Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 199-212

G. ANICHINI e P. ZECCA (*)

Problemi ai limiti per equazioni differenziali multivoche su intervalli non compatti. (**)

1. - Introduzione.

In questo lavoro si studia il problema ai limiti per equazioni differenziali multivoche:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x} - A(t)x \in F(t, x) , \\ Lx = r , \end{cases}$$

con $A(t)$ localmente integrabile, $F(t, x)$ semicontinua superiormente, ed L operatore lineare e continuo, $t \in \Delta$ non compatto. Un caso particolare del problema (1) è, ad esempio, il problema:

$$\begin{cases} \dot{x} - A(t)x \in F(t, x) , \\ x(t_0) = x_0 , \\ \lim\limits_{t \to \infty} x(t, t_0, x_0) = 0 . \end{cases}$$

Il problema (1) è già stato considerato da vari autori nel caso di Δ compatto, cfr. es. LASOTA-OPIAL [6] e GRANDOLFI [4].

Nel n. 4 del presente lavoro è dato un teorema di esistenza per il pro-

(*) Indirizzo degli Autori: G. ANICHINI, Istituto Matematico « U. Dini », Università (v.le Morgagni 67/A), 50134 Firenze, Italia; P. ZECCA, Istituto di Matematica Applicata, Facoltà Ingegneria, Università (v.le Morgagni, 44), 50134 Firenze, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività di ricerca del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le Applicazioni del C.N.R. - Ricevuto: 26-III-1975.

blema (1), usando una tecnica di estensione per operatori lineari e continui (n. **3**) ed un teorema di convergenza compatta che permette di risolvere il problema:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dot{x} - A(t)x = f(t)\ , \\ Lx = r\ . \end{cases}$$

Nel n. **5** si danno alcune applicazioni dei risultati ottenuti a problemi ai limiti già considerati nella teoria classica delle equazioni differenziali ordinarie, cfr. es. CONTI [**3**].

2. - Notazioni e definizioni.

R^n - spazio euclideo n-dimensionale;

K - intervallo compatto della retta reale;

$\mathscr{A}$ - algebra delle matrici $n \times n$;

$cf(E)$ - $\{A \subseteq E$, E spazio normato, A insieme chiuso, convesso, non vuoto$\}$;

$L^{p,n}_{\text{loc}}$ - $\{x: R \to R^n,\ 1 \leqslant p < +\infty\}$;

A - $t \to A(t): R \to \mathscr{A}$ misurabile e localmente integrabile;

$C^n(R)$ - $\{x: R \to R^n$, continue$\}$;

$C^n(K)$ - $\{x: K \to R^n$, continue$\}$;

$C^n_0(K)$ - $\{x: R \to R^n$, continue su K e nulle esternamente a $K\}$;

L - operatore lineare e continuo da $C^n(R)$ in R^m;

L_K - operatore lineare e continuo, restrizione allo spazio $C^n_0(K)$ dello operatore L;

$v_L(I)$ - $\{\sup Lf,\ f \in C^n_0(I),\ \|f\|_K \leqslant 1$, I intervallo aperto relativamente a $K\}$;

$C^n M(R)$ - $\{x: R \to R^n$, quasi continue secondo la seguente

Definizione 2.1. Una funzione f è detta quasi continua rispetto alla funzione d'insieme v_L se può essere resa continua eliminando un numero finito (o una infinità numerabile) di intervalli aperti I_n per cui si abbia $\sum_{n=1}^{\infty} v_L(I_n) \leqslant \sigma,\ \forall \sigma > 0\}$.

F - $F(t, x): R \times R^n \to cf(R^n)$ con le proprietà:

F_1: $\forall x \in R^n$, $t \to F(t, x)$ è misurabile su R,

F_2: $\forall t \in R$, $x \to F(t, x)$ è semicontinua superiormente in R^n,

F_3: $\exists \alpha, \beta$, funzioni reali positive, misurabili e localmente integrabili tali che: $|F(t, x)| \leqslant \alpha(t) + \beta(t)|x| \quad \forall (t, x) \in R \times R^n$;

$\mathscr{F}(x)$ - $\{y: R \to R^n$, misurabili, $L^{1,n}_{\text{loc}}$, t.c. $\forall x \in C^n(R)$, $y(t) \in F(t, x(t))$ q.o.$\}$.

Definizione 2.2. Una successione $\{x_n\}$ di funzioni continue su R è detta *convergente su ogni compatto K alla funzione x*, e si scrive $x_n \xrightarrow{c} x$ se $x \in C^n(R)$ e se $x_n \to x$ uniformemente su ogni $K \subset R$.

Definizione 2.3. Una successione $\{f_n\}$ di funzioni reali di variabile reale *converge quasi-uniformemente su ogni compatto* se può essere resa uniformemente convergente (su ogni compatto) eliminando un numero finito (od una infinità numerabile) di intervalli I_n per cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_L(I_n) \leqslant \sigma, \qquad \forall \sigma > 0 .$$

Definizione 2.4. Sia $I \times I_n \subset D \subset R \times R^n$ e sia data la funzione $\varphi: I \to R^n$; la funzione φ è detta *non-continuabile rispetto a D* se $(t, \varphi(t)) \in D$, $\forall t \in I$ e se esistono successioni $t_n \to \sup I$, $\tau_n \to \inf I$ e $\forall Q \subset D$, Q compatto, $\exists p = p(Q)$ tale che:

$$(t_n, \varphi(t_n)) \in D \setminus Q \qquad \text{e} \qquad (\tau_n, \varphi(\tau_n)) \in D \setminus Q \qquad \forall n \geqslant p .$$

Definizione 2.5. Diremo che $x: R \to R^n$ è *soluzione del problema* (1) se è assolutamente continua su R e soddisfa la (1) q.o. su R.

3. - Alcuni risultati di analisi funzionale.

Sono noti i seguenti risultati.

Lemma 3.1. *Se le successioni $\{w_i\} \subset L^{p,n}_{\text{loc}}$, $\{v_i\} \subset L^{p,1}_{\text{loc}}$ e le funzioni $v \in L^{p,1}_{\text{loc}}$ e w soddisfano le condizioni*:

$$|w_i| \leqslant v_i \ \textit{q.o. su } R, \qquad v_i \xrightarrow{c} v, \qquad w_i \to w \ \textit{q.o. su } R,$$

allora $w \in L^{p,n}_{\mathrm{loc}}$ *e* $w_i \xrightarrow{c} w$ (cfr. [**6**], [**7**]).

Lemma 3.2. *Per ogni intervallo* $K \subset R$, *sia* $G\colon K \to cf(R^n)$ *misurabile su* R *e tale che* $|G(t)| \leqslant \varphi(t)$ *q.o. su* R, *con* $\varphi \in C^n(R)$. *Allora esiste* $y \in L^{1,n}_{\mathrm{loc}}$, *tale che* $y \in G(t)$ *q.o. su* R (cfr. [**6**]).

Lemma 3.3. *Per ogni successione* $\{w_i\} \in L^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ *e* $\varphi \in L^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, *tali che* $|w_i| \leqslant \varphi$ *q.o. su* R, *esiste una doppia successione* λ_{ij}, *con* $i = 1, 2, \ldots$, $j = i, i+1, \ldots$, *di numeri reali non negativi tali che* $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij} = 1$, *con* $\lambda_{ij} = 0$ *per* j *sufficientemente grande dipendentemente da* i, *e la successione*

$$\tilde{w}_i = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij} w_j \,, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

converge q.o. su R *ad una funzione* $w \in L^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ (cfr. [5]).

Lemma 3.4. *Sia* $\Gamma\colon L^{1,n}_{\mathrm{loc}} \to E$, *con* E *spazio di Banach, una trasformazione lineare e continua e sia* $\mathscr{F}(x) \neq \emptyset$; *allora* $\Gamma\mathscr{F}$ *trasforma* $C^n(R)$ *in* $cf(E)$ *ed è semicontinua superiormente* (cfr. [**6**]).

Lemma 3.5. *La corrispondenza* $x \to \mathscr{F}(x)$ *definisce una trasformazione di* $C^n(R)$ *in* $cf(L^{1,n}_{\mathrm{loc}})$ *limitata su ogni compatto* (cfr. [**6**]).

Nota 3.1. *Dato il problema*:

$$(2_K) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + f(t) \\ t \in K \subset R \\ L_K\, x = r \end{cases}$$

se $f(t)$ *e una funzione misurabile e localmente integrabile, possiamo esprimere la soluzione nella forma* (cfr. [**4**])

$$x(t) = \Gamma f(t) + Hr \,,$$

in cui

$$\Gamma\colon f \to \Gamma f = -\,U(t, s) L_u^* L \int_s^t U(t, \tau) f(\tau)\, d\tau + \int_s^t U(t, \tau) f(\tau)\, d\tau \qquad s \leqslant t\,,$$

$$Hr = U(t, s)(c + L_u^* r)\,,$$

con c tale che $L_u c = 0$ ed essendo $U(t, s): R \times R \to \mathscr{A}$ una funzione assolutamente continua soluzione di

$$U(t, s) = I + \int_s^t A(\tau)\, U(\tau, s)\, d\tau$$

ed $L_u = L \cdot U(\cdot, s)$ tale che $L_u L_u^* L_u = L_u$.

Supporremo nel seguito che:

a) Data ϕ_r, varietà lineare di $L^{1,n}_{\text{loc}}$, A, L, r siano tali che il problema (2_K) abbia soluzione per ogni $f \in \phi_r$, per ogni $K \subset R$.

b) $\forall w \in C^n(R)$ t.c. $Lw = r$, sia $\mathscr{F}(w) \subset cf(\phi_r)$.

c) $\forall K \subset R$, $\beta_K = \int_K \beta(t)\, dt$ sia sufficientemente piccolo.

Nota 3.2. *La condizione F_3 fa sì che per ogni $f \in \phi_r$, ogni soluzione del problema (2_K) sia prolungabile su R.*

Nota 3.3. *L'operatore $T: x \to Tx = \Gamma\mathscr{F}(x) + Hr$ è un operatore semicontinuo superiormente rispetto alla topologia di $C^n(R)$.*

Lemma 3.6. *Una funzione reale di variabile reale è quasi continua* (vedi Def. 2.1) *se e solo se su ogni compatto è limite quasi uniforme* (vedi Def. 2.3) *di una successione di funzioni continue*, cfr. [7].

Proposizione 3.1. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue uniformemente limitata su ogni compatto e che, su ogni compatto, converge quasi uniformemente alla funzione f. Se L è un operatore lineare e continuo, la successione $\{Lf_n\}$ converge ed il limite è sempre lo stesso per ogni successione convergente ad f* (1).

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, sia I_j, $j = 1, 2, \ldots,$ una infinità numerabile di intervalli disgiunti relativamente aperti rispetto a K, tali che $\sum_{j=1}^{\infty} v_L(I_j) \leq \varepsilon$. Per ipotesi, per ogni $\sigma > 0$, esiste $n_0 = n_0(\sigma)$ tale che

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \sigma \qquad \text{per} \qquad n, m \geq n_0 .$$

(1) La traccia della dimostrazione segue quella data dal prof. G. Goodman nel corso di Analisi Funzionale tenuto presso l'Istituto Matematico « U. Dini » di Firenze, nell'anno accademico 1973-74.

Per l'arbitrarietà di σ, possiamo supporre $\sigma = \varepsilon$; consideriamo adesso l'insieme

$$E_{\varepsilon,n,m} = \{x\colon\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\}$$

e sia $\overline{E}_{\varepsilon,n,m}$ la sua chiusura. Si ha $\overline{E}_{\varepsilon,n,m} \neq \emptyset$, essendo $\emptyset \neq E_{\varepsilon,n,m} \subset \overline{E}_{\varepsilon,n,m}$. Se

$$\partial E_{\varepsilon,n,m} \cap K = \{x \in K\colon\ |f_n(x) - f_m(x)| = \varepsilon\} = \emptyset,$$

abbiamo $E_{\varepsilon,n,m} \cap K = K$ ed il teorema sarebbe dimostrato, avendosi:

$$\|Lf_n(x) - Lf_m(x)\| \leqslant \|L\|\,\|f_n(x) - f_m(x)\| \leqslant \|L\|\,\varepsilon\,, \qquad \forall x \in K\,.$$

Sia allora $\partial E_{\varepsilon,n,m} \cap K \neq \emptyset$. In tale caso abbiamo:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall x \in K - \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\,, \qquad \text{per} \qquad m, n \geqslant n_0\,.$$

Osserviamo che $\lim\limits_{j\to\infty} \operatorname{mis} I_j = 0$, essendo $I_i \cap I_j = \emptyset$ se $i \neq j$ Poniamo adesso

$$g_{nm} = f_n - f_m$$

Abbiamo: $\|g_{nm}\| > \varepsilon$ per $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j$, ed inoltre, essendo g_{nm} uniformemente continua su K:

$$\lim_{j\to\infty}\{\sup_{x,x'\in I_j} |g_{nm}(x) - g_{nm}(x')|\} = 0\,.$$

Da ciò segue che solo su un numero finito di intervalli I_j si ha:

$$\sup_{x\in I_j} |g_{nm}(x)| \geqslant \varepsilon\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, j_0\,.$$

Poniamo ancora

$$g^j_{nm}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin I_j \\ g_{nm}(x) \pm \varepsilon\,, & x \in I_j\,, \end{cases}$$

dipendentemente dal fatto che su I_j, $g_{nm}(x)$ sia positivo o negativo (osservando che su I_j, g_{nm} non cambia segno).

Consideriamo la serie:

$$g^0_{nm}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g^j_{nm}(x) .$$

Osservando che $\lim_{j\to\infty} g^j_{nm} = 0$, possiamo dire che la serie è uniformemente convergente su ogni compatto in quanto

$$\forall \eta > 0 , \ \exists j_0 : \ \ \forall j \geqslant j_0 , \qquad |g^j_{nm}(x)| < \eta ,$$

e se

$$R_l(x) = |g^{j_1}_{nm}(x) + \ldots + g^{j_1+l}_{nm}(x)| , \qquad \text{con} \quad j_1 \geqslant j_0 , \ l = 1, 2, \ldots ,$$

abbiamo $R_l(x) < \eta$, essendo $I_i \cap I_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

Pertanto $g^0_{nm}(x)$ è una funzione continua. Abbiamo allora successivamente, se $|f_n(x)| \leqslant M_K$,

$$|g_{nm}(x) - g^0_{nm}(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (\text{per costruzione di } g^0_{nm})$$

$$|g_{nm}(x)| \leqslant 2M_K , \qquad |g^j_{nm}(x)| \leqslant 2M_K .$$

Allora per ogni I_j abbiamo:

$$\pm L g^j_{nm} = \pm 2 M_K L(g^j_{nm}/2M_K) \leqslant 2 M_K v_L(I_j) ,$$

da cui

$$\|L g^0_{nm}\| = \pm L \sum_{j=1}^{\infty} g^j_{nm} = \sum_{j=1}^{j_0} (\pm L g^j_{nm}) \pm L \sum_{j=j_0+1}^{\infty} g^j_{nm}$$

$$\leqslant 2 M_K \sum_{j=1}^{j_0} v_L(I_j) + \|L\| \eta \leqslant 2 M_K \, \varepsilon + \|L\| \, \eta$$

e, per l'arbitrarietà di η, si ha

$$\|L g^0_{nm}\| \leqslant 2 M_K \varepsilon .$$

Per ogni compatto abbiamo allora

$$\|Lf_n - Lf_m\| = \|Lg_{nm}\| = \|Lg^0_{nm} + L(g_{nm} - g^0_{nm})\|$$
$$\leqslant \|Lg^0_{nm}\| + \|L(g_{nm} - g^0_{nm})\| \leqslant 2M_K\varepsilon + \|L\|\,\varepsilon = \varepsilon(2M_K + \|L\|)\,.$$

ed essendo $\|L\|$ ed M_K indipendenti da m e da n si ha convergenza su ogni compatto.

Sia infine $f'_1, f'_2, \ldots$ una successione tale che $\lim\limits_n f'_n = f$: è allora sufficiente considerare la successione

$$f'_1, f_1, f'_2, f_2, \ldots, f'_n, f_n, \ldots$$

anch'essa convergente ad f quasi-uniformemente in quanto Lf'_n è una sotto-successione di una successione convergente, e si ha

$$\lim_{n\to\infty} Lf_n = \lim_{n\to\infty} Lf'_n = Lf\,.$$

Il funzionale $\bar{L}$ (estensione di L) è lineare e limitato, e si ha

$$\|\bar{L}\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |\bar{L}f|\,, \qquad f \in C^n M(R)\,.$$

Proposizione 3.2. *Nelle ipotesi* F_1, F_2, F_3, a), b), c) (vedi Nota 3.1) *il problema* (1) *ammette soluzioni relativamente ad ogni intervallo compatto* (cfr. [4]).

4. - Teoremi di esistenza.

Lemma 4.1. *Sia dato il sistema di equazioni differenziali*

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{3}$$

con $A(t)$ *misurabile e* $f(t)$ *limitata e misurabile su* K. *Sia* φ_ν *definita su* K *tale che* $L\varphi_\nu = r^K_\nu$ *essendo* $\lim\limits_{\nu\to\infty} r^K_\nu = r^K$. *Poniamo*

$$G_\nu = \varphi_\nu - \Gamma f - Hr^K_\nu\,.$$

Allora, se φ_ν è misurabile su K e se $\lim_{\nu\to\infty} |G_\nu| = 0$ uniformemente su K, $\{\varphi_\nu\}$ contiene una sottosuccessione che converge uniformemente su K alla funzione φ soluzione del sistema dato e tale che $L\varphi = r^K$ su K.

Dimostrazione. La successione $\{\varphi_\nu - G_\nu\}$ è equicontinua ed equilimitata su K, per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste allora una sottosuccessione φ_{ν_j} che converge uniformemente su K a $\varphi = \Gamma f + Hr^K$. Abbiamo inoltre,

$$L\varphi = L \lim_{j\to\infty} \varphi_{\nu_j} = \lim_{j\to\infty} L\varphi_{\nu_j} = \lim_{j\to\infty} r^K_{\nu_j} = r^K .$$

Teorema 4.1. *Sia dato il sistema di equazioni differenziali* (3), *con le stesse ipotesi del Lemma* 4.1. *Sia inoltre $\{U_K\}$ una famiglia monotona di intervalli compatti invadenti la retta reale, e sia φ_ν una funzione continua non continuabile rispetto al dominio di definizione I_ν, in modo tale che se $U_{X_\nu} \subset I_\nu$ si abbia*

$$L_{X_\nu}\varphi_\nu = r_\nu^{K_\nu} \qquad e \qquad \lim_{K_\nu\to\infty}\lim_{\nu\to\infty} r_\nu^{X_\nu} = r .$$

Con la simbologia del Lemma 4.1 *sia ancora*

$$G_\nu = \varphi_\nu - \Gamma f - Hr_\nu^{X_\nu} . \tag{4}$$

Supponiamo che per ogni compatto $Q \subset R\times R^n$ esista $\beta_\nu = \beta_\nu(Q)$ con $\lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu = 0$, t.c. se $(s, \varphi_\nu(s)) \in Q$ per $s \in I_\nu$, allora $|G_\nu| \leqslant \beta_\nu$; in tali ipotesi esiste una soluzione $\varphi: R \to R$ del problema (3) *tale che $L\varphi = r$ ed esiste una sottosuccessione $\{\varphi_{\nu_j}\}$ che uniformemente su ogni U_K converge alla funzione φ.*

Dimostrazione. Sia $\{Q_p\}$ una famiglia monotona di insiemi compatti, con $Q_0 = \bar I_0 \times D_0$ (I_0 aperto di R e $D_0 = \{\varphi(t) : t \in \bar I_0\}$), invadente lo spazio $R\times R^n$, t.c. $Q_i \subset \operatorname{int} Q_{i+1}$. Per ogni $p = 0, 1, 2, \ldots$ siano rispettivamente $t_\nu(Q_p)$ ed $s_\nu(Q_p)$ l'ultimo e il primo tempo $t \in \bar I_\nu$ t.c. $(t, \varphi_\nu(t)) \in \partial Q_p$. Per la compattezza di $\bar I_\nu$ e per la monotonia di $\{Q_p\}$ esistono due successioni, una crescente ω_p ed una decrescente α_p, ed una sottosuccessione $\{\varphi_{\nu_j}\}$ tali che

$$\lim_{\nu_j\to\infty} s_{\nu_j}(Q_p) = \alpha_p , \qquad \lim_{\nu_j\to\infty} t_{\nu_j}(Q_p) = \omega_p .$$

Si ha ancora

$$d(\partial Q_{p-1}, \partial Q_p) \leqslant |\varphi_{\nu_j}(t_{\nu_j}(Q_p)) - \varphi_{\nu_j}(t_{\nu_j}(Q_{p-1}))| + |t_{\nu_j}(Q_p) - t_{\nu_j}(Q_{p-1})|$$

$$\leqslant |G_{\nu_j}(t_{\nu_j}(Q_p)) + \Gamma f + Hr_{\nu_j}^{K\nu} - G_{\nu_j}(t_{\nu_j}(Q_{p-1})) - \Gamma f - Hr_{\nu_j}^{K\nu}| +$$

$$+ |t_{\nu_j}(Q_p) - t_{\nu_j}(Q_{p-1})| \leqslant |G_{\nu_j}(t_{\nu_j}(Q_p)) - G_{\nu_j}(t_{\nu_j}(Q_{p-1}))| +$$

$$+ |t_{\nu_j}(Q_p) - t_{\nu_j}(Q_{p-1})| \leqslant \beta_{\nu_j}(Q_p) + \beta_{\nu_j}(Q_{p-1}) + |t_{\nu_j}(Q_p) - t_{\nu_j}(Q_{p-1})|,$$

da cui per $\nu_j \to +\infty$

$$d(\partial Q_p, \partial Q_{p-1}) \leqslant |\omega_p - \omega_{p-1}| \qquad \text{e quindi} \qquad \omega_p > \omega_{p-1}.$$

Analogamente $\alpha_p < \alpha_{p-1}$. Allora si ha

$$\lim_{p\to\infty} \alpha_p = -\infty, \qquad \lim_{p\to\infty} \omega_p = +\infty.$$

Prendiamo adesso la famiglia $\{T_p\}$ di domini compatti, monotona ed invadente la retta, definita da

$$T_p = [\tfrac{1}{2}(\alpha_p + \alpha_{p-1}), \tfrac{1}{2}(\omega_p + \omega_{p-1})]$$

come una particolare famiglia di tipo $\{U_K\}$, e chiamiamo più semplicemente φ_ν la sottosuccessione φ_{ν_j} scelta precedentemente. Sull'intervallo T_1, φ_ν soddisfa la condizione (4), ed anche $(s, \varphi_\nu(s)) \in Q_1$, $\forall s \in T_1$ e $|G_\nu(t)| \leqslant \beta_\nu(Q_1)$ per ν sufficientemente grande. Per il Lemma 4.1 $(T_1 = K)$ esiste dunque una sottosuccessione $\{\varphi_\nu^1\}$ uniformemente convergente su T_1 ad una soluzione ψ_1 di (3) tale che $L\psi_1 = r^1$. Allora, su T_2, φ_ν^1 soddisfa la (4), $(s, \varphi_\nu^1(s)) \in Q_2$ e $|G^1(t)| \leqslant \beta_\nu^1(Q_2)$ per ν sufficientemente grande. Possiamo quindi trovare una sottosuccessione $\{\varphi_\nu^2\}$ convergente uniformemente su T_2 ed una soluzione ψ_2 di (3), tale che $L\psi_2 = r^2$, ed inoltre $\psi_2 = \psi_1$ su T_1. Per induzione, se $\varphi = \lim_{p\to\infty} \psi_p$ su R la successione diagonale $\{\varphi_\nu^\nu\}$ converge uniformemente su ogni compatto alla funzione φ soluzione di (3) con $L\varphi = r$. Abbiamo infatti

$$L\varphi = L \lim_{p\to\infty} \psi_p = \lim_{p\to\infty} L\psi_p = \lim_{p\to\infty} r^p = r.$$

T e o r e m a 4.2. *Nelle ipotesi* F_1, F_2, F_3, a), b), c), *il problema* (1) *ammette soluzioni per* $t \in R$.

D i m o s t r a z i o n e. Sia $R = \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$; per ogni intervallo compatto il Lemma 3.1 ci assicura l'esistenza di una soluzione ψ_j del problema (1) tale che

$L\psi_j = r^j$; esprimiamo con $\psi_j \in T(\psi_j)$ il fatto che la funzione ψ_j è soluzione di (1) relativamente all'intervallo compatto K_j (ed essendo T l'operatore definito nella Nota 3.3). Indicando con $\mathring{K}_j$ l'apertura di K_j abbiamo inoltre che le funzioni ψ_j sono soluzioni del problema (2), non continuabili rispetto a $\mathring{K}_j$: per il Teorema 4.1 abbiamo allora che $\psi_j(t) \xrightarrow{c} \varphi(t)$ soluzione del problema (2) per $t \in R$. Per la semicontinuità superiore dell'operatore T si ha allora: $\varphi \in T(\varphi)$. e ciò completa la dimostrazione.

5. - Applicazioni.

Per illustrare il Teorema 4.2 consideriamo vari tipi di problemi ai limiti: Problema di CAUCHY

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dot{x} - A(t)x \in F(t, x) \\ t_0 \in R\,, \quad r \in R^n \\ x(t_0) = r^i \end{cases}$$

per cui la condizione c) è adesso superflua.

Problema analogo a quello di NICOLETTI

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dot{x} - A(t)x \in F(t, x) \\ t_i \in R\,, \quad r_i \in R\,, \quad i = 1, 2, \dots . \\ x_i(t_i) = r_i . \end{cases}$$

In questo caso $Lx = (x_1(t_1), \dots, x_n(t_n))^*$ ed il problema ammette almeno una soluzione se sono verificate le ipotesi a), b), c), F_1, F_2, F_3.

Caso periodico:

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \dot{x} - A(t)x \in F(t, x) \\ x(T) - x(0) = 0\,, \end{cases}$$

in cui $A(t)$ è una funzione periodica di periodo T e $F(t, x)$ è definita da $R \times R^n$ in $cf(R)$ tale che $F(t + T, x) = F(t, x)$. Si ha almeno una soluzione periodica di periodo T. (Tale caso è già stato considerato in [4]).

Vogliamo infine considerare un problema ai limiti che ci permette di illustrare i risultati ottenuti col Teorema 4.1 e il Teorema 4.2. Sia dato

$$\text{(D)}\qquad \begin{cases} \dot{x} - A(t)x \in F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x(t, t_0, x_0) = 0\,, \end{cases}$$

in cui $A(t)$, $F(t, x)$ verificano le ipotesi F_1, F_2, F_3, a), b), c).

Il problema (D2) « corrispondente » è dato da:

$$\text{(D2)}\qquad \begin{cases} \dot{x} - A(t)x = f(t)\,, \\ x(t_0) = x_0\,, \\ \lim\limits_{t\to\infty} x(t, t_0, x_0) = 0\,. \end{cases}$$

Seguendo il Teorema 4.1 consideriamo il sistema

$$(\mathrm{D2}_K)\qquad \begin{cases} \dot{x} - A(t)x = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_K, t_0, x_0) = r_K, \quad K = 1, 2, \ldots\,, \end{cases}$$

definito per $t \in [-t_K, t_K]$, con $t_0 \in [-t_K, t_K]$, $\lim\limits_{K\to\infty} r^K = 0$ avendo inoltre posto $R = \bigcup\limits_{K=1}^{\infty} A_K$ con $A_K = [-t_K, t_K]$. La soluzione di $(\mathrm{D2}_K)$ è data da (cfr. [**3**])

$$x(t, t_0, x_0, t_K, r^K) = U(t, t_0)[I + U(t_K, t_0)]^{-1} r^K \int_{t_0}^{t_K} G(t, s) f(s)\, ds\,,$$

in cui $G(t, s)$ è definito da:

$$G(t, s) = \begin{cases} U(t, t_0)[I + U(t_K, t_0)]^{-1} U(t_0, s)\,, & t_0 \leqslant s < t \leqslant t_K\,, \\ -U(t, t_0)[I + U(t_K, t_0)]^{-1} U(t_K, s)\,, & t_0 \leqslant t < s \leqslant t_K\,, \end{cases}$$

e, con le notazioni del Teorema 4.1 possiamo scrivere,

$$x(t, t_0, x_0, t_K, r^K) = \Gamma f(t) + H(x_0 + r^K)$$

avendo posto $L_K x = x(t_K) - x(t_0) = r^K$.

Osserviamo che se $\{\alpha_\nu\}$ è una successione tale che $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = 0$ ponendo $\varphi_{K_\nu} = \Gamma f + H(x_0 + r^{K_\nu}) + \alpha_\nu$ sono rispettate le ipotesi del Teorema 4.1 (con $\beta_\nu = \alpha_\nu$). Se poniamo, come è lecito per quanto osservato sopra, $\overline{Y}\, Y^{-1}(t_0) = \lim_{t_K\to\infty} U(t_K, t_0)$, si può allora dire che

$$x(t, t_0, x_0, \lim_{t_K\to\infty} t_K, 0) = Y(t)\, Y^{-1}(t_0)[I + \overline{Y}\, Y^{-1}(t_0)]^{-1} x_0 + \int_{t_0}^{\infty} G(t, s) f(s)\, ds\,,$$

in cui $G(t, s)$ è definita da:

$$G(t, s) = \begin{cases} Y(t)\, Y^{-1}(t_0)[I + \overline{Y}\, Y^{-1}(t_0)]^{-1}\, Y(t_0)\, Y^{-1}(s)\,, \\ -\, Y(t)\, Y^{-1}(t_0)[I + \overline{Y}\, Y^{-1}(t_0)]^{-1}\, \overline{Y}\, Y^{-1}(s.\,. \end{cases}$$

Pertanto il problema (D2) ammette soluzione e se $f(t) \in \Phi_r$ (vedi Nota 3.1) potremo dire che il problema ammette soluzione.

Bibliografia.

[1] C. Berge, *Espaces Topologiques - Function Multivoques*, Dunod, Paris 1959.

[2] A. Cellina, *Multivalued differential equations and ordinary differential equations*, SIAM J. Appl. Math. (2) **18** (1970), 533-538.

[3] R. Conti, *Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations*, Boll. Un. Mat. Ital. **22** (1967), 135-178.

[4] M. Grandolfi, *Problemi ai limiti per le equazioni differenziali multivoche*, Lincei Rend. Mat. **42** (1967), 355-360.

[5] A. Lasota, *Une généralization du premier théorème de Fredholm et ses applications à la théorie des équations différentielles ordinaires*, Ann. Polon Mat. **18** (1966), 65-77.

[6] A. Lasota and Z. Opial, *An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations*, Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Sci. Math. Astronom Phys. **13** (1965), 781-786.

[7] G. Sansone e L. Merli, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabili reali*, Cedam, Padova 1964.

[8] A. Strauss and J. Yorke, *On the fundamental theory of differential equations*, SIAM Rev. **11** (1969), 236-246.

Summary.

This paper estends an existence theorem due to Lasota, Opial and Grandolfi on boundary value problems for multivalued differential equations to the case when the domain is a non-compact interval. Some applications for boundary value problems for multivalued and ordinary differential equations are given.

* * *