Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 191-198

MASSIMO FERRI (*)

Sulla planarità di grafi associati a gruppi. (**)

Introduzione.

Dopo aver stabilito un'adeguata terminologia, si definisce la suddivisione per i grafi e se ne dimostra una proprietà che verrà sfruttata successivamente. Si richiamano la nozione di grafo planare ed alcuni teoremi sulla planarità; si dimostra una condizione necessaria e sufficiente per la non planarità, concernente le catene del grafo in esame.

Si definisce, infine, il diagramma di CAYLEY relativo ad un gruppo e ad un suo insieme di generatori e si dimostrano una condizione necessaria per la planarità ed una necessaria e sufficiente per la non planarità di un diagramma di CAYLEY.

1. - Grafi, catene, suddivisioni.

Per *grafo* intenderemo un complesso simpliciale monodimensionale ([1], pp. 108, 139; cfr. anche [2], p. 9); un grafo verrà esibito mediante la coppia (X, S), dove X è l'insieme dei suoi *vertici* (simplessi 0-dimensionali), S è l'insieme dei suoi *spigoli* (complessi 1-dimensionali, cioè paia di vertici distinti). Gli elementi di uno spigolo sono detti *estremi* dello spigolo. Due vertici sono detti *adiacenti* se sono estremi di uno stesso spigolo. Dato $x \in X$ la *valenza* di x è il cardinale dell'insieme $\{u \in S \mid x \in u\}$ o, equivalentemente, dell'insieme $\{y \in X \mid \{x, y\} \in S\}$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica « G. Vitali », 41100 Modena, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. - Ricevuto: 29-I-1975.

I termini: grafo finito, sottografo, grafo connesso, componente connessa, omomorfismo ed isomorfismo di grafi verranno qui usati con lo stesso significato che in [**2**].

Per $n \in N^+ = N - \{0\}$ definiamo

$$[n] = \{i \in N \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}, \qquad \langle n \rangle = \{i \in N \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Dato un grafo $F = (X, S)$, diremo *catena di lunghezza* n, con $n \in N^+$, ogni applicazione $A \colon [n] \to X$ tale che, per ogni $i \in [n-1]$, $\{A(i), A(i+1)\} \in S$.

I vertici $x = A(0)$, $y = A(n)$ si dicono *estremi di* A; si dice anche che A *congiunge* x *con* y. Per ogni catena A indicheremo con $\mu(A)$ la lunghezza di A.

Ricordiamo ([**1**], p. 121) che, dato un complesso simpliciale K, una *suddivisione* di K è un complesso simpliciale K' tale che:

(a) i vertici di K' sono punti di K;

(b) se s' è un simplesso di K', vi è qualche simplesso s di K' tale che $s' \subseteq |s|$;

(c) l'applicazione lineare $|K'| \to |K|$ che ad ogni vertice di K' associa il punto corrispondente di $|K|$, quando considerata come applicazione fra spazi topologici, è un omeomorfismo.

$|K|$, $|K'|$, $|s|$ indicano, al solito, lo «spazio» di K, K', s rispettivamentè ([**1**], pp. 110-111). Notiamo che, in conseguenza della (b), ogni vertice di K e vertice di K'.

In un grafo dato F, si dirà $\mathscr{C}(F)$ l'insieme delle catene di lunghezza n, per qualunque $n \in N^+$.

Prop. 1. *Siano $F = (X, S)$, $F' = (X', S')$ grafi finiti e sia F' una suddivisione di F; allora esiste un'applicazione $\theta \colon S \to \mathscr{C}(F')$ tale che, per ogni $u \in S$,*

(i) *u coincide con il paio degli estremi di $\theta(u)$;*

(ii) *$\theta(u)$ è un'applicazione iniettiva;*

(iii) *esclusi gli estremi di $\theta(u)$, i vertici della sua immagine hanno valenza 2 in F'.*

Dim. Nel corso della dimostrazione ogni vertice $x \in X$ verrà identificato, come di consueto, con l'applicazione $X \to \mathbf{R}$ che associa 1 ad x e 0 ad y per $y \in X - \{x\}$.

Sia $u \in S$; costruiamo la catena $\theta(u)$.

Consideriamo l'insieme A_u di vertici di F' appartenenti a $|u|$; A_u è un insieme finito. Se $u=\{a, b\}$, ogni elemento di $|u|$ si scrive in modo unico nella forma $ta+(1-t)b$ per un opportuno $t\in[0,1]$. Poichè a e b appartengono ad A_u e sono distinti, A_u ha cardinale $\geqslant 2$; sia $(n+1)$ tale cardinale. Gli elementi di A_u si possono ordinare in una successione finita $(x_i)_{i\in[n]}$ in modo tale che, se, per ogni $i\in[n]$, $t_i\in[0,1]$ è il numero reale per cui $x_i=t_i a+$ $+(1-t_i)b$, la successione $(t_i)_{i\in[n]}$ sia monotona crescente; allora, per ogni $i\in[n-1]$, $\{x_i, x_{i+1}\}\in S'$ in conseguenza di (b) e (c) della definizione di suddivisione.

Definiamo $\theta(u)\colon [n]\to X, \qquad \theta(u)\colon i\mapsto x_i.$

(i) segue dalle uguaglianze $a=x_0$, $b=x_n$; (ii) segue dalla costruzione e dalla disuguaglianza $x_i\neq x_j$ per $i\neq j$.

Supponiamo, ora, che esista $x_r\in A_u$ con $r\in\langle n-1\rangle$, di valenza $\neq 2$. Osserviamo innanzitutto che x_r è adiacente a $\theta(u)(r-1)$ e a $\theta(u)(r)$; perciò x_r ha valenza >2. Allora esiste uno spigolo $\tilde u\in S'$ distinto da $\{x_{r-1}, x_r\}$ e da $\{x_r, x_{r+1}\}$ tale che $x_r\in\tilde u$. Dimostriamo che, se $\tilde u=\{x_r, y\}$, y non coincide con alcun elemento di A_u. Infatti, già sappiamo che $y\neq x_r$, $y\neq x_{r-1}$, $y=x_{r+1}$; supponiamo che sia $y=x_s$ con $s>r+1$ (la dimostrazione nel caso $s<r-1$ è analoga); allora consideriamo l'elemento di $|\tilde u|$

$$z=\bar t x_s+(1-\bar t)\,x_r\,, \qquad \text{dove} \qquad \bar t=\frac{t_{r+1}-t_r}{t_s-t_r}\,;$$

ricordando che $x_s=t_s a+(1-t_s)b$, $x_r=t_r a+(1-t_r)b$ ed operando le sostituzioni, si ottiene che $z=x_{r+1}$, cioè che un vertice è interno allo spazio di uno spigolo, il che contrasta con la definizione di spazio di un complesso. Dunque $y\notin A_u$. Sia, ora, w un punto interno di u: esiste $t'\in\,]0,1[$ tale che $w=t'x_r+(1-t')y$. Ma $x_r=t_r a+(1-t_r)b$, con $t_r\in\,]0,1[$; dunque

$$w=t't_r a+t'(1-t_r)b+(1-t')y$$

sarebbe un elemento di $|F'|$ a valori non nulli su tre distinti vertici. Essendo F' monodimensionale, ciò dimostra l'assurdità della supposizione iniziale contraddicente la (iii). Q.E.D.

2. - Grafi planari.

Per *grafo planare* intenderemo un grafo immergibile nel piano (cfr. anche [2], p. 102).

Un grafo $F=(X,S)$ si dice *di tipo* K_n con $n\in N^+$, se $\|X\|=n$ ed S è l'insieme di tutte le paia $\{x,y\}\subseteq X$ con $x\neq y$.

Un grafo $F'=(X',S')$ si dice *di tipo* $K_{m,n}$ con $m,n\in N^+$ se esistono Y,Z tali che $X=Y\cup Z$, $Y\cup Z=\emptyset$, $\|Y\|=m$, $\|Z\|=n$, e se S' è l'insieme di tutte le paia $\{y,z\}\subseteq X$ con $y\in Y$, $z\in Z$.

Riportiamo senza dimostrazione (cfr [**2**], p. 104) le seguenti proposizioni.

Prop. 2. *Un grafo connesso, finito, planare ha almeno un vertice di valenza* $\leqslant 5$.

Prop. 3. *Grafi di tipo* K_5 *e di tipo* $K_{3,3}$ *non sono planari.*

Una caratterizzazione dei grafi planari è la seguente (cfr. [**2**], p. 109; [**3**], p. 210; [**4**]; [**5**]).

Prop. 4 (Teorema di Kuratowski). *Un grafo è planare se e solo se ammette sottografi isomorfi a suddivisioni di grafi di tipo* K_5 *o di tipo* $K_{3,3}$.

Dato un grafo $F=(X,S)$, definiamo in $\mathscr{C}(F)$, insieme delle catene di F, la relazione int come segue: siano $\Lambda,\Lambda'\in\mathscr{C}(F)$, $m=\mu(\Lambda)$, $n=\mu(\Lambda')$; $\Lambda\operatorname{int}\Lambda'$ se e solo se esiste una coppia

$$(m',n')\in[m]\times[n]-\{(0,0),(0,n),(m,0),(m,n)\},\quad\text{per cui}\qquad \Lambda(m')=\Lambda'(n')\,.$$

Prop. 5. *Condizione necessaria e sufficiente perchè un grafo* $F=(X,S)$ *non sia planare è che si verifichi* (a) *oppure* (b):

(a) *esistono vertici* $b_i,c_i\in X$ $(i\in\langle 3\rangle)$ *e catene* Λ_i^j *iniettive congiungenti* b_i *con* c_j $(i,j\in\langle 3\rangle)$ *tali che, qualunque siano gli indici* i,j,i',j', *con* $(i,j)\neq(i',j')$, *non si abbia* $\Lambda_i^j\operatorname{int}\Lambda_{i'}^{j'}$;

(b) *esistono vertici* $a_i\in X$ $(i\in\langle 5\rangle)$ *e catene* Λ_i^j *iniettive congiungenti* a_i *con* a_j $(i\leqslant(j-1)=1,\dots,4)$ *tali che, qualunque siano gli indici* i,j,i',j' *con* $(i,j)\neq(i',j')$, *non si abbia* $\Lambda_i^j\operatorname{int}\Lambda_{i'}^{j'}$.

Dim. Sia F non planare. Per la Prop. 4, F ammette un sottografo $F'=(X',S')$ isomorfo ad un grafo $H'=(Y',T')$ suddivisione di un grafo $H=(Y,T)$ di tipo $K_{3,3}$ (caso a')) o di tipo K_5 (caso b')). Sia x_i, y_i $(i\in\langle 3\rangle)$ una denominazione dei vertici di H tale che $T=(\{x_i,y_j\})_{i,j\in\langle 3\rangle}$ e sia $u_i^j=\{x_i,y_j\}$ $(i,j\in\langle 3\rangle)$ nel caso a'). Sia $(w_i)_{i\in\langle 5\rangle}=Y$ e sia $u_i^j=\{w_i,w_j\}$ $(i\leqslant(j-1)=1,\dots,4)$ nel caso b').

La Prop. 1 garantisce l'esistenza di un'applicazione $\theta\colon\tau\to\mathscr{C}(H')$ soddisfacente le (i), (ii), (iii) ove si sia sostituito H' ad F'. Sia $\tau\colon Y'\to X'$ l'isomorfismo di H' in F'; siano allora $A_i^j = \tau \cdot (\theta(u_i^j))$ $(i, j \in \langle 3 \rangle)$ $[(i \leqslant (j-1) = 1, \ldots, 4)]$, $b_i = \tau(x_i)$, $c_i = \tau(y_i)$ $(i \in \langle 3 \rangle)$ $[a_i = \tau(w_i)$ $(i \in \langle 5 \rangle)]$.

Supponiamo che esistano due catene distinte A_i^j e $A_{i'}^{j'}$ tali che $A_i^j \operatorname{int} A_{i'}^{j'}$, e quindi $\theta(u_i^j) \operatorname{int} \theta(u_{i'}^{j'})$, con $m = \mu(A_i^j) = \mu(\theta(u_i^j))$, $n = \mu(A_{i'}^{j'}) = \mu(\theta(u_{i'}^{j'}))$. Allora esiste una coppia

$$(m', n') \in [m] \times [n] - \{(0, 0), (0, n), (m, 0), (m, n)\}$$

per cui $(\theta(u_i^j))(m') = (\theta(u_{i'}^{j'}))(n')$; se pure tale elemento comune alle immagini delle due catene fosse estremo per una di esse, non può esserlo per entrambe; sia $\theta(u_i^j)$ la catena per cui esso non è estremo; sia inoltre m' il minimo fra gli indici per cui ciò si verifica. Allora $(\theta(u_i^j))(m')$ è adiacente a $(\theta(u_i^j))(m'-1)$, a $(\theta(u_i^j))(m'+1)$, e ad almeno un vertice, distinto da questi, nell'immagine di $(\theta(u_{i'}^{j'}))$. La valenza di $(\theta(u_i^j))(m')$ in H' sarebbe allora > 2, contro la proprietà (iii) di θ.

Inversamente, sia ora soddisfatta la (a) [la (b)] dell'enunciato. Sia $E = (W, R)$ il sottografo di F determinato da

$$W = \cup \{A_i^j([\mu(A_i^j)])\}$$

e da

$$R = \{\{c, d\} \in S \mid (\exists A_i^j)(\exists k \in [\mu(A_i^j) - 1])(c = A_i^j(k) \wedge d = A_i^j(k+1))\}.$$

Sia $D = (V, Z)$ un grafo di tipo $K_{3,3}$ (di tipo K_5).

Sia x_i, y_i $(i \in \langle 3 \rangle)$ una denominazione dei vertici di V tale che $Z = (\{x_i, y_j\})_{i,j \in \langle 3 \rangle}$ e sia $u_i^j = \{x_i, y_j\}$ $[i, j \in \langle 3 \rangle]$.

[Sia $(w_i)_{i \in \langle 5 \rangle} = V$ e sia $u_i^j = \{w_i, w_j\}$ $(i \leqslant (j-1) = 1, \ldots, 4)$.]

Costruiamo una suddivisione $D' = (V', Z')$ di D come segue.

V' è costituito dai punti (di $|D|$):

$$h_r^{i,j} = \frac{r}{\mu(A_i^j)} y_j + \left(1 - \frac{r}{\mu(A_i^j)}\right) x_i \qquad (r \in [\mu(A_i^j)]) \ , \ (i, j \in \langle 3 \rangle) \ .$$

[V' è costituito dai punti:

$$h_r^{i,j} = \frac{r}{\mu(A_i^j)} w_j + \left(1 - \frac{r}{\mu(A_i^j)}\right) w_i \qquad (r \in [\mu(A_i^j)]) \ , \ (i \leqslant (j-1) = 1, \ldots, 4)] \ .$$

$$Z' = \{\{c, d\} \in \mathscr{P}(V') \mid (\exists i)(\exists j)(\exists r)(c = h_r^{i,j} \wedge d = h_{r+1}^{i,j})\} .$$

$\sigma \colon V' \to W$, $\qquad \sigma \colon h_r^{i,j} \mapsto A_i^j(r)$ è un isomorfismo di D' in E. Q.E.D.

3. - Diagrammi di Cayley.

Sia G un gruppo e $B \leqslant G$ un insieme di generatori di G con le proprietà:

$$x \in B \Rightarrow x^{-1} \in B\ ; \qquad 1_G \notin B\ .$$

Definiamo (cfr. anche [**6**], p. 106) *diagramma di Cayley di* (G, B) il grafo $\boldsymbol{C}(G, B) = (G, S)$, dove $S = \{\{g, h\} \in \mathscr{P}(G) \,|\, g^{-1}h \in B\}$.

Prop. 6. *Ogni vertice di* $\boldsymbol{C}(G, B)$ *ha valenza uguale alla cardinalità di* B.

Dim. Sia, per ogni $g \in G$, $Q_g = \{\{h, k\} \in S \,|\, h = g\}$; sia ora

$$\eta_g\colon B \to Q_g\ , \qquad \eta_g\colon x \mapsto \{g, gx\}\ ;$$

se $\{g, k\} \in Q_g$ allora $g^{-1}k \in B$ e $\eta_g(g^{-1}k) = \{g, k\}$, perciò η_g è suriettiva; se $\{g, h\} = \eta_g(x) = \eta_g(y)$, allora $h = gx = gy$, da cui $x = y$; dunque η_g è bijettiva.

Q.E.D.

Dicesi *parola di lunghezza n su B*, con $n \in N^+$, ogni applicazione $P\colon \langle n \rangle \to B$. Per ogni parola P su B, indicheremo con $\mu(P)$ la sua lunghezza e con ΠP il prodotto $\prod_{i=1}^{\mu(P)} P(i)$.

Sia $\boldsymbol{P}(B)$ l'insieme delle parole su B di lunghezza n per qualunque $n \in N^+$. Sia $\boldsymbol{K}(G, B) = \mathscr{C}(\boldsymbol{C}(G, B))$.

Definiamo $\omega\colon \boldsymbol{K}(G, B) \to G \times \boldsymbol{P}(B)$ come segue: sia

$$A \in \boldsymbol{K}(G, B)\ , \qquad A\colon [n] \to G; \qquad \omega(A) = (k, P)\ ,$$

dove $k = A(0)$ e $P\colon \langle n \rangle \to B$, $P\colon i \mapsto (A(i-1))^{-1}A(i)$.

Definiamo, con abuso di linguaggio, per ogni $P \in \boldsymbol{P}(B)$,

$$\prod_{i=1}^{0} P(i) = 1_G\ .$$

Sia $\zeta\colon G \times \boldsymbol{P}(B) \to \boldsymbol{K}(G, B)$ così definita: se $g \in G$, $P' \in \boldsymbol{P}(B)$, $P'\colon \langle m \rangle \to B$,

$$\zeta(g, P') = A'\ , \ \text{dove}\ A'\colon [m] \to G\ , \ A'\colon i \mapsto g \prod_{j=1}^{i} P'(j)\ .$$

ζ è l'applicazione inversa di ω, dunque entrambe sono bijettive.

Prop. 7. *Sia G finito e $\boldsymbol{C}(G, B)$ planare. Allora la cardinalità di B è $\leqslant 5$; cioè, se α è il numero degli elementi di B di periodo $\neq 2$, β è il numero degli elementi di B di periodo 2, allora $\alpha + 2\beta \leqslant 5$.*

Dim. Siano $g_1, g_2 \in G$ arbitrari. Esiste una parola P di lunghezza n su B per qualche $n \in N^+$ tale che $g_2 = g_1 \prod_{i=1}^{n} P(i)$. Allora la catena $\zeta(g_1, P)$ ha g_1 e g_2 per estremi. Perciò $\boldsymbol{C}(G, B)$ è connesso. Per la Prop. 2 almeno un vertice $\bar{g}$ di $\boldsymbol{C}(G, B)$ ha valenza $\leqslant 5$. Ma tutti i vertici, per la Prop. 6, hanno la stessa valenza di $\bar{g}$, uguale alla cardinalità di B. Q.E.D.

Date due parole $P, P' \in \boldsymbol{P}(B)$, sia

$$I(P, P') = [\mu(P)] \times [\mu(P')] - \{(0, 0), (0, \mu(P')), (\mu(P), 0), (\mu(P), \mu(P'))\}.$$

Prop. 8. *Condizione necessaria e sufficiente perchè $\boldsymbol{C}(G, B)$ non sia planare è che si verifichi* (A) *oppure* (B):

(A) *esistono elementi $b_i, c_i \in G(i \in \langle 3 \rangle)$ e parole P_i^j per cui $c_j = b_i \Pi P_i^j$ $(i, j \in \langle 3 \rangle)$ tali che, per tutti gli indici i, j, i', j', con $(i, j) \neq (i', j')$, si verifichi quanto segue:*

$$\forall (m', n') \in I(P_i^j, P_{i'}^{j'}), \qquad b_i \prod_{r=1}^{m'} P_i^j(r) \neq b_{i'} \prod_{s=1}^{n'} P_{i'}^{j'}(s);$$

(B) *esistono elementi $a_i \in G(i \in \langle 5 \rangle)$ e parole P_i^j per cui $a_j = a_i \Pi P$ $(i \leqslant (j-1) = 1, \ldots, 4)$ tali che, per tutti gli indici i, j, i', j', con $(i, j) \neq (i', j')$, si verifichi quanto segue:*

$$\forall (m', n') \in I(P_i^j, P_{i'}^{j'}), \qquad a_i \prod_{r=1}^{m'} P_i^j(r) \neq a_{i'} \prod_{s=1}^{n'} P_{i'}^{j'}(s).$$

Dim. Applichiamo la Prop. 5 a $\boldsymbol{C}(G, B)$. Data la condizione (a) [(b)] della Prop. 5, sia $(b_i, P_i^j) = \omega(\Lambda_i^j)$ $(i, j \in \langle 3 \rangle)$ [rispettivamente $(a_i, P_i^j) = \omega(\Lambda_i^j)$ $(i \leqslant (j-1) = 1, \ldots, 4)$].

Se non $\Lambda_i^j \operatorname{int} \Lambda_{i'}^{j'}$ allora per qualunque coppia

$$(m', n') \in [\mu(\Lambda_i^j)] \times [\mu(\Lambda_{i'}^{j'})] - \{(0, 0), (0, \mu(\Lambda_{i'}^{j'})), (\mu(\Lambda_i^j), 0), (\mu(\Lambda_i^j), \mu(\Lambda_{i'}^{j'}))\},$$

$$\Lambda_i^j(m') \neq \Lambda_{i'}^{j'}(n');$$

ciò implica, per gli stessi m', n', che

$$b_i \prod_{r=1}^{m'} P_i^j(r) \neq b_{i'} \prod_{s=1}^{n'} P_{i'}^{j'}(s).$$

Viceversa, data la condizione (A) [(B)], sia $A_i^j = \zeta(b_i, P_i^j)$ $(i, j \in \langle 3 \rangle)$ [sia $A_i^j = \zeta(a_i, P_i^j)$ $(i \leqslant (j-1) = 1, \ldots, 4)$]; allora l'ipotesi implica non A_i^j int $A_{i'}^{j'}$ per tutti gli indici i, j, i', j', con $(i, j) \neq (i', j')$.

Quindi (a) equivale ad (A), (b) equivale a (B). Q.E.D.

Bibliografia.

[1] E. W. SPANIER, *Algebraic topology*, Mc Graw Hill, New York 1966.

[2] F. HARARY, *Graph theory*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts 1963.

[3] C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris 1958.

[4] G. A. DIRAC and S. SCHUSTER, *A theorem of Kuratowski*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **57** (1954), 343-348.

[5] K. KURATOWSKI, *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, Fund. Math. **15** (1930), 271-283.

[6] N. BIGGS, *Algebraic graph theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1974.

Una diversa trattazione del problema si trova in

H. W. LEVINSON and E. S. RAPAPORT, *Planarity of Cayley diagrams*, Springer-Verlag, Lecture Notes, **303**, Berlin 1972.

* * *