Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 143-158

ROSANNA SUCCI CRUCIANI (*)

La teoria delle relazioni nello studio di categorie regolari e di categorie esatte. (**)

Introduzione.

È noto, [1], [2], che, data una categoria regolare $\mathscr{E}$, è possibile definire la categoria Rel $(\mathscr{E})$ delle relazioni su $\mathscr{E}$, la quale è una categoria bidimensionale con inversione contenente $\mathscr{E}$ come sottocategoria.

In [2] W. LAWVERE ha posto il problema, in un certo senso inverso, di determinare assiomi per una categoria bidimensionale con inversione $\mathscr{R}$ affinchè essa sia la categoria delle relazioni su una categoria regolare e ha indicato la possibilità di applicare questa teoria assiomatica per dare una costruzione ed ottenere proprietà della «categoria dei quozienti» la cui esistenza, per ogni categoria regolare, è stata affermata da A. JOYAL in una conferenza ad Oberwolfach nel 1972.

Nel presente lavoro si risolve il suddetto problema e si effettua l'applicazione sopra indicata; precisamente nel n. **1** si richiamano, per comodità del lettore, le definizioni e le proprietà utilizzate, rimandando per uno studio più ampio ed approfondito a [2]; nel n. **2** si dà un'assiomatica per una categoria $\mathscr{R}$ in modo che esista una sua sottocategoria regolare $\mathscr{E}$ della quale $\mathscr{R}$ sia la categoria delle relazioni; nel n. **3** si costruisce la categoria dei quozienti $Q(\mathscr{E})$ seguendo [2] e si dimostrano alcune sue proprietà, facendo uso della teoria delle relazioni sviluppata nel n. **2**. In particolare si prova che la categoria $Q(\mathscr{E})$ è una categoria regolare in cui le relazioni d'equivalenza sono effettive (cioè esatta nel senso di BARR), che inoltre il funtore canonico $\mathscr{E} \to Q(\mathscr{E})$ con-

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 00100 Roma, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G. N. S. A. G. A. del C. N. R. — Ricevuto: 10-VII-1974.

serva i limiti proiettivi finiti e gli epimorfismi estremali ed è una equivalenza di categorie se e solo se in $\mathscr{E}$ le relazioni d'equivalenza sono effettive; si prova infine una proprietà di universalità per $Q(\mathscr{E})$.

1. - Definizioni e richiami. (1)

Sia $\mathscr{E}$ una categoria.

Definizione 1.1. Un morfismo p di $\mathscr{E}$ è detto *epimorfismo regolare* se esistono in $\mathscr{E}$ due morfismi di cui p è il conucleo.

Definizione 1.2. $\mathscr{E}$ è detta *categoria con immagine regolare* se ogni suo morfismo f si decompone $f = pi$, essendo p epimorfismo regolare ed i monomorfismo.

Si riconosce che la decomposizione di cui in 1.2. è unica a meno di isomorfismi.

Definizione 1.3. Sia $\mathscr{E}$ una categoria nella quale esista il prodotto fibrato; si dice che $\mathscr{E}$ *soddisfa* l'*assioma di regolarità* quando in un qualunque quadrato cartesiano:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

se f è epimorfismo regolare, anche f' lo è.

Definizione 1.4. Una categoria $\mathscr{E}$ è detta *regolare* se sono soddisfatte le condizioni seguenti:

a) in $\mathscr{E}$ esistono i limiti proiettivi finiti,

b) $\mathscr{E}$ è una categoria con immagine regolare,

c) $\mathscr{E}$ soddisfa l'assioma di regolarità.

---

(1) Per comodità, useremo qui le notazioni di [2].

Definizione 1.5. Un morfismo p di $\mathscr{E}$ è detto *epimorfismo estremale* se è verificata la seguente condizione: assegnati un monomorfismo i e due morfismi a e b tali che $ai = pb$, esiste un morfismo y tale che $py = a$, $yi = b$.

Si prova facilmente la seguente:

Proposizione 1.6. *Il composto di due epimorfismi estremali è un epimorfismo estremale; se il composto di due morfismi fg è un epimorfismo estremale, g è un epimorfismo estremale.*

È immediato verificare che un epimorfismo estremale che sia anche monomorfismo è un isomorfismo.

Proposizione 1.7. Se nelle Definizioni 1.2. e 1.3. sostituiamo alla nozione di epimorfismo regolare quella di epimorfismo estremale, otteniamo le nozioni di *categoria con immagine estremale* e di *assioma di regolarità estremale.*

Si verifica subito che, in una categoria qualunque, ogni epimorfismo regolare è epimorfismo estremale; sussiste inversamente il teorema seguente:

Teorema 1.8. (Joyal). *Sia $\mathscr{E}$ una categoria con limiti proiettivi finiti, con immagine estremale e soddisfacente l'assioma di regolarità estremale; se $p: X \to Y$ è un epimorfismo estremale di $\mathscr{E}$ e $R_p \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} X$ è il prodotto fibrato di p per p, il seguente diagramma:*

$$R_p \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{p} Y$$

è esatto, cioè $p = \operatorname{coker}(\pi_1, \pi_2)$.

Si ha anche la seguente proposizione di immediata dimostrazione:

Proposizione 1.9. *Se $\mathscr{E}$ è una categoria con immagine regolare, ogni epimorfismo estremale è un epimorfismo regolare.*

Da queste ultime proprietà segue subito la seguente

Proposizione 1.10. *Una categoria è regolare se e solo se è una categoria con limiti proiettivi finiti con immagine estremale e soddisfa l'assioma di regolarità estremale.*

Se $\mathscr{E}$ è una categoria regolare, è possibile definire una categoria $\mathrm{Rel}(\mathscr{E})$ detta la *categoria delle relazioni su $\mathscr{E}$* i cui oggetti sono quelli di $\mathscr{E}$ ed i cui morfismi sono definiti al modo seguente: dati due oggetti X ed Y un morfismo $X \to Y$ di $\mathrm{Rel}(\mathscr{E})$ è una relazione $X \nrightarrow Y$ di $\mathscr{E}$ cioè un sottooggetto in $\mathscr{E}$ del prodotto $X \times Y$. La composizione dei morfismi in Rel $(\mathscr{E})$ può effettuarsi come segue: assegnate due relazioni $X \overset{\alpha}{\nrightarrow} Y \overset{\beta}{\nrightarrow} Z$ esse individuano a meno di un isomorfismo le coppie di morfismi $X \xleftarrow{p} \cdot \xrightarrow{q} Y$, $Y \xleftarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} Z$; sia (u, v) il prodotto fibrato di q per f; il morfismo $\langle up, vg \rangle$ si decompone in $\mathscr{E}$ secondo un epimorfismo estremale ed un monomorfismo i di codominio $X \times Z$; detto γ il sottooggetto individuato da i si pone $\alpha\beta = \gamma$. Notiamo esplicitamente che questa composizione è ben definita se e solo se $\mathscr{E}$ è regolare.

Per uno studio approfondito ed esauriente della categoria delle Relazioni rimandiamo senz'altro a [**2**].

Definizione 1.11. Sia $\mathscr{E}$ una categoria regolare; diciamo che in $\mathscr{E}$ *le relazioni d'equivalenza sono effettive* se ogni relazione d'equivalenza è il prodotto fibrato di un morfismo per se stesso. Una categoria regolare nella quale le relazioni d'equivalenza sono effettive si chiama *categoria esatta*.

Proposizione 1.12. *Se $\mathscr{E}$ è una categoria esatta, ogni relazione d'equivalenza $P \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} X$ ha conucleo p e (p_1, p_2) è il prodotto fibrato di p per p.*

2. - Categorie di relazioni.

Definizione 2.1. Una categoria $\mathscr{R}$ è detta *categoria bidimensionale con inversione* se sono soddisfatti i seguenti assiomi:

R_1. È definita fra i morfismi di $\mathscr{R}$, aventi stesso dominio e stesso codominio, una relazione d'ordine, che indicheremo $\subseteq$, tale che, se $X \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} Y \overset{\alpha'}{\underset{\beta'}{\rightrightarrows}} Z$ sono morfismi di $\mathscr{R}$, si ha:

$$(\alpha \subseteq \beta \wedge \alpha' \subseteq \beta') \Rightarrow \alpha\alpha' \subseteq \beta\beta' .$$

R_2. Per ogni morfismo $\alpha: X \to Y$ di $\mathscr{R}$ esiste un morfismo $\alpha^{-1}: Y \to X$ di $\mathscr{R}$ tale che

$$(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha , \qquad (\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1} ,$$

per ogni $\beta: Y \to Z$.

R_3. Se $X \overset{\alpha}{\rightrightarrows} Y$ sono morfismi di $\mathscr{R}$, si ha:

$$\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1} .$$

Se $\mathscr{R}$ è una categoria bidimensionale con inversione, si ha la seguente

Proposizione 2.2. *I morfismi $\alpha\colon X \to Y$ di $\mathscr{R}$ che soddisfano le condizioni:*

$$\alpha^{-1}\alpha \subseteq 1_Y\,, \qquad \alpha\alpha^{-1} \supseteq 1_X$$

costituiscono una categoria $\mathscr{E}$ sottocategoria di $\mathscr{R}$.

Dim. Per ogni oggetto X di $\mathscr{R}$ si riconosce che $(1_X)^{-1} = 1_X$ e quindi 1_X è un morfismo di $\mathscr{E}$; inoltre, assegnati due morfismi $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ di $\mathscr{E}$ si prova subito che fg è un morfismo di $\mathscr{E}$.

I morfismi di $\mathscr{E}$ saranno chiamati $\mathscr{E}$-morfismi.

Sia ora $\mathscr{R}$ una categoria bidimensionale con inversione ogni morfismo della quale α si decomponga $\alpha = p^{-1}q$ essendo p e q $\mathscr{E}$-morfismi; si provano allora le due seguenti proposizioni:

Proposizione 2.3. *Un $\mathscr{E}$-morfismo i è un monomorfismo in $\mathscr{E}$ se e solo se $ii^{-1} = 1$.*

Dim. Sia $ii^{-1} = 1$; se x_1 e x_2 sono due morfismi tali che $x_1 i = x_2 i$, è $x_1 ii^{-1} = x_2 ii^{-i}$ e quindi $x_1 = x_2$. Sia i un monomorfismo; poichè è $ii^{-1} \supseteq 1$ basterà provare che $ii^{-1} \subseteq 1$; siano p e q $\mathscr{E}$-morfismi tali che $p^{-1}q = ii^{-i}$, ne segue $pi = qi$ e quindi $p = q$; si ha allora $ii^{-1} = p^{-1}p \subseteq 1$.

Proposizione 2.4. *Se per un $\mathscr{E}$-morfismo p si ha $p^{-1}p = 1$, p è un epimorfismo estremale in $\mathscr{E}$.*

Dim. Assegnato un monomorfismo i e due morfismi a e b tali che $ai = pb$, il morfismo $p^{-1}a$ rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "p"] \arrow[d, "a"'] & \bullet \arrow[d, "b"] \arrow[dl, "p^{-1}a"'] \\ \bullet \arrow[r, "i"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

Si ha infatti $p^{-1}ai = p^{-1}pb = b$ e $ai = pp^{-1}pb = pp^{-1}ai$ da cui $a = p(p^{-1}a)$.

$p^{-1}a$ è un $\mathscr{E}$-morfismo; infatti da $p^{-1}ai = b$ segue $p^{-1}a = bi^{-1}$, allora

$(p^{-1}a)^{-1}(p^{-1}a) = (bi^{-1})^{-1}(bi^{-1}) \subseteq \mathbf{1}$, inoltre è ovviamente $(p^{-1}a)(p^{-1}a)^{-1} \supseteq 1$.

Per il resto del presente numero supporremo che $\mathscr{R}$ sia una categoria bidimensionale con inversione nella quale siano validi i due seguenti assiomi:

R_4. In $\mathscr{R}$ esiste un oggetto $\mathbf{1}$ che soddisfa la seguente condizione: per ogni oggetto X di $\mathscr{R}$, esiste un $\mathscr{E}$-morfismo $X \xrightarrow{u} \mathbf{1}$ tale che, per ogni morfismo $X \xrightarrow{\alpha} \mathbf{1}$ di $\mathscr{R}$, si ha $\alpha \subseteq u$.

R_5. Ogni morfismo α di $\mathscr{R}$ si decompone canonicamente $\alpha = p^{-1}q$ essendo p e q $\mathscr{E}$-morfismi in guisa che sono verificate le condizioni:

1) Se f e g sono $\mathscr{E}$-morfismi tali che $f^{-1}g \subseteq \alpha$, esiste uno ed uno solo $\mathscr{E}$-morfismo h tale che $f = hp$, $g = hq$.

2) Se è $f^{-1}g = \alpha$, si ha $h^{-1}h = 1$.

Si riconosce facilmente che la decomposizione canonica di cui in R_5 è unica a meno di isomorfismi.

Proposizione 2.5. *In $\mathscr{E}$ esistono i limiti proiettivi finiti.*

Dim. Basterà provare che in $\mathscr{E}$ esiste l'oggetto finale ed il prodotto fibrato. L'oggetto finale di $\mathscr{E}$ è l'oggetto $\mathbf{1}$ di $\mathscr{R}$ di cui in R_4; infatti, se $X \xrightarrow{f} \mathbf{1}$ è un $\mathscr{E}$-morfismo, si ha $f \subseteq u$ e $f \supseteq fu^{-1}u \supseteq ff^{-1}u \supseteq u$, cioè $f = u$. L'esistenza del prodotto fibrato segue dall'assioma R_5; infatti, assegnati due $\mathscr{E}$-morfismi u e v con lo stesso codominio, se $p^{-1}q$ è la decomposizione canonica di uv^{-1}, si prova che $pu = qv$ ed inoltre che, se per due $\mathscr{E}$-morfismi f e g è $fu = gv$, si ha $f^{-1}g \subseteq p^{-1}q$; ne segue che (p, q) è il prodotto fibrato di u per v.

Proposizione 2.6. *Sia $\alpha\colon X \to Y$ un morfismo di $\mathscr{R}$ e $p^{-1}q$ una sua decomposizione in $\mathscr{E}$; condizione necessaria e sufficiente affinchè $p^{-1}q$ sia la decomposizione canonica di α è che il morfismo $\langle p, q\rangle\colon \cdot \to X \times Y$ sia un monomorfismo.*

Dim. Sia $p^{-1}q$ la decomposizione canonica di α; posto $\langle p, q\rangle = i$, siano x_1 e x_2 tali che $x_1 i = x_2 i$; si ha $x_1 p = x_2 p$, $x_1 q = x_2 q$ e $(x_1 p)^{-1}(x_1 q) \subseteq p^{-1}q$; ne segue, per l'unicità del morfismo h in R_5, $x_1 = x_2$. Inversamente sia $\langle p, q\rangle$ un monomorfismo; dette p_X e p_Y le proiezioni del prodotto $X \times Y$ e $f^{-1}g$ la decomposizione canonica di α, da R_5 segue l'esistenza di un epimorfismo estremale h tale che $hf = p$, $hg = q$, ovvero, posto $j = \langle f, g\rangle$, $hjp_X = p$, $hjp_Y = q$; risulta allora $hj = \langle p, q\rangle$, h è quindi un monomorfismo e cioè un isomorfismo.

Proposizione 2.7. *Se $\alpha = p^{-1}q$ è la decomposizione canonica di un morfismo di $\mathscr{R}$ $\alpha\colon \mathbf{1} \to X$, q è un monomorfismo.*

Dim. Segue dalla Proposizione 2.6.

Proposizione 2.8. *$\mathscr{E}$ è una categoria con immagine estremale.*

Dim. Siano $f\colon X \to Y$ e $t\colon X \to \mathbf{1}$ $\mathscr{E}$-morfismi; se $p^{-1}q$ è la decomposizione canonica di $t^{-1}f$, da R_5 e dalle Proposizioni 2.4 e 2.7 segue che f si decompone in hq, essendo h un epimorfismo estremale e q un monomorfismo.

Proposizione 2.9. *Se un $\mathscr{E}$-morfismo f è epimorfismo estremale in $\mathscr{E}$, si ha $f^{-1}f = 1$.*

Dim. Si riprenda per f la costruzione della proposizione precedente; $f = hq$ implica che q sia un epimorfismo estremale (Prop. 1.6) e quindi un isomorfismo; d'altra parte, poichè $h^{-1}h = 1$, è $f^{-1}f = 1$.

Proposizione 2.10. *$\mathscr{E}$ soddisfa l'assioma di regolarità estremale.*

Dim. Sia $f\colon X \to Y$ un $\mathscr{E}$-morfismo epimorfismo estremale; assegnato un qualunque $\mathscr{E}$-morfismo $g\colon Y' \to Y$, consideriamo il quadrato cartesiano:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Si ha $p_1^{-1}p_2 = fg^{-1}$ da cui $f^{-1}p_1^{-1}p_2 = f^{-1}fg^{-1} = g^{-1}$; poichè $g^{-1}\,1_Y$, è la decomposizione canonica di g^{-1}, per il morfismo h di cui in R_5 si ha $hh^{-1} = 1$ e $h = p_2$; ne segue che p_2 è un epimorfismo estremale.

Dalle Proposizioni 2.5, 2.8, 2.10 e dalla Proposizione 1.10. segue la

Proposizione 2.11. *$\mathscr{E}$ è una categoria regolare.*

È ora di immediata dimostrazione il

Teorema 2.12. *$\mathscr{R}$ è la categoria delle relazioni su $\mathscr{E}$.*

Dim. Dalla Proposizione 2.6 segue che un morfismo di $\mathscr{R}$ si può identificare con una relazione $X \nrightarrow Y$ di $\mathscr{E}$. Si riconosce poi subito che sono uguali le applicazioni che definiscono la composizione rispettivamente in $\mathscr{R}$ ed in Rel ($\mathscr{E}$).

In seguito faremo uso della intersezione di relazioni, che si definisce come intersezione di sottooggetti, e utilizzeremo la seguente

Proposizione 2.13. *Siano* $X \overset{\alpha}{\nrightarrow} Y \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightrightarrows}} Z \overset{\delta}{\nrightarrow} E$ *relazioni in* $\mathscr{E}$. *Si ha*:

$$\alpha(\beta \cap \gamma) \subseteq \alpha\beta \cap \alpha\gamma\,, \qquad (\beta \cap \gamma)\,\delta \subseteq \beta\,\delta \cap \gamma\delta$$

e, se α *è un* $\mathscr{E}$*-morfismo, è* $\alpha(\beta \cap \gamma) = \alpha\beta \cap \alpha\gamma$.

Dim. Poichè, come è facile provare, $\beta \cap \gamma \subseteq \beta$ e $\beta \cap \gamma \subseteq \gamma$, è $\alpha(\beta \cap \gamma) \subseteq \alpha\beta \cap \alpha\gamma$. Inoltre, se α è un $\mathscr{E}$-morfismo poichè $\alpha^{-1}(\alpha\beta \cap \alpha\gamma) \subseteq \alpha^{-1}\alpha\beta \subseteq \beta$ e $\alpha^{-1}(\alpha\beta \cap \alpha\gamma) \subseteq \alpha^{-1}\alpha\gamma \subseteq \gamma$, si ha $\alpha^{-1}(\alpha\beta \cap \alpha\gamma) \subseteq \beta \cap \gamma$ e quindi $(\alpha\beta \cap \alpha\gamma) \subseteq \alpha\alpha^{-1}(\alpha\beta \cap \alpha\gamma) \subseteq \alpha(\beta \cap \gamma)$; la dimostrazione si completa poi in modo ovvio.

Siano $\mathscr{E}$ ed $\mathscr{E}'$ due categorie regolari e $\mathrm{Rel}\,(\mathscr{E})$ e $\mathrm{Rel}\,(\mathscr{E}')$ le rispettive categorie di relazioni.

Proposizione 2.14. *Un funtore* $\mathscr{F}\colon \mathrm{Rel}\,(\mathscr{E}) \to \mathrm{Rel}\,(\mathscr{E}')$ *che conservi la inclusione, l'inversione, la decomposizione canonica e l'oggetto* $\mathbf{1}$, *subordina* (*in modo naturale*) *un funtore* $F\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ *che conserva i limiti proiettivi finiti e gli epimorfismi estremali. Viceversa, assegnato un funtore* $F\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ *che conservi i limiti proiettivi finiti e gli epimorfismi estremali, si definisce un funtore* $\mathscr{F}$: $\mathrm{Rel}\,(\mathscr{E}) \to \mathrm{Rel}\,(\mathscr{E}')$ *al modo seguente*: *se* $\alpha = p^{-1}q$ *è una decomposizione in* $\mathscr{E}$ *di un morfismo di* $\mathrm{Rel}\,(\mathscr{E})$, *si pone* $\mathscr{F}(\alpha) = (F(p))^{-1}F(q)$ *e* $\mathscr{F}$ *conserva l'inclusione, l'inversione, la decomposizione canonica e l'oggetto* $\mathbf{1}$.

Tale proposizione mostra pertanto un'equivalenza tra un funtore $\mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ ed un funtore $\mathrm{Rel}\,(\mathscr{E}) \to \mathrm{Rel}\,(\mathscr{E}')$ rispettivamente con le proprietà dette. Essa, tenuto conto della teoria svolta nel presente numero, può ottenersi senza difficoltà; ne omettiamo pertanto la dimostrazione.

3. - Categorie di quozienti.

Se $\mathscr{E}$ è una categoria regolare, è possibile costruire una categoria $\mathscr{R}_{\mathscr{E}}$ al modo seguente:

Definizione 3.1. Gli oggetti di $\mathscr{R}_{\mathscr{E}}$ sono le coppie (X, R) costituite da un oggetto X di $\mathscr{E}$ e da una relazione d'equivalenza R su X; assegnati due oggetti (X, R) e (Y, R), un morfismo $(X, R) \to (Y, R)$ è una relazione $X \overset{\alpha}{\nrightarrow} Y$ di $\mathscr{E}$ tale che $R\alpha S = \alpha$. La composizione è quella di $\mathrm{Rel}\,(\mathscr{E})$.

Si noti che una relazione R su X è una relazione d'equivalenza se e solo se sono verificate le condizioni: $R \supseteq 1_X$, $R = R^{-1}$, $RR = R$. Si riconosce allora che la definizione 3.1. è ben posta, avendosi tra l'altro, per ogni oggetto (X, R) di $R_{\mathscr{E}}$, $1_{(X,R)} = R$. Si prova facilmente la seguente

P r o p o s i z i o n e 3.2. *$\mathscr{R}_{\mathscr{E}}$ è una categoria bidimensionale con inversione.*

La Proposizione 2.2 si può enunciare per $R_{\mathscr{E}}$ al modo seguente:

P r o p o s i z i o n e 3.3. *I morfismi $(X, R) \xrightarrow{\alpha} (Y, S)$ di $\mathscr{R}_{\mathscr{E}}$ che soddisfano le condizioni*

$$\alpha^{-1}\alpha \subseteq S\,, \qquad \alpha\alpha^{-1} \supseteq R$$

costituiscono una categoria sottocategoria di $\mathscr{R}_{\mathscr{E}}$.

Tale categoria sarà indicata $Q(\mathscr{E})$ e sarà chiamata *categoria dei quozienti su $\mathscr{E}$*, come si giustifica osservando che, se $F \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$ è la decomposizione canonica in $\mathscr{E}$ di una relazione d'equivalenza R su X è esatto in $Q(\mathscr{E})$ il seguente diagramma:

$$(F, 1_F) \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} (X, 1_X) \xrightarrow{R} (X, R)\,.$$

Ciò rientra come caso particolare nella Proposizione 3.11 tenuto conto del fatto che R è un epimorfismo estremale (Prop. 2.4), ma potrebbe dimostrarsi direttamente fin d'ora.

P r o p o s i z i o n e 3.4. *In $\mathscr{R}_{\mathscr{E}}$ vale l'assioma* R_4.

D i m. L'oggetto $\mathbf{1}$ di $\mathscr{R}_{\mathscr{E}}$ è la coppia $(\mathbf{1}, 1_1)$; infatti, per ogni oggetto (X, R) di $\mathscr{R}_{\mathscr{E}}$ l'$\mathscr{E}$-morfismo $X \to \mathbf{1}$ individua un morfismo

$$(X, R) \xrightarrow{u} (\mathbf{1}, 1_1)$$

che si prova essere un morfismo di $Q(\mathscr{E})$ ed è tale che, assegnato un qualunque morfismo $\alpha\colon (X, R) \to (\mathbf{1}, 1_1)$ di $\mathscr{R}_{\mathscr{E}}$, si ha $\alpha \subseteq u$.

P r o p o s i z i o n e 3.5. *Ogni morfismo $\alpha\colon (X, R) \to (Y, S)$ di $\mathscr{R}_{\mathscr{E}}$ si decompone canonicamente $\alpha = (pR)^{-1}(qS)$, essendo p e q morfismi di $\mathscr{E}$; pR e qS sono morfismi* di $Q(\mathscr{E})$.

Dim. Consideriamo la decomposizione canonica di α in $\mathscr{E}$:

$$X \xleftarrow{p} E \xrightarrow{q} Y$$

poichè è $R\alpha S = \alpha$ si ha $\alpha = (pR)^{-1}(qS)$ e, posto $T = pRp^{-1} \cap qSq^{-1}$, si riconosce che T è una relazione d'equivalenza e che i morfismi:

$$(X, R) \xleftarrow{pR} (E, T) \xrightarrow{qS} (Y, S)$$

appartengono a $Q(\mathscr{E})$.

Proposizione 3.6. *Un morfismo* $\alpha\colon (X, R) \to (Y, S)$ *di* $Q(\mathscr{E})$ *è un monomorfismo se e solo se* $\alpha\alpha^{-1} = R$; *se* $\alpha^{-1}\alpha = S$, α *è un epimorfismo estremale.*

Dim. Tenuto conto della Proposizione 3.5, la dimostrazione è quella delle Proposizioni 2.3 e 2.4.

Proposizione 3.7. *Sia* X *un oggetto di* $\mathscr{E}$ *e* R *una relazione d'equivalenza su* X; *se* $X \xleftarrow{p_1} F \xrightarrow{p_2} X$ *è una decomposizione di* R *in* $\mathscr{E}$, *i morfismi* $(F, 1_F) \underset{p_2 R}{\overset{p_1 R}{\rightrightarrows}} (X, R)$ *sono epimorfismi estremali di* $Q(\mathscr{E})$.

Dim. Si ha $R = p_1^{-1}p_2$ quindi $p_1R = p_1p_1^{-1}p_2R \supseteq p_2R$ e $p_2R = p_2p_2^{-1}p_1R \supseteq \supseteq p_1R$; ne segue $p_1R = p_2R$; si riconosce quindi che $(p_1R)(p_1R)^{-1} \supseteq 1_F$ e $(p_1R)^{-1}(p_1R) = R$; di qui la tesi.

Proposizione 3.8. *Se* $\alpha\colon (X, R) \to (Y, S)$ *è un morfismo di* $Q(\mathscr{E})$ *e* $(X, R) \xleftarrow{pR} (E, T) \xrightarrow{qS} (Y, S)$ *è la sua decomposizione canonica in* $Q(\mathscr{E})$ (Prop. 3.5), pR *è un isomorfismo di* $Q(\mathscr{E})$.

Dim. Poichè $\alpha^{-1}\alpha \subseteq S$, si ha: $pRp^{-1} \subseteq qq^{-1}\,pRp^{-1}\,qq^{-1} = q\alpha^{-1}R\alpha q^{-1} \subseteq qSq^{-1}$

Ne segue che

$$T = pRp^{-1} \cap qSq^{-1} = pRp^{-1} = (pR)(pR)^{-1}$$

e quindi pR è un monomorfismo. Proviamo ora che, essendo $\alpha\alpha^{-1} \supseteq R$, pR è un epimorfismo estremale. Sia $p^{-1}_1p_2$ la decomposizione canonica di R in $\mathscr{E}$ e siano q_1 e q_2 le proiezioni del prodotto diretto $X \times X$; indichiamo con j il monomorfismo $\langle p_1, p_2\rangle$ (Prop. 2.6) e con (π_1, π_2) il prodotto fibrato di q per q; il morfismo $\langle \pi_1 p, \pi_2 p\rangle$ si decompone in $\mathscr{E}$ secondo un epimorfismo estremale π ed un monomorfismo i. Poichè $\alpha\alpha^{-1} \supseteq R$, esiste un $\mathscr{E}$-morfismo h tale che $hi = j$ e si ha $hiq_1 = p_1$; pensiamo ora tali morfismi di $\mathscr{E}$ come morfismi di $Q(\mathscr{E})$ fra oggetti del tipo $(A, 1_A)$; componendo l'ultima uguaglianza con $R\colon (X, 1_X) \to (X, R)$, otteniamo il morfismo di $Q(\mathscr{E})$ $hiq_1R = p_1R$ che, per la Proposizione 3.7, è un epimorfismo estremale, quindi anche iq_1R lo è; poichè si ha $\pi pR = \pi iq_1R$, $pR\colon (E, 1_E) \to (X, R)$ è un epimorfismo estremale e dalla commutatività del diagramma:

$$\begin{tikzcd}
(E, 1_E) \arrow[r, "pR"] \arrow[d, "T"'] & (X, R) \\
(E, T) \arrow[ur, "pR"'] &
\end{tikzcd}$$

segue che anche $pR\colon (E, T) \to (X, R)$ è un epimorfismo estremale.

Proposizione 3.9. *In* $\mathscr{R}_{\mathscr{E}}$ *vale l'assioma* R_5.

Dim. Sia $\alpha\colon (X, R) \to (Y, S)$ un morfismo di $\mathscr{R}_{\mathscr{E}}$ e $(X, R) \xleftarrow{pR} (E, T) \xrightarrow{qS} (Y, S)$ la sua decomposizione canonica in $Q(\mathscr{E})$ (Prop. 3.5); proveremo che questa gode delle proprietà di cui in R_5. Siano $f\colon (G, U) \to (X, R)$ e $g\colon (G, U) \to (Y, S)$ due morfismi di $Q(\mathscr{E})$ tali che $f^{-1}g \subseteq \alpha$ e siano $(G, U) \xleftarrow{f_1U} (F, V) \xrightarrow{f_2R} (X, R)$ e $(G, U) \xleftarrow{g_1U} (I, W) \xrightarrow{g_2S} (Y, S)$ le rispettive decomposizioni canoniche in $Q(\mathscr{E})$, in cui f_1U e g_1U sono isomorfismi (Prop. 3.8). Sia $(F, V) \xleftarrow{uV} (H, Z) \xrightarrow{vW} (I, W)$ la decomposizione canonica in $Q(\mathscr{E})$ del morfismo $(f_1U)(g_1U)^{-1}$; dalla Proposizione 3.8 segue subito che uV e vW sono isomorfismi di $Q(\mathscr{E})$.

Ora si ha $f^{-1}g \subseteq p^{-1}q$ e quindi

$$(uf_2)^{-1}(vg_2) = f_2^{-1}u^{-1}vg_2 = f_2^{-1}f_1Ug_1^{-1}g_2 = f^{-1}Ug = f^{-1}g \subseteq p^{-1}q$$

e, poichè $p^{-1}q$ è la decomposizione canonica di α in $\mathscr{E}$, esiste un $\mathscr{E}$-morfismo $h\colon H \to E$ tale che

$$hp = uf_2\,, \qquad hq = vg_2\,;$$

da queste uguaglianze segue che $u^{-1}h \subseteq f_2p^{-1}$ e $v^{-1}h \subseteq g_2q^{-1}$.

Consideriamo ora il morfismo $hT\colon (H, Z) \to (E, T)$ e proviamo che appartiene a $Q(\mathscr{E})$; si ha:

$$\begin{aligned} ZhT &= (uVu^{-1} \cap vWv^{-1})hT \subseteq (uVu^{-1}h \cap vWv^{-1}h)T \subseteq \\ &\subseteq (uVf_2p^{-1} \cap vWg_2q^{-1})T \subseteq (uVf_2Rp^{-1} \cap vWg_2Sq^{-1})T \\ &= (uf_2Rp^{-1} \cap vg_2Sq^{-1})T = h(pRp^{-1} \cap qSq^{-1})T = hT\,; \end{aligned}$$

inoltre è $(hT)^{-1}(hT) \subseteq T$, e

$$\begin{aligned} (hT)(hT)^{-1} &= hTh^{-1} = h(pRp^{-1} \cap qSq^{-1})h^{-1} \\ &= (hpRp^{-1} \cap hqSq^{-1})h^{-1} = (uf_2Rp^{-1} \cap vg_2Sq^{-1})h^{-1}\,, \end{aligned}$$

da cui, poichè

$$p^{-1} \supseteq p^{-1}h^{-1}h = f_2^{-1}u^{-1}h \qquad \text{e} \qquad q^{-1} \supseteq q^{-1}h^{-1}h = g_2^{-1}v^{-1}h\,,$$

si ottiene

$$(hT)(hT)^{-1} \supseteq (uf_2Rf_2^{-1}u^{-1}h \cap vg_2^{-1}v^{-1}h)h^{-1} \supseteq$$

$$\supseteq (uVu^{-1}h \cap v\,Wv^{-1}h)h^{-1} \supseteq Zhh^{-1} \supseteq Z\,.$$

Il morfismo hT soddisfa le uguaglianze:

$$(hT)(pR) = (uV)(f_2R)\,, \qquad (hT)(qS) = (vW)(g_2S)$$

e, posto $k = (f_1U)^{-1}(uV)^{-1}(hT)$, si riconosce subito che k è un morfismo di $Q(\mathscr{E})$ soddisfacente le uguaglianze

$$kpR = f\,, \qquad kqS = g\,.$$

Proviamo ora l'unicità del morfismo k mostrando che, se per due morfismi di $Q(\mathscr{E})$ k e k' è

$$kpR = f\,, \qquad kqS = g\,, \qquad k'pR = f\,, \qquad k'qS = g$$

si ha $k = k'$. Dalle uguaglianze $kpR = k'pR$, $kqS = k'qS$ segue

$$kpRp^{-1} \supseteq k'\,, \qquad kqSq^{-1} \supseteq k' \qquad \text{da cui} \qquad k(pRp^{-1} \cap qSq^{-1}) \supseteq k',$$

ovvero $k \supseteq k'$; analogamente si prova che $k' \supseteq k$.

Proviamo la seconda parte dell'assioma R_5. Sia $f^{-1}g = p^{-1}q$. Si ha $(uf_2)^{-1}(vg_2) = p^{-1}q$ e quindi $h^{-1}h = 1$; allora $(hT)^{-1}(hT) = T$. Il teorema è così completamente dimostrato.

Corollario 3.10. *$Q(\mathscr{E})$ è una categoria regolare e $\mathscr{R}_{\mathscr{E}}$ è la categoria delle relazioni su $Q(\mathscr{E})$.*

Proposizione 3.11. *In $Q(\mathscr{E})$ le relazioni d'equivalenza sono effettive.*

Dim. Sia (X, R) un oggetto di $Q(\mathscr{E})$ ed S una relazione d'equivalenza su (X, R) cioè una relazione di $\mathscr{E}$ su X tale che

$$S \supseteq R\,, \qquad S = S^{-1}\,, \qquad SS = S\,.$$

Se

$$(X, R) \xleftarrow{s_1} (E, T) \xrightarrow{s_2} (X, R)$$

è la decomposizione canonica di S in $Q(\mathscr{E})$, il quadrato

$$\begin{tikzcd}
(E,T) \arrow[r, "s_2"] \arrow[d, "s_1"'] & (X,R) \arrow[d, "s"] \\
(X,R) \arrow[r, "s"'] & (X,S)
\end{tikzcd}$$

è cartesiano in $Q(\mathscr{E})$ [si veda la dimostrazione della Proposizione 2.5 e la si riferisca alla categoria $Q(\mathscr{E})$].

Sia $\mathscr{F}\colon \mathrm{Rel}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Rel}(Q(\mathscr{E}))$ il funtore che associa al morfismo $\alpha\colon X \to Y$ di $\mathrm{Rel}(\mathscr{E})$ il morfismo $\mathscr{F}(\alpha)\colon (X, 1_X) \to (Y, 1_Y)$ di $\mathrm{Rel}(Q(\mathscr{E}))$ definito da α.

Proposizione 3.12. *$\mathscr{F}$ conserva l'inclusione, l'inversione, la decomposizione canonica e l'oggetto* $\mathbf{1}$.

Dim. Ovviamente $\mathscr{F}$ conserva l'inclusione e l'inversione; proviamo che conserva la decomposizione canonica; sia $\alpha\colon X \to Y$ un morfismo di $\mathrm{Rel}(\mathscr{E})$ e $X \xleftarrow{p} E \xrightarrow{q} Y$ la sua decomposizione canonica; sappiamo (Prop. 3.5) che $\mathscr{F}(\alpha)$ si decompone canonicamente in $Q(\mathscr{E})$

$$(X, 1_X) \xleftarrow{p} (E, T) \xrightarrow{q} (Y, 1_Y)$$

essendo $T = pp^{-1} \cap qq^{-1}$; proviamo quindi che $T = 1_E$; poichè $T \supseteq 1_E$ basterà provare che $T \subseteq 1_E$; siano $u_1^{-1}u_2$ e $v_1^{-1}v_2$ le decomposizioni canoniche rispettivamente di pp^{-1} e qq^{-1} e i e j le rispettive inclusioni nel prodotto $E \times E$ del quale siano p_1 e p_2 le proiezioni canoniche; sia inoltre $\pi_1^{-2}\pi_2$ la decomposizione canonica di ij^{-1}. T si decompone canonicamente al modo seguente:

$$E \xleftarrow{\pi_1 ip_1 = \pi_2 jp_1} \cdot \xrightarrow{\pi_1 ip_2 = \pi_2 jp_2} E$$

e si ha

$$\pi_1 ip_1 p = \pi_1 u_1 p = \pi_1 u_2 p = \pi_1 ip_2 p\,, \quad \pi_2 jp_1 q = \pi_2 v_1 q = \pi_2 v_2 q = \pi_2 jp_2 q;$$

allora

$$\pi_1 ip_1 = \pi_1 ip_2 \quad \text{e} \quad T = (\pi_1 ip_1)^{-1}(\pi_1 ip_2) = (\pi_1 ip_1)^{-1}(\pi_1 ip_1) \subseteq 1_E\,.$$

Infine $\mathscr{F}$ conserva l'oggetto $\mathbf{1}$ perchè abbiamo provato (Prop. 3.5) che l'oggetto $\mathbf{1}$ della categoria $\operatorname{Rel}(Q(\mathscr{E}))$ è $(\mathbf{1}, 1_1)$.

Corollario 3.13. *Il funtore* $F\colon \mathscr{E} \to Q(\mathscr{E})$ *indotto da* $\mathscr{F}$ *conserva i limiti proiettivi finiti e gli epimorfismi estremali.*

Dim. Segue dalla Proposizione 2.14.

Proposizione 3.14. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* $F\colon \mathscr{E} \to Q(\mathscr{E})$ *sia una equivalenza di categorie è che in* $\mathscr{E}$ *le relazioni d'equivalenza siano effettive.*

Dim. Sia $\mathscr{E}$ una categoria regolare con relazioni d'equivalenza effettive; per provare che F è un'equivalenza di categorie basterà mostrare che, assegnato un oggetto (X, R) di $Q(\mathscr{E})$, questo è isomorfo ad un oggetto $(Y, 1_Y)$. Sia $p_1^{-1}p_2$ la decomposizione canonica di R in $\mathscr{E}$ e sia $f\colon X \to Y$ il conucleo di (p_1, p_2); (p_1, p_2) è il prodotto fibrato di f per f e allora, poichè F conserva il prodotto fibrato e gli epimorfismi estremali, il quadrato:

$$\begin{tikzcd}
(E, 1_E) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & (X, 1_X) \arrow[d, "f"] \\
(X, 1_X) \arrow[r, "f"'] & (Y, 1_Y)
\end{tikzcd}$$

è cartesiano in $Q(\mathscr{E})$ e $f\colon (X, 1_X) \to (Y, 1_Y)$ è un epimorfismo estremale di $Q(\mathscr{E})$; allora il diagramma:

$$(E, 1_E) \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} (X, 1_X) \xrightarrow{f} (Y, 1_Y)$$

è esatto e poichè è esatto anche il diagramma

$$(E, 1_E) \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} (X, 1_X) \xrightarrow{R} (X, R)$$

ne segue che (X, R) è isomorfo a $(Y, 1_Y)$.

Viceversa, se $F\colon \mathscr{E} \to Q(\mathscr{E})$ è un'equivalenza di categorie, è immediato riconoscere che in $\mathscr{E}$ le relazioni d'equivalenza sono effettive.

Proviamo infine una proprietà di universalità per la categoria $Q(\mathscr{E})$ e precisamente dimostriamo la seguente:

Proposizione 3.15. *Se $\mathscr{E}$ è una categoria esatta e $G: \mathscr{E} \to \mathscr{C}$ è un qualunque funtore che conserva i limiti proiettivi finiti e gli epimorfismi estremali, esiste un funtore $\bar{G}: Q(\mathscr{E}) \to \mathscr{C}$ che rende commutativo il diagramma:*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & Q(\mathscr{E}) \arrow[dl, "\bar{G}"] \\ & \mathscr{C} & \end{tikzcd}$$

Esso conserva i limiti proiettivi finiti e gli epimorfismi estremali; se un funtore $Q(\mathscr{E}) \to \mathscr{C}$ gode delle stesse proprietà, esso è isomorfo a $\bar{G}$.

Dim. Consideriamo i funtori $\operatorname{Rel}(\mathscr{E}) \xrightarrow{\mathscr{F}} \operatorname{Rel}(Q(\mathscr{E}))$ e $\operatorname{Rel}(\mathscr{E}) \xrightarrow{\mathscr{G}} \operatorname{Rel}(\mathscr{C})$ individuati rispettivamente da F e da G; essi conservano l'inclusione, l'inversione, la decomposizione canonica e l'oggetto $\mathbf{1}$ (Prop. 2.14). Se R è una relazione d'equivalenza di $\operatorname{Rel}(\mathscr{E})$, $\mathscr{G}(R)$ è una relazione d'equivalenza di $\operatorname{Rel}(\mathscr{C})$. Definiamo un funtore $\bar{\mathscr{G}}: \operatorname{Rel}(Q(\mathscr{E})) \to \operatorname{Rel}(\mathscr{C})$: per ogni oggetto (X, R) di $\operatorname{Rel} Q((\mathscr{E}))$ poniamo $\bar{\mathscr{G}}((X, R)) = (\mathscr{G}(X), \mathscr{G}(R))$, essendo tale oggetto il quoziente in $\mathscr{C}$ (che penseremo identificata con $Q(\mathscr{C})$) della relazione d'equivalenza $\mathscr{G}(R)$; per ogni morfismo $(X, R) \xrightarrow{\alpha} (Y, S)$ di $\operatorname{Rel}(Q(\mathscr{E}))$, indicato con $\bar{\alpha}$ il morfismo di $\operatorname{Rel}(\mathscr{E})$ individuato da α, poniamo $\bar{\mathscr{G}}(\alpha)$ uguale al morfismo $(\mathscr{G}(X), \mathscr{G}(R)) \to (\mathscr{G}(Y), \mathscr{G}(S))$ di $\operatorname{Rel}(\mathscr{C})$ individuato da $\mathscr{G}(\bar{\alpha})$ (ciò è lecito poichè, essendo in $\operatorname{Rel}(\mathscr{E})$ $R\bar{\alpha}S = \bar{\alpha}$, è $\mathscr{G}(R)\,\mathscr{G}(\bar{\alpha})\,\mathscr{G}(S) = \mathscr{G}(\bar{\alpha})$). È immediato verificare che in tal modo si è ottenuto un funtore, che per esso è $\mathscr{F}\bar{\mathscr{G}} = \mathscr{G}$ e che conserva l'inclusione, l'inversione e l'oggetto $\mathbf{1}$; proviamo che esso conserva la decomposizione canonica; sia $(X, R) \xrightarrow{\alpha} (Y, S)$ un morfismo di $\operatorname{Rel}(Q(\mathscr{E}))$ e $p^{-1}q$ la decomposizione canonica del morfismo $X \xrightarrow{\bar{\alpha}} Y$ di $\operatorname{Rel}(\mathscr{E})$ individuato da α; $(pR)^{-1}(qS)$ è allora la decomposizione canonica di α in $Q(\mathscr{E})$ (Prop. 3.9); poichè $(\mathscr{G}(p))^{-1}\mathscr{G}(q)$ è la decomposizione canonica in $\mathscr{C}$ del morfismo $\mathscr{G}(\bar{\alpha})$,

$$(\mathscr{G}(p)\,\mathscr{G}(R))^{-1}(\mathscr{G}(q)\,\mathscr{G}(S)) = (\bar{\mathscr{G}}(pR))^{-1}\,\bar{\mathscr{G}}(qS)$$

è la decomposizione canonica in $\mathscr{C}$ di $\bar{\mathscr{G}}(\alpha)$.

Il funtore $\bar{G}: Q(\mathscr{E}) \to \mathscr{C}$ individuato da $\bar{\mathscr{G}}$ conserva i limiti proiettivi finiti e gli epimorfismi estremali. Completiamo la dimostrazione mostrando che, se un funtore H, che conserva i limiti proiettivi finiti e gli epimorfismi estremali, è tale che $FH = G$, esso è isomorfo a $\bar{G}$. Per ogni oggetto $(X, 1_X)$ di $Q(\mathscr{E})$ si ha ovviamente $H((X, 1_X)) = G(X)$; per ogni oggetto (X, R) di $Q(\mathscr{E})$, se $X \xleftarrow{p} E \xrightarrow{q} X$ è la decomposizione canonica di R in $\mathscr{E}$, poichè H conserva i limiti proiettivi finiti e gli epimorfismi estremali, il diagramma:

$$G(E) \underset{G(q)}{\overset{G(p)}{\rightrightarrows}} G(X) \xrightarrow{H(R)} H((X, R))$$

è esatto in $\mathscr{C}$; ne segue che $H((X, R))$ è isomorfo a $(G(X), G(R)) = \bar{G}((X, R))$. La funtorialità di tale isomorfismo si prova poi senza difficoltà.

* * *

Bibliografia.

[1] M. Barr, P. A. Grillet and D. H. van Osdol, *Exact Categories and Categories of Sheaves*, Lecture Notes in Mathematics, **236**, Springer-Verlag, Berlin 1971.

[2] F. W. Lawvere, *Theory of Categories over a Base Topos*, Ist. Mat. Univ. Perugia (1972-73).

* * *