Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 159-176

GABRIELE LOLLI (*)

Sui modelli di certe teorie delle classi. (**)

1. – In questo lavoro discutiamo alcune proprietà metamatematiche di una teoria delle collezioni proposta in [1], in particolare le sue relazioni con la teoria delle classi **GB** di GÖDEL-BERNAYS. Con « teoria delle collezioni » si intende in generale un sistema assiomatico che presenti una triplice stratificazione degli oggetti in insiemi, classi di insiemi e collezioni, o proprietà, di classi. Alcuni di questi sistemi sono discussi in [2] (pp. 142 sgg.); una variante meno classica e più promettente è in [3]. La teoria **TC** proposta in [1] può essere presentata nel seguente modo (1): in un linguaggio del primo ordine con identità L', con il simbolo predicativo $\in$, un solo tipo di variabili individuali, per collezioni, e una costante individuale U, si danno gli assiomi:

1) estensionalità, coppia $\{x, y\}$, unione $\cup x$, potenza $P(x)$, infinito, fondazione;

2) lo schema di separazione non ristretto per collezioni:

$$\exists y \ \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \ \& \ \varphi(z, u_i))$$

per ogni formula $\varphi(z, u_i)$ di L'; gli assiomi 1) e 2) sono quelli del sistema di ZERMELO;

3) transitività di U, Trans (U), dove

$$\text{Trans}\,(x) \leftrightarrow \forall y, z(z \in y \in x \rightarrow z \in x) ;$$

(*) Indirizzo: Corso Re Umberto 8, 10121 Torino, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. - Ricevuto: 30-IX-1974.

(1) La nostra formulazione è più simile alla seconda versione, $\mathbf{TC}_1$, della teoria di [1]; l'altra versione ivi proposta è meno compatta. Lo schema di assiomi 8 ad esempio serve solo a introdurre U, ed è poi reso superfluo, e rafforzato, dai restanti assiomi.

si pone allora per definizione $V = \cup U$ e si ha $V \subseteq U$ e Trans(V); gli elementi di U saranno chiamati classi, e gli elementi di V insiemi;

4) lo schema di esistenza delle classi: per ogni formula $\varphi(x, u_i)$ di L' con tutti i quantificatori ristretti a V (2) e parametri $u_i \in U$, esiste la classe di tutti gli insiemi x tali che $\varphi(x, u_i)$, in simboli

$$u_i \in U \rightarrow \{x \in V: \varphi(x; u_i)\} \in U ;$$

5) chiusura di V rispetto agli assiomi di ZERMELO-FRAENKEL:

coppia:	$x, y \in V \rightarrow \{x, y\} \in V,$
unione:	$x \in V \rightarrow \cup x \in V,$
potenza:	$x \in V \rightarrow P(x) \cap V \in V,$
infinito:	$\omega \in V,$
rimpiazzamento:	$y \in U \,\&\, \mathrm{fn}(y) \,\&\, \mathrm{dom}(y) \in V \rightarrow \mathrm{im}(y) \in V$

dove fn(y), dom(y), im(y) sono abbreviazioni rispettivamente per «y è una funzione», «il dominio di y», «l'immagine di y», e ω è la collezione degli ordinali finiti la cui esistenza segue dagli assiomi 1) e 2).

Si noti che da 4) segue $V \in U$; con l'eccezione di questi due simboli, useremo sempre lettere minuscole per indicare collezioni. Può essere utile talvolta considerare V come simbolo primitivo e non definito, ad esempio per avere che il linguaggio di **GB** sia un sottolinguaggio di L'.

Un sistema di assiomi per la teoria **GB**, in un linguaggio con identità L, con il simbolo predicativo $\in$, un solo tipo di variabili individuali, per classi, e la costante individuale V, è il seguente: assiomi di estensionalità e di fondazione; lo schema di esistenza delle classi:

$$\exists x \;\; \forall y (y \in x \leftrightarrow \varphi(y, u_i))$$

per ogni formula $\varphi(y, u_i)$ di L con tutti i quantificatori ristretti a V (3); gli assiomi di chiusura 5) per V, dove il rimpiazzamento ha la forma: fn(y) & & dom$(y) \in V \rightarrow$ im$(y) \in V$; per derivare lo schema di separazione per insiemi

(2) L'occorrenza di un quantificatore $\forall x$ (risp. $\exists x$) in una formula φ si dice ristretta *a* y se il contesto dell'occorrenza è $\forall x(x \in y \rightarrow \ldots)$, più brevemente $\forall x \in y \ldots$ (risp. $\exists x(x \in y \,\& \ldots)$, più brevemente $\exists x \in y \ldots$). La relativizzazione a y di una formula φ, $\varphi^{(y)}$ si ottiene sostituendo ogni occorrenza di un quantificatore $\forall x$ (risp. $\exists x$) in φ con $\forall x \in y$ (risp. $\exists x \in y$). Una formula in cui tutte le occorrenze dei quantificatori sono ristrette a V si dice anche, semplicemente, ristretta, o con i quantificatori ristretti a V.

(3) La variabile x non deve essere libera in $\varphi(y, u_i)$; una analoga restrizione si impone in ogni forma di schema di separazione o di esistenza di classi, anche se non è menzionata.

dal rimpiazzamento occorre poi postulare l'esistenza di un insieme, ad esempio l'insieme vuoto $\emptyset$; l'assioma di separazione per insiemi ha allora la forma: per ogni insieme x e classe y, $x \cap y$ è un insieme; si pone infine: $x \in V \leftrightarrow \leftrightarrow \exists y(x \in y)$.

Con la presentazione che abbiamo scelto, è immediato controllare che per ogni assioma di **GB** la sua relativizzazione a U è un teorema di **TC**; U rappresenta in **TC** la collezione di tutte le classi. In particolare gli assiomi 4) e 5) di **TC** non sono altro che la relativizzazione a U degli assiomi rilevanti di **GB**. Quando diremo che una proposizione di **GB** è dimostrabile in **TC** ci riferiremo sempre alla sua relativizzazione a U. Viceversa ogni proposizione di **TC** relativizzata a U può essere identificata con una proposizione del linguaggio di **GB** semplicemente eliminando le relativizzazioni a U.

Lo spirito della proposta [1] sembra quello di disporre esattamente degli insiemi e delle classi di **GB**, riservando l'uso delle collezioni per costruzioni sopra le classi. Tuttavia in [1] si dimostra solo che **TC** è interpretabile nella teoria di ZERMELO-FRAENKEL rafforzata con l'assioma dell'esistenza di un universo.

Nel paragrafo **3** dimostreremo che in effetti **TC** è una estensione conservativa di **GB**: ogni proposizione del linguaggio L è un teorema di **GB** se e solo se la sua relativizzazione a U è un teorema di **TC**.

Nel paragrafo **2** consideriamo in via preliminare un indebolimento di **TC**, mentre nel paragrafo **4** prendiamo in esame una estensione naturale di **TC**, **TC**$^+$, che si ottiene aggiungendo l'assioma della supertransitività di V, $\text{Strans}(V)$, dove $\text{Strans}(x) \leftrightarrow \forall y, z(z \subseteq y \in x \to z \in x)$. Risulta che **TC**$^+$ non è estensione conservativa di **GB**, come pure non lo è una teoria **GB***, formulata in L con un rafforzamento dell'assioma di separazione per insiemi di **GB**.

Per ottenere una estensione di **TC** in cui si possa dimostrare la consistenza di **GB** consideriamo nel paragrafo **5** due teorie; la prima si ottiene aggiungendo a **TC**$^+$ l'assioma $\text{Mod}_{ZF}(V)$ che afferma, con una opportuna formalizzazione, che la classe V è modello della teoria di ZERMELO-FRAENKEL; vedremo che in una larga classe di modelli di **TC**$^+ + \text{Mod}_{ZF}(V)$, come pure di **GB***$+ + \text{Mod}_{ZF}(V)$, è vero che esiste un modello di **GB**.

Per dimostrare la consistenza di **GB** dobbiamo tuttavia aggiungere a **TC**, o anche solo a **GB**, uno schema di rimpiazzamento per operazioni di insiemi definite da Δ_1^1-formule di L. Diciamo che una formula di L è Δ_1^1, relativamente a una teoria T, se in T è equivalente sia a una formula $\exists x\varphi$, sia a una formula $\forall x\psi$, dove φ e ψ sono formule con i quantificatori ristretti a V. Chiamiamo Δ_1^1-rimpiazzamento questo schema.

Infine discutiamo alcune proprietà delle estensioni elementari dei modelli di **GB** che servono a chiarire il quadro della trattazione precedente. Individuiamo una classe di modelli $\langle M, E, V^M \rangle$ di **GB** tali che ogni loro estensione elementare di altezza maggiore non è ω-standard, anche se $\langle M, E, V^M \rangle$ è standard.

Le notazioni sono quelle usuali, e sono state già quasi tutte ricordate; le lettere greche minuscole sono riservate agli ordinali, e card (x) è la cardinalità di x. I modelli di **GB** sono strutture $\langle M, E, V^M \rangle$ dove M è un insieme, $V^M \in M$ e $E \subseteq M^2$. Se t è un termine della teoria che definisce un insieme o una classe, t^M è l'elemento di M che soddisfa in $\langle M, E, V^M \rangle$ la definizione di t. Potremo sempre supporre che le classi proprie di un modello, cioè $x \in M$ tali che non xEV^M, siano sottoinsiemi di $\{y \in M : yEV^M\}$; altrimenti, sostituendo x con $x' = \{y \in M : yEx\}$, otteniamo un modello isomorfo in cui la relazione di appartenenza tra un insieme e una classe propria è $\in$. Diremo perciò che un modello di **GB** è standard solo se la relazione E ristretta a $\{y \in M : yEV^M\}$ è $\in$, ed M è transitivo. Un modello è ω-standard se $\{x \in M : xE\omega^M\} = \omega$. Una estensione di un modello ha altezza maggiore del primo se contiene un insieme che è un ordinale ed è maggiore di tutti gli insiemi che sono ordinali nel primo modello. Gli insiemi del modello sono gli $x \in M$ tali che xEV^M. xEV^M è equivalente a $\langle M, E, V^M \rangle \models (x \in V^M)$ o anche $\langle M, E, V^M \rangle \models (x \in V)$. Invece della notazione $\langle M, E, V^M \rangle \models \varphi$ useremo anche $\varphi^{(M)}$ se non vi è ambiguità a proposito della relazione E. Così ad esempio per le classi del modello $\langle M, E, V^M \rangle$ vale $(y \subseteq V)^{(M)}$, che significa $\forall z \in M(zEy \rightarrow zEV^M)$.

I modelli di **TC** sono strutture $\langle M, E, U^M \rangle$, oppure $\langle M, E, V^M, U^M \rangle$, dove $V^M = (\bigcup U^M)^M$. Se $\langle M, E, V^M, U^M \rangle$ è un modello di **TC** e $C_M = \{x \in M : xEU^M\}$, allora $\langle C_M, E \restriction C_M, V^M \rangle$ è un modello di **GB**. Gli elementi di C_M sono le classi del modello di **TC**. Eventuali altre notazioni o definizioni saranno ricordate nel corso della esposizione.

2. – La supertransitività di V che, come abbiamo preannunciato, condiziona la forza di una teoria del tipo **TC**, è strettamente legata alla formulazione dell'assioma della potenza per insiemi: $x \in V \rightarrow \mathrm{P}(x) \cap V \in V$. Questo stesso enunciato, considerato come assioma di **GB**, implica in **GB** che Strans (V). Infatti dall'assioma di separazione per insiemi, $x \in V \rightarrow x \cap y \in V$, segue in particolare $y \subseteq x \in V \rightarrow y \in V$. In **TC** invece si potrebbe pensare di definire una sottocollezione y di un insieme $x \in V$, con l'assioma di isolamento per collezioni 2), per mezzo di una formula non equivalente in **TC** ad alcuna formula con i quantificatori ristretti a V; y non sarebbe allora una classe e non si potrebbe applicare la separazione per insiemi dedotta dal rimpiazzamento 5) per dimostrare che $y \in V$. Vedremo in effetti che è consistente con **TC** assumere $\mathrm{P}(\omega) \cap V \neq \mathrm{P}(\omega)$. In **TC** la supertransitività di V è equivalente alla condizione $\forall x \in V(\mathrm{P}(x) \cap V = \mathrm{P}(x))$.

Dalla dimostrazione che **TC** è estensione conservativa di **GB** risulterà che una possibile utilizzazione significativa di eventuali sottocollezioni di insiemi che non siano classi, e quindi insiemi, è piuttosto problematica. Si hanno allora a disposizione due alternative: o si prende sul serio l'azione dell'assioma di separazione 2) anche sull'universo degli insiemi, e si chiede che ogni sottocollezione di un insieme sia un insieme, con l'assioma Strans (V); oppure si evita di applicare lo schema 2) a insiemi, e si ottiene:

Definizione. Sia $\mathbf{TC}^-$ la teoria che si ottiene sostituendo in $\mathbf{TC}$ lo schema di separazione 2) con lo schema:

$$2') \qquad x, u_i \notin U \to \exists y\ \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \,\&\, \varphi(z, u_i))$$

per ogni formula φ di L'.

Per la teoria $\mathbf{TC}^-$ vale la seguente:

Proposizione 1. $\mathbf{TC}^-$ *è estensione conservativa di* $\mathbf{GB}$.

La dimostrazione segue in modo classico dal

Lemma 2. *Ogni modello di* $\mathbf{GB}$ *può essere esteso a un modello di* $\mathbf{TC}^-$ *con gli stessi insiemi e le stesse classi.*

Dimostrazione. Sia $\langle M, E, V^M\rangle$ un modello di $\mathbf{GB}$; dico che esiste un modello $\langle M', E', V^{M'}, U^{M'}\rangle$ di $\mathbf{TC}^-$ tale che

$$M = \{x \in M' : xE'\,U^{M'}\}\ (= U^{M'})\,, \qquad V^M = \{x \in M : xE'\,V^{M'}\}\ (= V^{M'}) \text{ e } E' \restriction M = E\,.$$

Si ricordi che assumiamo che le classi proprie di $\langle M, E, V^M\rangle$ siano effettivamente sottoinsiemi di M, e analogamente per M' e per le collezioni. Si ponga

$$Y_0 = M\,, \qquad Y_{n+1} = Y_n \cup \mathrm{P}(Y_n)\,.$$

La riunione degli Y_n è una prima approssimazione per eccesso del dominio del modello cercato. Per ragioni, che saranno chiare dalla considerazione dell'assioma di estensionalità, occorre tuttavia eliminare alcuni elementi, e precisamente si pone, per $n > 0$,

$$Y'_n = Y_n - \{y \subseteq M : \exists x \in M\ \forall z \in M (z \in y \leftrightarrow zEx)\}$$

quindi $M' = M \cup \bigcup_n \{Y'_n\}$, e per $x, y \in M'$

$$xE'y \leftrightarrow \begin{cases} xEy & \text{se } y \in M\,, \\ x \in y & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Dico che $\langle M', E', V^M, M\rangle$ è il modello di $\mathbf{TC}^-$ cercato. Le relazioni volute tra gli insiemi e le classi dei due modelli sono immediate: infatti se $x \in M'$ e $xE'V^{M'}$, cioè $xE'V^M$ allora siccome $V^M \in M$ deve essere xEV^M, e $x \in M$; viceversa se $x \in M$ e xEV^M, allora anche $xE'V^M$, $xE'V^{M'}$. Se $x \in M'$ e $xE'U^{M'}$, cioè $xE'M$, allora siccome $M \notin M$ deve essere $x \in M$, e viceversa.

Per la dimostrazione che $\langle M', E', V^M, M\rangle$ è un modello di $\mathbf{TC}^-$ esaminiamo solo gli assiomi più significativi, potenza e assioma di separazione 2′).

Se $x \in M'$ e $xE'V^{M'}$, allora $x \in M$, $\mathrm{P}(x)^M \in M$, $\mathrm{P}(x)^M E' V^{M'}$ e $\mathrm{P}(x)^M$ soddisfa in M' la condizione di essere $\mathrm{P}(x) \cap V$; infatti se $yE'V^{M'}$ e $(y \subseteq x)^{(M')}$, allora $y \in M$ e $(y \subseteq x)^{(M)}$ come è facile verificare, quindi $yE\,\mathrm{P}(x)^M$ e $yE'\,\mathrm{P}(x)^M$; il viceversa è analogo. Quindi vale l'assioma della potenza per insiemi. D'altra parte, se $xE'V^{M'}$, esiste in M' una collezione che è la potenza di x nel senso di M'; se $x' \in M' - M$ e $(x' \subseteq x)^{(M')}$, allora è subito visto che i suoi E'-elementi, cioè y tali che $yE'x'$, sono in M, in quanto $yE'x$, yEx; quindi $x' \subseteq M$, $x' \in Y_1$: Se $x' \in Y_1 - Y'_1$, esiste $z' \in M$ tale che $(x' = z')^{(M')}$; l'insieme di questi z' e degli $x' \in Y'_1$ appartiene a Y_2; se appartiene a Y'_2 appartiene a M' e soddisfa in M' la condizione di essere $\mathrm{P}(x)$, altrimenti è uguale a uno $z \in M$ che soddisfa in M' la condizione di essere $\mathrm{P}(x)$.

Per x che siano classi in M il ragionamento è analogo; per x che appartengano a Y'_n con $n > 0$ e non a M si possono ancora distinguere due casi: se $x \nsubseteq M$, allora la potenza di x appartiene a M' e soddisfa in M' la proprietà di essere $\mathrm{P}(x)$; se $x \subseteq M$, la potenza di x meno i sottinsiemi di x rappresentati in M da elementi di M più questi rappresentanti è un elemento di M' e soddisfa in M' la proprietà di essere $\mathrm{P}(x)$.

L'assioma di separazione 2′) è valido perchè si applica solo a $x \in M'$, $x \notin M$; se φ è una formula qualunque e $y = \{z \in M' : zE'x \;\&\; (\varphi(z))^{(M')}\}$, allora $y = y_1 \cup y_2$, dove $y_1 = y \cap M$ e $y_2 = y \cap (M' - M)$. y_2 appartiene a M' perchè è un sottoinsieme di Y'_n, con $x \in Y'_n$; quanto a y_1, o $y_1 \in Y'_1$ oppure è rappresentato in M da un certo z, cioè per ogni $u \in M$ si ha $u \in y \leftrightarrow uEz$; la riunione di y_1 e y_2, o di z e y_2, nel senso di M', appartiene ad M' ed è la sottocollezione di x definita da φ; l'assioma della unione è lasciato al lettore. Si noti anche che

$$(\cup\, U^{M'})^{M'} = (\cup\, M)^{M'} = V^{M'} = V^M .$$

La restrizione degli Y_n a Y'_n è fatta per evitare che esista un $y \subseteq M$, $y \notin M$ ma tale che per un certo $x \in M$ si abbia $z \in y$ se e solo se zEx, nel qual caso $y, x \in M'$, $y \neq x$ ma $(y = x)^{(M')}$ contro l'estensionalità. Nei modelli standard, in cui $E = \in \restriction M$, questa precauzione non è necessaria, perchè non si verifica l'eventualità di sopra. Se $\langle M, E\rangle$ è standard, la dimostrazione ammette ovvie semplificazioni lasciate al lettore.

Dimostrazione della Proposizione 1. Sia φ un enunciato di L, $\varphi^{(U)}$ la sua relativizzazione a U, e sia $\varphi^{(U)}$ un teorema di **TC**$^-$. Dico che vale in tutti i modelli di **GB**, ed è quindi un teorema di **GB**. Dato $\langle M, E, V^M\rangle$, modello di **GB**, sia $\langle M', E', V^{M'}, U^{M'}\rangle$ il modello costruito nella dimostrazione del lemma. Allora $\varphi^{(U)}$ vale in M', e questo significa che φ vale in M, perchè i quantificatori risultano ristretti a M, $(\cup U^{M'})^{M'} = V^M$ e la relazione di appartenenza coincide con E.

Questa dimostrazione non ha carattere finitista, essendo condotta in una metateoria semantica dotata almeno dell'assioma della potenza, del rimpiazzamento per funzioni di dominio ω e dell'assioma di fondazione. La stessa osservazione vale per il risultato del prossimo paragrafo relativo a **TC**. La costruzione di un modello di **GB** a partire da un modello $\langle M, E\rangle$ della teoria **ZF** di ZERMELO-FRAENKEL può invece essere eseguita con tecniche elementari perchè le classi aggiunte, sottinsiemi di M definibili in $\langle M, E\rangle$, si identificano con le formule che li definiscono.

3. – Non c'è alcuna modifica da apportare alla dimostrazione precedente per ottenere

Proposizione 3. **TC** *è estensione conservativa di* **GB**.

È sufficiente stabilire il

Lemma 4. *Ogni modello di* **GB** *può essere esteso a un modello di* **TC** *con gli stessi insiemi e le stesse classi.*

Dimostrazione. Se $\langle M, E, V^M\rangle$ è un modello di **GB**, dico che il modello $\langle M', E', V^M, M\rangle$ costruito nella dimostrazione del Lemma 2 è un modello di **TC**. Occorre solo verificare ancora lo schema di separazione 2), applicato a un $x \in M$. Ma data la formula φ, se

$$y = \{z \in M' : zE'x \;\&\; (\varphi(z))^{(M')}\} = \{z \in M : zEx \;\&\; (\varphi(z))^{(M')}\}\,,$$

allora o esiste un $u \in M$ tale che $z \in y$ se e solo se zEu, e u è in M' la sottocollezione di x definita da φ, oppure $y \in Y_1'$, $y \in M'$ e y è in M' la sottocollezione di x definita da φ.

Siano s ed e due simboli non appartenenti al linguaggio $L'' = L - \{V\}$ di **ZF**; allora

Corollario. *In* **ZF** + « $\langle s, e\rangle$ *è un modello di* **ZF** » *si dimostra l'esistenza di un modello di* **TC**.

Dimostrazione. Si assuma **ZF** come metateoria semantica; dato il modello $\langle s, e\rangle$ di **ZF** si costruisce il modello di **GB** che ha come classi i sottoinsiemi di s definibili in $\langle s, e\rangle$, quindi modello di **TC** come nel Lemma.

Studieremo ora gli effetti dell'aggiunta dell'assioma Strans (V). Osserviamo subito che questi sono neutralizzati se l'assioma di separazione 2) è indebolito nella forma 2′), vale a dire

Proposizione 5. $\mathbf{TC}^- +$ Strans (V) *è estensione conservativa di* **GB**.

Dimostrazione. È sufficiente provare che ogni modello $\langle M, E, V^M\rangle$ di **GB** può essere esteso a un modello $\langle M', E', V^{M'}, U^{M'}\rangle$ di $\mathbf{TC}^- +$ Strans (V) con gli stessi insiemi e le stesse classi. A tale scopo la costruzione del modello di $\mathbf{TC}^-$ del paragrafo precedente deve essere modificata nel seguente modo. Si ponga, per $n > 0$,

$$Y''_n = Y_n - \{y \subseteq M : \exists x \in M \ \forall z \in M (z \in y \to zEx)\} ,$$

quindi $M' = M \cup \bigcup_n \{Y''_n\}$ e il resto come prima. $(\text{Strans}\,(V))^{(M')}$ segue dal fatto che se xEV^M e $y \in M'$, $(y \subseteq x)^{(M')}$, allora $y \subseteq M$; ma o esiste $z \in M$ tale che per ogni $u \in M$, $uE'y \leftrightarrow uEz$, allora $y = z$, y è una classe e $(y \cap x)^{M'} \in M$, oppure per ogni $n > 0$ $y \in Y_n - Y''_n$ e y non può appartenere a M'.

La dimostrazione che $\langle M', E', V^M, M\rangle$ è modello di $\mathbf{TC}^-$ non richiede alcuna variante. Cade invece la dimostrazione che è un modello di **TC**, come si verifica facilmente.

Per dimostrare che $\mathbf{TC}^+ = \mathbf{TC} +$ Strans (V) non è estensione conservativa di **GB** faremo uso essenziale di sottocollezioni di insiemi che sono insiemi per Strans (V), ma che sono definite da formule con quantificatori non ristretti a V e la cui esistenza non è perciò dimostrabile in **GB**. Le formule che le definiscono hanno tuttavia i quantificatori ristretti a U; è possibile perciò riferirsi in via preliminare a una teoria formulata nel linguaggio L di **GB**.

4. – Le varie forme dell'assioma di separazione per insiemi traducono tutte il principio intuitivo di Zermelo secondo cui ogni proprietà definita individua un sottoinsieme di un insieme dato. Si può discutere se la forma che l'assioma ha in **GB** sia una versione fedele di tale principio; infatti una volta che sia stato fissato un linguaggio formale non sembra arbitrario identificare le proprietà definite con le formule del linguaggio. In **GB** invece sono proprietà definite solo le classi, cioè le formule con i quantificatori ristretti a V. Il vantaggio è che si ottiene una teoria finitamente assiomatizzabile, estensione conservativa di **ZF**; è tuttavia naturale considerare anche la

Definizione. **GB*** è la teoria formulata in L che si ottiene aggiungendo a **GB** lo schema

$$\text{C)} \qquad x \in V \to \exists y\ \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \ \&\ \varphi(z, u_i))$$

per ogni formula φ di L.

Si noti che l'y dato dallo schema C) è una classe, ma per l'assioma di separazione di **GB** risulta poi un insieme. Strans (V) si deriva in **GB*** come in **GB**.

Sia $\langle M, E, V^M, U^M\rangle$ un modello di **TC** + Strans (V) e sia $C_M = \{x \in M : xEU^M\}$. Allora è subito visto che

Lemma 6. *Se* $\langle M, E, V^M, U^M\rangle$ *è un modello di* **TC** + Strans (V), *allora* $\langle C_M, E\restriction C_M, V^M\rangle$ *è un modello di* **GB***.

Supponiamo nota la possibilità di formalizzare in **GB** la sintassi e la semantica dei linguaggi elementari; in particolare si può definire in **GB** un insieme Form che ha la struttura dell'insieme intuitivo delle formule del linguaggio L'' di **ZF**; nelle definizioni più naturali, Form risulta un sottoinsieme di ω. Con $\ulcorner u \urcorner$ si indica l'insieme che nella costruzione formalizzata del linguaggio svolge il ruolo dell'elemento u di L''. Senza scendere nei dettagli, ricordiamo l'unico risultato che ci serve: esiste una formula di L con tre variabili libere, che scriviamo Sod (x, y, z), tale che per ogni formula φ di L'', con variabili $v_0, \ldots, v_n$, e ogni f tale che fn (f), dom $(f) = \{\ulcorner v_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner v_n \urcorner\}$ e $\langle \ulcorner v_i \urcorner, v_i\rangle \in f$ (il che implica $f, v_i \in V$) si ha in **GB**

$$\varphi^{(V)}(v_0, \ldots, v_n) \leftrightarrow \text{Sod}\,(f, \ulcorner \varphi \urcorner, V)\,.$$

Se φ ha una sola variabile libera v_i scriviamo anche Sod $(v_i, \ulcorner \varphi \urcorner, V)$. La formula Sod non ha i quantificatori ristretti a V, anche se la sua complessità è di grado minimo tra le formule non ristrette, cioè è Δ_1^1, e di qui segue in un certo senso la sua inutilizzabilità in **GB**, nonostante la validità dello schema di sopra. Sod può essere invece inserita nello schema C) di **GB***, e si ha

Lemma 7. *In* **GB***, *esiste un sottoinsieme di* ω *che è l'insieme degli enunciati di* L'' *veri in* V.

Dimostrazione. Ponendo Sod per φ in C):

$$\exists y\ \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in \omega \ \&\ \text{Sod}\,(\emptyset, z, V))\,,$$

supponendo che in Sod sia contenuta la condizione che $z \in$ Form.

È noto che in nessun modello $\langle M, E\rangle$ di **ZF** l'insieme degli enunciati di L'' veri in $\langle M, E\rangle$ è definibile in $\langle M, E\rangle$ (con una formula di L''), anche se tale insieme può appartenere a M. Da questa circostanza si deduce la

Proposizione 8. *Se esiste un modello standard di* **ZF**, *allora esiste un modello di* **GB** *che non è modello di* **GB***.

Dimostrazione. Sia $\langle L_\alpha, \in\rangle$ il modello minimale standard di **ZF**, che esiste se esiste un modello standard della teoria. Sia $\langle M, \in, L_\alpha\rangle$ il modello di **GB** che ha come classi i sottoinsiemi di L_α definibili in $\langle L_\alpha, \in\rangle$, e che possiamo chiamare il modello minimale standard di **GB**. $\langle L_\alpha, \in\rangle$ è, come si dice, puntualmente definibile, cioè tutti i suoi elementi sono definibili in $\langle L_\alpha, \in\rangle$. Ne segue che l'insieme degli enunciati di L'' veri in $\langle L_\alpha, \in\rangle$, che non è definibile in $\langle L_\alpha, \in\rangle$, non appartiene a L_α: vi dovrebbe appartenere invece se $\langle M, \in, L_\alpha\rangle$ fosse modello di **GB***.

In altri termini, considerando il modello minimale si vede che l'affermazione: esiste l'insieme degli enunciati veri in V è un teorema di **GB*** ma non di **GB**.

Tale affermazione è scritta per mezzo della formula Sod e non è quindi un enunciato ristretto; d'altra parte il modello minimale standard di **GB** non può essere esteso a un modello di **GB*** con gli stessi insiemi, e questo fa pensare che **GB*** non sia estensione conservativa di **ZF**.

Chiamiamo « parte standard di una teoria » l'insieme degli enunciati veri in tutti e soli i modelli standard della teoria. Poichè ogni modello standard di **GB** contiene come sottinsieme il modello minimale standard di **ZF**, e tale sottinsieme è definibile nel modello da una formula di L'' (la definizione dei costruibili), abbiamo

Corollario. *La parte standard di* **GB*** *contiene l'affermazione della esistenza di una classe che è modello di* **ZF**.

Se aggiungiamo l'assioma di costruibilità $V = L$, non esistono modelli standard di $\mathbf{ZF} + V = L$ che abbiano la stessa altezza del modello minimale, cioè gli stessi ordinali, quindi questo appartiene come elemento a ogni altro modello standard, e abbiamo

Corollario. *La parte standard di* $\mathbf{GB}^* + V = L$ *contiene l'affermazione della esistenza di un modello standard di* $\mathbf{ZF} + V = L$.

Si ricordi, per un confronto, che anche la parte standard di **ZF** contiene l'affermazione della esistenza di un modello di **ZF**, ma non di un modello standard.

In relazione a **TC** le precedenti considerazioni implicano

Proposizione 9. *Se esiste un modello standard di* **ZF**, *allora* $\mathbf{TC} +$ $+$ « $\mathrm{P}(\omega) \cap V \neq \mathrm{P}(\omega)$ » *è consistente, e il modello minimale standard di* **GB** *non può essere esteso a un modello di* $\mathbf{TC}^+$ *con gli stessi insiemi.*

Dimostrazione. Per la prima parte, è sufficiente estendere il modello minimale standard $\langle M, \in, L_\alpha \rangle$ di **GB** a un modello di **TC** con gli stessi insiemi e le stesse classi. Gli enunciati di L'' veri in $\langle L_\alpha, \in \rangle$ formano una sottocollezione x di ω definibile dalla relativizzazione a U della formula Sod, ma non sono un insieme nel modello di **TC**. Lo stesso argomento mostra che ogni estensione di $\langle M, \in, L_\alpha \rangle$ a un modello di **TC**$^+$ non può avere gli stessi insiemi. Inoltre la affermazione della esistenza dell'insieme x degli enunciati di L'' veri in V è un teorema di **TC**$^+$ e non di **GB**, per cui

Corollario. **TC**$^+$ *non è estensione conservativa di* **GB**.

Se invece del modello minimale consideriamo modelli di ampiezza massimale la situazione si presenta in modo completamente diverso. Ricordiamo che $V_\alpha = \cup \{P(V_\beta): \beta \in \alpha\}$ è l'insieme degli insiemi di rango α, e che per l'assioma di fondazione ogni insieme appartiene a qualche V_α: chiamiamo *naturale* un modello $\langle M, E, \ldots \rangle$ di una teoria formulata in L o L' se è standard e $V^M = V_\alpha$ per un certo α. Allora siccome tutti i sottoinsiemi di un $x \in V_\alpha$ appartengono a V_α abbiamo

Lemma 10. *I modelli naturali di* **GB*** *coincidono con i modelli naturali di* **GB**, *e ogni modello naturale di* **GB** *può essere esteso a un modello di* **TC**$^+$ *con gli stessi insiemi e le stesse classi.*

Dimostrazione. Se $\langle M, \in, V_\alpha \rangle$ è un modello di **GB**, allora $\langle V_{\alpha+\omega}, \in, V_\alpha, M \rangle$ è un modello naturale di **TC**$^+$. Si ricordi che in base alle convenzioni fatte $M \subseteq V_{\alpha+1}$.

Cerchiamo ora di formulare una estensione di **TC** nello stesso linguaggio L' in cui si possa dimostrare la consistenza di **GB**.

5. – Sia $\mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$ l'affermazione che per ogni $x \in \mathrm{Form}$, se x è un assioma di **ZF** allora Sod $(\emptyset, x, V)$. La definizione del sottoinsieme di Form costituito dagli elementi che hanno la stessa struttura sintattica degli assiomi di **ZF** è formalizzabile in **ZF** stessa senza difficoltà. Sotto tutte le apparenze, $\mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$ non è dimostrabile in una teoria che non abbia un assioma di rimpiazzamento anche per operazioni di insiemi definite da formule con non tutti i quantificatori ristretti a V, almeno da formule della complessità di Sod, cioè Δ^1_1.

Esaminiamo in via preliminare le conseguenze dell'assioma $\mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$. Se $\langle M, E, V^M \rangle$ è un modello di **GB**, poniamo $I_M = \{x \in M : xEV^M\}$, l'insieme degli insiemi di M, e

$$D_M = \{x \in I_M : \exists \varphi \in \mathrm{Form}\ \forall z \in I_M (\mathrm{Sod}\,(z, \varphi, V)^{(M)} \leftrightarrow z = x)\}$$

l'insieme degli insiemi di M definibili in M nell'universo degli insiemi per mezzo di formule di L''. Diciamo infine:

Definizione. Un modello $\langle M, E, V^M\rangle$ di **GB** è *alto*, se esiste un $x \in I_M$ tale che per ogni $y \in D_M$ si abbia yEx.

Un modello di **GB** è alto se esiste un insieme in M che contiene, nel senso di M, tutti gli insiemi di M definibili; d'ora in avanti per brevità con insiemi definibili intendiamo gli elementi di D_M.

Proposizione 11. *Se $\langle M, E, V^M\rangle$ è un modello alto di* **GB*** $+ \mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$, *allora è vero in M che «esiste un modello di* **GB**».

Dimostrazione. Si noti che «esiste un modello di **GB**» significa «esiste un insieme...»; la riflessione da V a un insieme non appare possibile, come risulta dalla dimostrazione, nei modelli di **GB** $+ \mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$. Sia allora $\langle M, E, V^M\rangle$ un modello alto di **GB*** $+ \mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$; è sufficiente dimostrare che in M è vero che esiste un modello di **ZF**. Se M non è ω-standard, non basta esibire un $x \in I_M$ che è modello di **ZF**, ma questa affermazione deve valere relativizzata a M.

Sia fissato un $x \in I_M$ tale che per ogni $y \in D_M$ si abbia yEx. Allora con una applicazione di C) alla definizione di D_M, che è scritta mediante la formula Sod, D_M è un sottoinsieme di x, nel senso di M, e $D_M \in I_M$. Anche $(\cup D_M)^{(M)}$, la riunione di D_M nel senso di M, che indichiamo più semplicemente con D, appartiene a I_M. Dico che in M vale «$\langle D, E\restriction D\rangle$ è un modello di **ZF**». In effetti in M vale che $\langle D, E\restriction D\rangle$ è una sottostruttura elementare di V, e allora la conclusione segue da $\mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$. L'ipotesi $\mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$ è tuttavia necessaria anche per dimostrare che $\langle D, E\restriction D\rangle$ è una sottostruttura elementare di V, in M, e questo fatto non è che una variante di un noto teorema di MONTAGUE-VAUGHT [**4**].

Si applica il test di TARSKI: siano dati una formula $\varphi \in \mathrm{Form}$ e $u_i \in I_M$ tali che $u_i ED$ e supponiamo che esista un $y \in I_M$ tale che Sod $(y, u_i; \varphi, V)$ valga in M, $(\mathrm{Sod}\,(y, u_i; \varphi, V))^{(M)}$; utilizziamo questa scrittura abbreviata per Sod invece di introdurre un simbolo per una funzione i cui valori siano y e u_i: dobbiamo provare che esiste un y siffatto in D.

Per ogni u_i, esiste un v_i tale che $u_i E v_i$ e $v_i E D_M$; ora ⌜esiste un insieme formato dagli y di rango minimo tali che $\exists u_i \in v_i \varphi(y, u_i)$⌝ è un teorema di **ZF**, quindi per $\mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$ tale affermazione relativizzata a V è vera in M, o meglio in M vale Sod $(\psi_i$, ⌜esiste ... $\varphi(y, u_i)$⌝, $V)$. Ne segue che un insieme siffatto z appartiene a D_M se i v_i vi appartengono; per gli u_i fissati all'inizio, $u_i E v_i$, esiste un y tale che $(\mathrm{Sod}\,(y, u_i; \varphi, V))^{(M)}$ e yEz, quindi yED.

La conclusione segue infine dalla validità in M di

$$\forall f \subseteq D \ \forall \varphi \in \mathrm{Form}\,(\mathrm{Sod}\,(f, \varphi, D) \leftrightarrow \mathrm{Sod}\,(f, \varphi, V)),$$

dove abbiamo indicato con Sod anche la formula di soddisfazione per strutture che siano insiemi.

Diamo un cenno di come si sarebbe potuta condurre la dimostrazione utilizzando il Δ_1^1-rimpiazzamento invece di $\mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$.

Definizione. Il Δ_1^1-rimpiazzamento (relativo a un teoria T nel linguaggio L) è lo schema

$$\forall x \in V\, \exists\, !y \in V \varphi(x, y, u_i) \to \forall a \in V\, \exists b \in V\ \forall z \in V (z \in b \leftrightarrow \exists x \in a \varphi(x, z))$$

per ogni formula φ di L equivalente in T a una Δ_1^1-formula.

Più brevemente si può scrivere: $\mathrm{fn}(f)$ & $\mathrm{dom}\,(f) \in V \to \mathrm{im}\,(f) \in V$ per $f = \{x \in V : \varphi(x, u_i)\}$, dove φ è Δ_1^1, dove però f non è una classe.

Nella precedente dimostrazione, assumendo $\langle M, E, V^M\rangle$ modello del Δ_1^1-rimpiazzamento, si sarebbe potuto procedere in questo modo: per ogni $u_i E D$, se esiste un insieme y tale che $\mathrm{Sod}\,(y, u_i; \varphi, V)$ in M, allora esiste in M per C) l'insieme x degli y di rango minimo per cui $(\mathrm{Sod}\,(y, u_i; \varphi, V))^{(M)}$; al variare degli u_i sugli E-elementi dei v_i, $v_i E D_M$, per il Δ_1^1-rimpiazzamento esiste in M l'insieme $x \in I_M$ degli y di rango minimo per cui

$$(\mathrm{Sod}\,(y, v_i; \ulcorner \exists u_i \in v_i \varphi(y, u_i)\urcorner, V))^{(M)};$$

allora $x E D_M$ e si continua come sopra. Una volta che D risulta in M sottostruttura elementare di V, la dimostrazione che è un modello di **ZF** segue di nuovo direttamente dal Δ_1^1-rimpiazzamento, senza richiamare esplicitamente $\mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$. Ad ogni modo abbiamo

Lemma 12. *Sulla base di* **GB**, *il Δ_1^1-rimpiazzamento* (*relativo a* **GB**) *implica* $\mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzi tutto che il Δ_1^1-rimpiazzamento implica tutti i casi di C) in cui interviene una Δ_1^1-formula, che sono quelli rilevanti in questo tipo di considerazioni. Sia $\langle M, E, V^M\rangle$ un modello di **GB** + + Δ_1^1-rimpiazzamento. Dico che in M vale $\mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$. L'unico caso interessante è quello del rimpiazzamento di **ZF**; sia allora $\varphi \in \mathrm{Form}$, $u_i \in I_M$, e supponiamo che $(\mathrm{Sod}\,(u_i; \ulcorner \forall x \in V\, \exists\, !y \in V \varphi(x, y, u_i)\urcorner, V))^{(M)}$. Se $a \in I_M$, a ogni $x E a$ si associ l'insieme degli y di rango minimo per cui $(\mathrm{Sod}\,(x, y, u_i; \varphi, V))^{(M)}$, insieme che appartiene a I_M per la Δ_1^1-separazione. Allora per il Δ_1^1-rimpiazzamento esiste in I_M un insieme che contiene tutti questi y, diciamo b, e

$$\left(\mathrm{Sod}\,(a,\, b,\, u_i;\, \ulcorner \forall z \in V(z \in b \leftrightarrow \exists x \in a\varphi(x,\, y,\, u_i)\urcorner,\, V))\right)^{(M)} .$$

Sia $\mathbf{GB}_1$ la teoria $\mathbf{GB} + \Delta_1^1$-rimpiazzamento; non consideriamo l'aggiunta del Δ_1^1-rimpiazzamento a $\mathbf{GB}^*$ perchè come abbiamo detto i casi rilevanti di C) seguono dal Δ_1^1-rimpiazzamento.

Vale la seguente

Proposizione 13. *Tutti i modelli di* $\mathbf{GB}_1$ *sono alti.*

Dimostrazione. Sia $\langle M, E, V^M\rangle$ un modello di $\mathbf{GB}_1$; si consideri l'applicazione che a ogni $\varphi \in \mathrm{Form}$ con una sola variabile libera associa il più piccolo ordinale β di M, $\beta \in I_M$, tale che esiste un x, xEV_β^M, per cui

$$(\forall z \in V(\mathrm{Sod}\,(z,\, \varphi,\, V) \leftrightarrow z = x))^{(M)} .$$

Per il Δ_1^1-rimpiazzamento, esiste in I_M un α tale che $(D_M \subseteq V_\alpha^M)^{(M)}$.

Dalle Proposizioni 11 e 13 e dal Lemma 12, e dalle osservazioni fatte sulla restrizione di C) alla Δ_1^1-separazione, segue allora

Corollario. *«Esiste un modello di* **GB***» è un teorema di* $\mathbf{GB}_1$.

Analogamente, se $\mathbf{TC}_1$ è la teoria che si ottiene aggiungendo a **TC** il Δ_1^1-rimpiazzamento di **GB** relativizzato a U

Corollario. *«Esiste un modello di* **GB***» è un teorema di* $\mathbf{TC}_1$.

Vale la pena di osservare che $\mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}\,(V)$ è strettamente più debole del Δ_1^1-rimpiazzamento, almeno sotto certe ipotesi esistenziali.

Supponiamo che esista un ordinale inaccessibile, e sia k il primo; allora è noto che $\langle V_{k+1}, \varepsilon, V_k\rangle$ è modello di $\mathbf{GB}^*$ e del Δ_1^1-rimpiazzamento, e anzi della teoria di Mostowski-Morse con lo schema impredicativo di esistenza delle classi.

La riunione dell'insieme degli $x \in V_k$ definibili in $\langle V_k, \in\rangle$ è un V_α, e $\langle V_\alpha, \in\rangle$ è sottostruttura elementare di $\langle V_k, \in\rangle$, rispetto al linguaggio L'' di **ZF**. Sia $\langle M, \in, V_\alpha\rangle$ il modello di **GB** in cui M è l'insieme dei sottinsiemi di V_α, definibili in $\langle V_\alpha, \in\rangle$; siccome gli $x \in V_\alpha$ definibili in $\langle V_\alpha, \in\rangle$ coincidono con gli $x \in V_k$ definibili in $\langle V_k, \in\rangle$, per proprietà delle estensioni elementari (si veda anche [**4**]), ne segue che $\langle M, \in, V_\alpha\rangle$ è un modello di $\mathbf{GB}^*$ non alto, quindi non è modello del Δ_1^1-rimpiazzamento. Abbiamo tuttavia, con le notazioni ora introdotte

Lemma 14. *In* $\langle M, \in, V_\alpha \rangle$ *vale* $\mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$.

Dimostrazione. Diamo solo un cenno, perchè la dimostrazione completa richiederebbe un esame approfondito delle proprietà di assolutezza delle formule Sod. Se $\varphi \in \mathrm{Form}$ e $\langle V_{k+1}, \in, V_k \rangle \models \mathrm{Sod}(\emptyset, \varphi, V)$, allora si vede facilmente che φ è vera in $\langle V_k, \in \rangle$. Quindi φ è vera in $\langle V_\alpha, \in \rangle$ e questo implica $\langle M, \in, V_\alpha \rangle \models \mathrm{Sod}(\emptyset, \varphi, V)$. Per provare quest'ultimo passaggio, che non è immediato, non occorre conoscere la forma precisa di Sod, ma solo che sono teoremi di **GB**, come in effetti sono, le condizioni ricorsive

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Sod}(x, y; \ulcorner v_0 = v_1 \urcorner, V) \leftrightarrow x = y \,,\\
&\mathrm{Sod}(x, y; \ulcorner v_0 \in v_1 \urcorner, V) \leftrightarrow x \in y \,,\\
&\mathrm{Sod}(u_i; \ulcorner \sim \varphi \urcorner, V) \leftrightarrow \ \sim \mathrm{Sod}(u_i; \ulcorner \varphi \urcorner, V) \,,\\
&\mathrm{Sod}(u_i; \ulcorner \varphi \,\&\, \psi \urcorner, V) \leftrightarrow \mathrm{Sod}(u_i; \ulcorner \varphi \urcorner, V) \,\&\, \mathrm{Sod}(u_i; \ulcorner \psi \urcorner, V) \,,\\
&\mathrm{Sod}(u_i; \ulcorner \exists x \varphi \urcorner, V) \leftrightarrow \exists x \in V\ \mathrm{Sod}(x, u_i; \ulcorner \varphi \urcorner, V) \,,
\end{aligned}
$$

dove le formule considerate sono elementi di Form; allora la dimostrazione che se φ è vera in $\langle V_\alpha, \in \rangle$, allora $\langle M, \in, V_\alpha \rangle \models \mathrm{Sod}(\emptyset, \varphi, V)$ si può fare per induzione sulla complessità delle formule, sapendo che $\langle M, \in, V_\alpha \rangle$ è modello di **GB**.

In conclusione, siccome $\mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$ vale in $\langle V_{k+1}, \in, V_k \rangle$, in $\langle M, \in, V_\alpha \rangle$ vale $\mathrm{Sod}(\emptyset, \varphi, V)$ per ogni assioma di **ZF**, quindi vale $\mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$.

Si noti che comunque la dimostrazione dipende dalla esistenza di k, o almeno dalla esistenza di un modello naturale $\langle V_\beta, \in \rangle$ che sia estensione elementare di $\langle V_\alpha, \in \rangle$ e tale che $\langle V_{\beta+1}, \in, V_\beta \rangle \models \mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$.

Un problema interessante sarebbe quello di caratterizzare i modelli naturali, o i modelli standard, di $\mathbf{GB} + \Delta_1^1$-rimpiazzamento. Potrebbero essere considerati la generalizzazione al secondo ordine degli insiemi ammissibili.

6. – Abbiamo ricordato che se due strutture dello stesso tipo sono l'una estensione elementare dell'altra allora gli elementi definibili nelle due strutture coincidono. Nell'applicare questa proprietà ai modelli $\langle M, E, V^M \rangle$ di **GB** occorre fare attenzione a non confondere la nozione di elementi definibili nella struttura con quella di elementi di D_M. La confusione condurrebbe a conclusioni errate, come ad esempio nel seguente argomento, proposto per estendere la Proposizione 11 a tutti i modelli di $\mathbf{GB}^* + \mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$: sia $\langle M, E, V^M \rangle$ un modello della teoria, eventualmente non alto; consideriamo $\langle M', E', V^{M'} \rangle$, una sua estensione elementare di altezza maggiore, dove

Definizione. Un modello $\langle M', E', V^{M'}\rangle$ che sia estensione di $\langle M, E, V^M\rangle$, cioè $M \subseteq M'$ e $E' \restriction M = E$, ha *altezza maggiore* di $\langle M, E, V^M\rangle$ se esiste un $x \in I_{M'}$ che è un ordinale in M' e per ogni $y \in I_M$ che sia un ordinale in M e in M' si ha $yE'x$.

L'esistenza di estensioni elementari di altezza maggiore, per un qualsiasi modello $\langle M, E, V^M\rangle$, sarà dimostrata più avanti. Se il fatto che $\langle M', E', V^{M'}\rangle$ sia estensione elementare di $\langle M, E, V^M\rangle$ implicasse $D_M = D_{M'}$ allora questo e l'altezza maggiore di M' implicherebbero che M' è alto, quindi $D_{M'} \in I_{M'}$; poichè l'affermazione della esistenza dell'insieme $D_{M'}$ è vera in M', un insieme siffatto esisterebbe anche in M, ed è subito visto che sarebbe proprio D_M. Ma allora M sarebbe alto. D'altra parte abbiamo visto che esiste un modello $\langle M, \in, V_\alpha\rangle$ che non è alto. L'errore del ragionamento sta in questo: $D_{M'}$ non è la collezione degli elementi definibili nella struttura $\langle M', E', V^{M'}\rangle$, bensì di quelli per cui è vero in M' che sono definibili in V: $x \in D_{M'}$ se e solo se $x \in I_{M'}$ e $\langle M', E', V^{M'}\rangle \models \exists\varphi \in \mathrm{Form}\, \forall z \in V(\mathrm{Sod}\,(z, \varphi, V) \leftrightarrow z = x)$.

Si vede facilmente che se $\langle M', E', V^{M'}\rangle$ è estensione elementare di $\langle M, E, V^M\rangle$ allora $D_M \subseteq D_{M'}$. Può succedere però che esista un $x \in M' - M$ per cui la condizione di sopra per appartenere a $D_{M'}$ è soddisfatta, purchè in M' esista un elemento che non era in M e che soddisfa in M' la proprietà di essere una formula; e anzi questo in certi casi deve succedere. Possiamo in effetti estrarre un contenuto positivo dalle precedenti considerazioni, precisamente

Proposizione 15. *Se $\langle M, E, V^M\rangle$ è un modello non alto di* **GB*** *ed $\langle M', E', V^{M'}\rangle$ una sua estensione elementare di altezza maggiore, allora esiste un $x \in M' - M$ tale che $xE'\omega^{M'}$, cioè $\omega^M \neq \omega^{M'}$.*

Dimostrazione. Per non ottenere una contraddizione come nelle considerazioni precedenti occorre che sia $D_M \neq D_{M'}$; questo è possibile solo se in M' esiste un nuovo elemento di $\mathrm{Form}^{M'}$ e identificando questi con i numeri naturali si ha la conclusione.

Corollario. *Sia $\langle M, \in, V^M\rangle$ un modello standard non alto di* **GB***; *ogni sua estensione elementare di altezza maggiore è non ω-standard.*

In particolare questo vale per i modelli naturali di **GB**, ad esempio quello del Lemma 14. Per i modelli standard di **GB** si può dire in generale che non hanno estensioni elementari standard di altezza maggiore. Sia infatti $\langle M, \in, V^M\rangle$ un modello standard di **GB**, $\langle M', E', V^{M'}\rangle$ una sua estensione elementare, e $x \in M' - M$ un elemento tale che $xE'V^M$ e x soddisfa in M' la proprietà di essere un ordinale. Scriviamo ord (x) per la formula che definisce tale proprietà. In M esiste una classe, che indichiamo con ord^M, che in M soddisfa $\forall x(x \in \mathrm{ord}^M \leftrightarrow \mathrm{ord}\,(x)\ \&\ \exists y(x \in y))$, e se M è standard ord^M è un ordinale. In M'

ord^M soddisfa la stessa formula, quindi $xE'\,\mathrm{ord}^M$ e se E' fosse $\in$ allora x dovrebbe appartenere a M.

Più in generale ogni estensione elementare di un modello standard di **GB** in cui ci siano nuovi insiemi deve essere non standard: se α è un ordinale nel modello M, $V_\alpha^M = V_\alpha^{M'}$ e se $x \in M' - M$ è un nuovo insieme di rango minore o uguale ad α vale $xE'V_\alpha^M$, quindi di nuovo se E' fosse $\in$ x dovrebbe appartenere a M.

Si noti che in una estensione elementare di un modello $\langle M, E, V^M\rangle$ possono esistere nuovi insiemi, o nuove classi, o entrambe. Tuttavia identificando le classi di $\langle M', E', V^{M'}\rangle$ con i veri sottinsiemi di $I_{M'}$ si vede che se la cardinalità della estensione elementare di $\langle M, E, V^M\rangle$ è maggiore di $2^{\mathrm{card}\,(M)}$ allora devono per forza essere stati introdotti nuovi insiemi.

Ricordiamo infine come si può provare l'esistenza di estensioni elementari di $\langle M, E, V^M\rangle$ con altezza maggiore. Si aggiunge a $\langle M, E, V^M\rangle$ una costante a per ogni elemento di M, quindi si considera la teoria della struttura $\langle M, E, V^M, a\rangle_{a\in M}$ con l'aggiunta dei seguenti enunciati.

$$\mathrm{ord}\,(b)\,, \qquad \exists y(b \in y)\,, \qquad a \in b \qquad \text{per ogni} \quad a \in I_M \text{ tale che } (\mathrm{ord}\,(a))^{(M)}\,,$$

dove b è un nuovo simbolo diverso da tutti i precedenti.

Per il teorema di compattezza questo insieme di enunciati ha un modello, e ogni suo modello è una estensione elementare di $\langle M, E, V^M\rangle$ con la proprietà voluta.

Bibliografia.

[1] M. Diligenti, *Una teoria delle collezioni*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **2** (1973), 213-231.

[2] A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel and A. Levy, *Foundations of Set Theory*, North Holland, Amsterdam 1973.

[3] T. Jech and W. Powell, *Standards models of set theory with predication*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 808-813.

[4] R. Montague and R. L. Vaught, *Natural models of set theories*, Fud. Math. **47** (1959), 219-242.

Riassunto.

Si confronta la teoria delle classi **GB** *con una teoria delle collezioni* **TC** *dimostrando che* **TC** *è estensione conservativa di* **GB**, *mentre il risultato non vale se si aggiunge l'assioma*

della supertransitività di V. Per la dimostrazione si introduce una estensione **GB*** *di* **GB**, *con un rafforzamento dello schema di separazione per insiemi, la cui parte standard è diversa dalla parte standard di* **GB**. *Si considera quindi l'assioma* $\mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$, *che afferma che V è un modello di* **ZF**, *e si stabilisce una proprietà dei modelli alti di* **GB*** $+\ \mathrm{Mod}_{\mathbf{ZF}}(V)$ *che permette di dimostrare che l'esistenza di un modello di* **GB** *è provabile in* **GB** $+\ \Delta^1_1$*-rimpiazzamento, e a maggior ragione in* **TC** $+\ \Delta$-$^1_1$*rimpiazzamento. Quest'ultimo risultato, sostanzialmente noto, è dedotto qui dallo studio delle proprietà dei modelli alti di* **GB**.

* * *