$$

Se M è il numero di tutte le coppie di tipo (6.6), poichè ognuna delle $2(s+1)$ tangenti ad S incontra r in due punti, è:

$$M = 4(s+1)\,. \tag{6.7}$$

Per P non passa alcuna tangente. Se per ognuno dei restanti $2(s+1)-1$ punti di r passassero al più due tangenti, sarebbe $M \leqslant 4(s+1)-2$. Per la (6.7) deve allora esistere qualche punto di r per cui passano più di due tangenti, e dunque, (non potendo tali punti appartenere ad S e per la prop. XI) almeno quattro. Sia N' uno di tali punti. Se S fosse dotato di nucleo N, dovrebbe essere $N = N'$ (per N passerebbero tutte le tangenti, in particolare quelle per N'; e tre rette distinte di un bipiano passano al più per uno stesso punto). Poichè per $N = N'$ passerebbe allora la secante r si avrebbe un assurdo. Per prop. XVII si ha l'asserto.

Dalle prop. IX, X, XIII, XVII, e XX si ha la proposizione II.

I risultati cui si è pervenuti saranno illustrati dai seguenti esempi.

Sia $s = 1$. Un modello del bipiano di ordine due è dato dalla struttura complementare del piano proiettivo irriducibile di ordine due. In tale modello tutte e sole le rette del piano sono i 3-archi del bipiano. La coppia (α, θ), ϑλο α è l'insieme dei punti del bipiano di ordine due e θ è l'insieme dei suoi 3-archi è allora isomorfa al piano di Fano.

Sia $s = 2$. Nelle tabelle A e B sono rappresentati due bipiani, tra loro non isomorfi, di ugual ordine $q = 4$. In tali tabelle i numeri da uno a sedici rappresentano i punti del bipiano e le lettere ne rappresentano le rette. Il numero X si trova nella stessa colonna della lettera x se, e solo se, il punto X appartiene alla retta x.

Il bipiano rappresentato dalla tabella A è generato dal « group difference set » (cfr. [**2**], [**5**]$_1$ e [**5**]$_2$): $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$ del gruppo $(Z_2)^4(+)$. Esso è isomorfo al bipiano costruito da Cameron (cfr. [**3**], n. **2**). Per due punti di questo bipiano passano sei 3-archi, nessuno dei quali è completo come facilmente si può verificare. Le coppie (α, θ') e (α, θ''), ove α, θ', θ'' sono rispettivamente gli insiemi dei punti, dei 3-archi e dei 4-archi del bipiano, costituiscono due disegni. Il primo di essi ha parametri $v = 16$, $b = 240$, $k = 3$, $r = 45$, $\lambda = 6$; il secondo invece ha parametri $v = 16$, $b = 60$, $k = 4$, $r = 15$, $\lambda = 3$.

Il bipiano rappresentato dalla tabella B, che compare qui per la prima volta, è costruito con il metodo dei grafi (cfr. [**3**], n. **2**). Per due punti di tale bipiano passano, come si verifica, sei 3-archi, alcuni dei quali possono essere completi. Si considerino, per esempio, i due 3-archi $K = \{2. 10, 4\}$ ed $S \equiv \equiv \{2, 10, 5\}$, il primo di essi è completo ed il secondo incompleto. Per il punto 3 non passa nessuna tangente a K e il punto 16 è il nucleo di S.

TABELLA A

a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o	p	q	r
1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
2	2	3	4	5	6	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6
3	7	7	8	9	10	7	8	9	10	9	8	8	7	7	7
4	8	11	11	12	13	14	12	11	11	10	10	9	10	9	8
5	9	12	14	14	15	15	13	13	12	11	12	13	13	12	11
6	10	13	15	16	16	16	16	15	14	16	15	14	14	15	16

TABELLA B

a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o	p	q	r
1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
2	2	3	4	5	6	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6
3	7	7	8	9	10	10	7	11	8	10	8	8	10	12	10
4	8	11	11	12	13	14	13	9	12	11	16	9	8	9	11
5	9	12	14	14	15	12	14	13	11	16	7	14	12	7	14
6	10	13	15	16	16	15	16	15	16	9	15	13	13	15	7

Bibliografia.

[1] R. C. BOSE, *Graphs and designs, Finite Geometric Structures and their Applications*, Cremonese, Roma 1973,

[2] R. H. BRUCK, *Difference sets in a finite group*, Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 464-481.

[3] J. CAMERON, *Biplanes*, Math. Z. **131** (1973), 85-101.

[4] P. DEMBOSKI: $[\bullet]_1$ *Homomorphismen von λ-Ebenen*, Arch. Math. **10** (1959), 46-50; $[\bullet]_2$ *Finite Geometries*, Springer-Verlag, Berlin 1968.

[5] M. HALL: $[\bullet]_1$ *A survey of difference sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 975-986; $[\bullet]_2$ *Combinatorial theory*, Blaisdell, Publ., Walthem 1967.

[6] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, Cremonese, Roma 1961.

[7] G. TALLINI, *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois*, Relazione n. 30, Istituto di Matematica dell'Università di Napoli, 1974.

Summary.

This paper deals with k-arcs in a finite biplane $(\alpha, \mathscr{B})$, i.e. *wich sets of k points of* $(\alpha, \mathscr{B})$ *such that three distinct points of the set are never collinear. A biplane of order* 4 *appears in this paper for the first time.*

* * *