Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 125-134

STEFANO MORTOLA (*)

# Topologie, bornologie e duali naturali per spazi vettoriali. (**)

**Introduzione.**

In questo lavoro vengono introdotti una topologia, una bornologia ed un duale (associati ad una relazione di dualità) che chiamiamo top-nat, bor-nat e duale-nat.

Dimostriamo che negli spazi funzionali più noti queste topologie, bornologie e duali risultano fra loro coerenti.

Proviamo inoltre che negli stessi spazi la top-nat, la bor-nat e il duale-nat risultano coincidenti con le topologie, bornologie e duali introdotti usualmente caso per caso con metodi apparentemente eterogenei.

Desidero precisare che le definizioni introdotte in questo lavoro mi sono state suggerite dal prof. E. DE GIORGI, durante la tesi di laurea di cui è stato relatore.

## 1. - Notazioni e richiami generali di analisi lineare.

Siano $F$ e $G$ due spazi vettoriali reali ed $s$ una forma bilineare su $F\times G$, tale che:

$$a)\ \text{se } f\neq 0, \quad f\in F, \quad \text{allora} \quad \exists g\in G\colon s(f,g)\neq 0,$$

$$b)\ \text{se } g\neq 0, \quad g\in G, \quad \text{allora} \quad \exists f\in F\colon s(f,g)\neq 0.$$

La terna $(F, G, s)$ viene detta *dualità*.

---

(*) Indirizzo: Scuola Normale Superiore, 56100 Pisa, Italia.

(**) Ricevuto: 3-VI-1974.

Se $M$ è un sottinsieme di $F$, per polare di $M$ rispetto alla $(F, G, s)$ si intende quel sottinsieme di $G$ formato dai $g$ tali che $|s(f, g)| \leqslant 1$ $\forall f \in M$ e viene denotato pol$(M)$; se $M$ fosse un sottinsieme di $G$, pol$(M)$ sarebbe il sottinsieme di $F$ definito in maniera simmetrica.

*Topologia debole su $F$* relativa alla $(F, G, s)$: è la topologia su $F$ avente come sistema fondamentale di intorni di $O$ i polari degli insiemi finiti di $G$; sarà denotata $\sigma(F, G)$. La topologia debole su $G$ verrà denotata $\sigma(G, F)$.

*Topologia di Mackey su $F$* relativa alla $(F, G, s)$: è la topologia su $F$ avente come sistema fondamentale di intorni di $O$ i polari dei dischi di $G$ compatti per la $\sigma(G, F)$; ricordiamo che un sottinsieme $A$ di uno spazio vettoriale si dice «disco» se è convesso ed è tale che per ogni $\lambda \in R$ con $|\lambda| \leqslant 1$: $\lambda A \subseteq A$.

La topologia di MACKEY su $F$ sarà denotata $\mu(F, G)$.

Una *topologia* loc. conv. su $F$ si dice *compatibile* con la dualità $(F, G, s)$ se il duale topologico di $F$ è identificabile a $G$, tramite la canonica identificazione di $G$ ad un sottospazio di $F^*$. Si dimostra che tutte e solo le topologie loc. conv. su $F$ compatibili con la $(F, G, s)$ sono quelle più fini della $\sigma(F, G)$ e meno fini della $\mu(F, G)$.

*Bornologia vettoriale su uno spazio vettoriale $F$*: è una famiglia di sottinsiemi di $F$ ereditaria (cioè se ci sta un insieme $A$ ci stanno anche i sottinsiemi di $A$), stabile per unione finita e contenente i punti di $F$, inoltre se $A$ e $B$ sono due suoi elementi, anche $A + B$, $\lambda A$ (per ogni $\lambda > 0$) e $\bigcup_{|\varrho| \leqslant 1} \varrho A$ sono suoi elementi.

Se $(F, \tau)$ è uno sp. vett. top., un *sottinsieme* $A$ di $F$ si dice *limitato* se per ogni $V$ intorno di $O$ in $(F, \tau)$ $\exists \lambda \in R$ tale che $A \subseteq \lambda V$. La famiglia di tutti i limitati di $(F, \tau)$ è una bornologia vettoriale su $F$, che denoteremo bor$(\tau)$.

Se $\beta$ è una bornologia vett. su $F$ l'insieme dei dischi di $F$ assorbenti ogni $L \in \beta$ (cioè l'insieme dei dischi $V$ tali che $\forall L \in \beta$ $\exists \lambda \in R$: $L \subseteq \lambda V$) costituisce un sistema fondamentale di intorni di $O$ per una topologia vett. su $F$ che denoteremo top$(\beta)$.

Uno s.v.t. $(F, \tau)$ si dice *bornologico* se $\tau$ è loc. conv. e se ogni disco assorbente tutti i limitati di $(F, \tau)$ è un intorno dello $O$. Se $\tau$ è una topologia bornologica allora si ha: $\tau = \text{top}(\text{bor}(\tau))$.

*Topologia forte su $F$* relativa alla $(F, G, s)$: è la topologia su $F$ avente come sistema fondamentale di intorni dello $O$ i polari dei sottinsiemi di $G$ limitati per la $\sigma(G, F)$; questa topologia sarà denotata $\beta(F, G)$.

Uno s.v.t. $(F, \tau)$ si dice *tonnelé* se ogni suo tonneau (cioè disco chiuso assorbente i punti) è un intorno dello $O$.

*Spazio di Fréchet*: è uno s.v.t. loc. conv. metrizzabile e completo. Per *spazio LF* si intende un limite induttivo loc. conv. di una successione crescente di spazi $(E_n, \tau_n)$ di FRÉCHET tale che per ogni $n$, $\tau_{n+1}$ ristretta ad $E_n$ coincida con $\tau_n$.

Uno s.v.t. si dice *quasi completo* se ogni suo sottinsieme chiuso e limitato risulta completo.

In uno spazio topologico $X$ la *chiusura successionale* di un sottinsieme $A$ è definita come il più piccolo insieme chiuso per successioni contenente $A$.

## 2. - Risultati utilizzati nelle dimostrazioni.

(In questo paragrafo elenchiamo tutti i risultati che saranno sfruttati nelle dimostrazioni del paragrafo successivo: per la dimostrazione di questi enunciati si rimanda ad un qualsiasi libro su spazi vettoriali topologici.)

Un sottinsieme $A$ di uno s.v.t. è limitato se ogni sua successione è limitata.

Un sistema fondamentale di intorni di $O$ per la $\beta(F, G)$ è formato dai tonneaux di $\sigma(F, G)$.

Se $(F, \tau)$ è tonnelé e $F'$ ne è il duale topologico, allora $F'$ è successionalmente chiuso nella $\sigma(F^*, F)$, ove $F^*$ denota il duale algebrico di $F$.

Se $(F, \tau)$ è bornologico allora $\tau = \mu(F, F')$; se è tonnelé allora $\tau = \mu(F, F') = \beta(F, F')$.

Un sottoinsieme $H$ del duale $F'$ di uno s.v.t. $(F, \tau)$ si dice equicontinuo se è contenuto nel polare di un opportuno intorno di $O$ di $\tau$; se $(F, \tau)$ è tonnelé gli insiemi equicontinui di $F'$ sono tutti e soli gli insiemi limitati per la $\sigma(F', F)$; se $(F, \tau)$ è separabile la topologia $\sigma(F', F)$ induce su ogni insieme equicontinuo di $F'$ una topologia metrizzabile.

Uno spazio di FRÉCHET o $LF$ è tonnelé e bornologico; uno spazio bornologico e quasi completo è tonnelé.

Uno spazio di FRÉCHET ha la seguente proprietà:

se $Q$ è un sottospazio di $F'$, tale che per ogni $U$ intorno di $O$ di $(F, \tau)$ l'insieme $Q \cap \mathrm{pol}(U)$ è chiuso in $\sigma(F', F)$, allora $Q$ è chiuso in $\sigma(F', F)$.

Se $M$ è un sottinsieme di $F$, $\mathrm{pol}(M)$ è un disco chiuso in $\sigma(G, F)$.

Le topologie su $F$ compatibili con la dualità $(F, G, s)$ hanno tutte la stessa famiglia di insiemi limitati, che si possono pertanto chiamare limitati di $F$ rispetto alla $(F, G, s)$, e precisamente sono quei sottinsiemi $L$ di $F$ tali che per ogni $g \in G$ $\exists \lambda \in R$: $|s(f, g)| < \lambda$ per ogni $f \in L$.

Se $E$ è uno spazio di BANACH e $F$ è un $LF$, ogni applicazione lineare $u: E \to F$ avente il grafico chiuso in $E \times F$ è continua.

Se un sottospazio $Q$ di $F$ è denso per la $\sigma(F, G)$, allora è denso per ogni altra topologia su $F$ compatibile con la $(F, G, s)$.

**3. - Definizione della topologia naturale, della bornologia e del duale naturale.**

Def. 1. *Topologia naturale di $F$.*

Se $F$ è un generico spazio vettoriale, per topologia naturale di $F$ relativa ad una data dualità $(F, G, s)$ intendiamo la topologia $\beta(F, G)$ cioè quella che ha come sistema fondamentale di intorni di $O$ la famiglia dei polari degli insiemi di $G$ limitati per la $(F, G, s)$.

Si osservi che in generale la topologia $\beta(F, G)$ è strettamente più fine della topologia di MACKEY $\mu(F, G)$, e quindi può non essere compatibile con la dualità $(F, G, s)$.

Def. 2. *Bornologia naturale di $F$.*

Per bornologia naturale di $F$ intendiamo la bornologia avente per limitat quei sottinsiemi $T$ di $F$ tali che per ogni successione $\{f_n\}$ in $T$ e per ogni successione $\{a_n\}$ in $R$ con $\sum_1^\infty |a_n| < +\infty$ la serie $\sum_1^\infty a_n f_n$ converga in $\sigma(F, G)$.

È semplice verificare che la bornologia sopra definita è una bornologia vettoriale.

Def. 3. *Duale naturale di $F$.*

Per duale naturale di $F$ intendiamo il sottospazio di $F^*$ chiusura successionale di $G$ nella $\sigma(F^*, F)$, quando $G$ è pensato come sottospazio di $F^*$.

I tre concetti sopra definiti saranno denotati rispettivamente top-nat $(F, s)$, bor-nat $(F, s)$ e duale-nat $(F, s)$.

**4. - Relazioni fra i tre concetti introdotti.**

Teor. 1. *Bor-nat $(F, s) \subseteq$ **bor** ((top-nat $(F, s)$)*.

Dim. Sia $T$ un limitato naturale cioè un elemento di bor-nat $(F, s)$; vogliamo mostrare che $T$ è un limitato di top-nat $(F)$. Sia $\{f_n\}$ una generica successione in $T$: per dimostrare la tesi del teorema ci basta far vedere che $\{f_n\}$ è un insieme limitato in top-nat $(F)$. Fissato un tonneau $V$ di $\sigma(F, G)$, esisterà $\{a_n\}$ con $\sum_1^\infty a_n \leqslant 1$ e $a_n > 0$ tale che se per ogni $n$ $|\lambda_n| \leqslant a_n$ allora $\sum_1^\infty \lambda_n f_n \in V$ (la somma va intesa in $\sigma(F, G)$): infatti $V/2^n$ è un disco assorbente di $F$ quindi $\exists a_n > 0$ tale che $\lambda_n f_n \in V/2^n$ se $|\lambda_n| \leqslant a_n$ e si può imporre che sia $\sum_1^\infty a_n \leqslant 1$. Ma allora si ha:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n \in V/2 + V/4 + \ldots + V/2^n \subseteq V$$

per ogni $n$ e quindi sapendo che $\sum_1^\infty \lambda_n f_n$ converge in $\sigma(F, G)$ e che $V$ è chiuso in questa topologia, si ha che $\sum_1^\infty \lambda_n f_n \in V$. Dopo aver osservato questo, se $f_n$ non fosse limitato in top-nat $(F)$ esisterebbe $x' \in (F, \text{top-nat})'$ tale che $\{x'(f_n)\}$ è illimitato in $R$; ora, per la continuità di $x'$, $\exists V$ tonneau di $\sigma(F, G)$ tale che $|x'(v)| \leqslant 1$ $\forall v \in V$, e sappiamo che in corrispondenza di $V$ troviamo $\{a_n\}$ tale che $\sum \lambda_n f_n \in V$ se $|\lambda_n| \leqslant a_n$. Ma $\{x'(f_n)\}$ è illimitato quindi possiamo trovare una sottosuccessione $\{f_n'\}$ di $\{f_n\}$ ed una $\{\lambda_n\}$ con $|\lambda_n| \leqslant a_n$ tale che $\sum_1^\infty \lambda_n x'(f_n') =$ $= +\infty$. In conclusione:

$$|x'(\sum_1^N \lambda_n f_n')| = |\sum_1^N \lambda_n x'(f_n')| \leqslant 1 \qquad \text{per ogni } N \qquad \text{e} \qquad \sum_1^\infty \lambda_n x'(f_n') = +\infty,$$

il che è assurdo.

Teor. 2. *Se lo spazio $F$ munito della propria* top-nat *è successionalmente completo, allora* bor-nat $(F, s) =$ bor (top-nat $(F, s)$).

Dim. Ci basta dimostrare che se $T$ è limitato per la top-nat $(F)$ allora $T \in$ bor-nat $(F)$. Se $\{f_n\}$ è una generica successione in $T$, per ogni $V$ disco intorno di $O$ in top-nat $(F)$ esisterà $\varrho > O$ tale che $\{f_n\} \subseteq \varrho V$. Questo comporta che per ogni $\{a_n\}$ sommabile in $R$, la successione $\{\sum_1^N a_n f_n\}_N$ è di CAUCHY per la top-nat $(F)$ dato che $\exists N_0$ tale che $\sum_{N_0}^{N+p} a_n f_n \subseteq \varrho V \cdot \sum_N^{N+p} a_n \subseteq V$ se $N \geqslant N_0$ e $p \geqslant O$. Quindi $\sum_1^\infty a_n f_n$ converge in top-nat $(F)$ e, a maggior ragione, converge in $\sigma(F, G)$.

Teor. 3. *Se $F$, munito della sua* top-nat, *risulta uno spazio tonnelé e separabile allora: duale-nat $(F, s) = (F$, top-nat$)'$.*

Dim. Dalla sola ipotesi su top-nat $(F)$ di essere tonnelé ne segue che $(F$, top-nat$)'$ è chiuso per successioni nella $\sigma(F^*, F)$, e quindi $(F$, top-nat$)' \supseteq$ duale-nat $(F)$. Per dimostrare l'inclusione opposta sfruttiamo il seguente Lemma:

Lemma. $(F, \text{top-nat})'$ *è il sottospazio di* $F^*$ *formato dai limiti di* nat *limitati per la* $\sigma(G, F)$ *secondo la topologia* $\sigma(F^*, F)$.

Infatti: un elemento $\eta$ di $F^*$ sta in $(F, \text{top-nat})'$ se e solo se $\exists$ un insieme $V$ polare di un disco $T$ limitato per la $\sigma(G, F)$, tale che $|\eta(v)| \leqslant 1 \ \ \forall v \in V$, cioè tale che $\eta \in \text{pol}(V)$ nella $(F, F^*)$. Considerando poi che $\text{pol}(V) = \text{pol}(\text{pol}(T)) =$ $=$ chiusura di $T$ in $\sigma(F^*, F) =$ limiti di net di elementi di $T$ in $\sigma(F^*, F)$, si ha la tesi del lemma.

Per concludere la dimostrazione del Teor. 3 basta ricordare che la topologia debole ristretta agli insiemi limitati del duale di uno spazio tonnelé e separabile è una topologia metrizzabile, quindi i limiti di net limitati sono anche limiti di successioni di elementi di $G$ e perciò appartengono al duale-nat $(F)$.

Cor. *Se* $F$ *con la sua* top-nat *è bornologico, quasi completo e separabile allora:*

$$\text{top-nat}(F) = \text{top}(\text{bor-nat}(F)) = \mu(F, \text{duale-nat}(F)) .$$

Dim. La prima uguaglianza segue dal Teorema 2 e dal fatto che se una topologia $\tau$ è bornologica allora $\tau = \text{top}(\text{bor}\,\tau)$. L'uguaglianza fra top-nat $(F)$ e $\mu(F, \text{duale-nat}(F))$ segue dal Teor. 3 e dal fatto che uno spazio bornologico quasi completo è tonnelé e la sua topologia coincide con quella di MACKEY.

Teor. 4. *Se* $F$ *è munito di una topologia di Fréchet più fine di* $\sigma(F, G)$ *e separabile, allora il duale topologico di* $F$ *coincide con il duale naturale.*

Dim. Sia $\tau$ la topologia di FRÉCHET di $F$; l'inclusione di duale-nat $(F)$ in $(F, \tau)'$ segue dal fatto che $\tau$ è tonnelé e quindi $(F, \tau)'$ è successionalmente chiuso in $F^*$ per la $\sigma(F^*, F)$. È poi ovvio che duale-nat $(F)$ è debolmente denso in $F'$; mostriamo che è anche debolmente chiuso. A tal scopo, dato che $\tau$ è di FRÉCHET, basta far vedere che per ogni $U$ intorno di $O$ in $\tau$ l'insieme duale-nat $(F) \cap \text{pol}(U)$ è deb. chiuso in $F'$: ma su $\text{pol}(U)$ la $\sigma(F', F)$ è metrizzabile, quindi duale-nat $(F) \cap \text{pol}(U)$ non è solo chiuso successionalmente in $\text{pol}(U)$, bensì è proprio un chiuso di $\text{pol}(U)$ che a sua volta è deb. chiuso in $F'$: in definitiva duale-nat $\cap\, \text{pol}(U)$ risulta deb. chiuso in $F'$.

Teor. 5. *Se* $F$ *è munito di una topologia* $\tau$ *di Fréchet o LF, più fine della* $\sigma(F, G)$, *allora* $\text{bor-nat}(F, s) = \text{bor}(\tau)$.

Dim. Se $\{f_n\}$ è una generica successione limitata per la $\tau$ e $\{a_n\}$ è sommabile in $R$, è subito visto che la successione $\sum_1^N a_n f_n$ è di CAUCHY per la $\tau$

quindi converge in $(F, \tau)$ e a maggior ragione in $\sigma(F, G)$: questo significa che ogni limitato per la $\tau$ sta in bor-nat $(F)$.

Viceversa: sia $L$ un limitato naturale di $F$; ci basta mostrare che ogni successione $\{f_n\}$ di $L$ è un limitato di $(F, \tau)$. Per ogni $g \in G$ l'insieme $\{s(f_n, g)\}$ è limitato in $R$: in caso contrario infatti sarebbe facile trovare una successione $\{a_n\}$ sommabile tale che $\sum_1^\infty a_n s(f_n, g)$ non converga.

Consideriamo ora l'applicazione lineare da $\ell^1$ in $F$ che associa ad $(a_n) \in \ell^1$ l'elemento $\sum_1^\infty a_n f_n \in F$ (la somma è fatta in $\sigma(F, G)$ ove converge dato che $L \in$ bor-nat $(F)$). Dimostriamo che questa applicazione (chiamiamola $\lambda$) è continua: è sufficiente far vedere che ha il grafico chiuso in $\ell^1 \times F$, dato che $\ell^1$ è un BANACH e $F$ è un $LF$. Sia dunque $\{a_n^m\}_m$ una successione di $\ell^1$ convergente a $O$ e la successione delle immagini converga a $h \in F$: mostriamo che $h = 0$. Se $b_m = (a_n^m)$, si ha: $\lambda(b_m) = \sum_{n=1}^\infty a_n^m f_n$, e per ogni $g \in G$ risulta $|s(\lambda(b_m), g)| \leqslant \leqslant k(g) \cdot \sum_{n=1}^\infty |a_n^m| \to O$ per $m \to +\infty$ perchè $\sum_{n=1}^\infty |a_n^m| = \|b_m\|$ e questa tende a $O$. Dunque $\lambda(b_m)$ converge a $O$ in $\sigma(F, G)$ e converge ad $h$ in $(F, \tau)$, ma dato che $\tau$ è più fine di $\sigma(F, G)$ ne segue che $h = 0$ e quindi $\lambda$ è continua. Ora se per assurdo $\{f_n\}$ non fosse limitata per la $\tau$ esisterebbe $x' \in (F, \tau)'$ con $\{x'(f_n)\}$ illimitato in $R$, e di conseguenza esisterebbe un $b \in \ell^1$ tale che $\sum_{n=1}^\infty a_n x'(f_n) = +\infty$ $(b = (a_n))$, ma ciò è assurdo in quanto $x'\lambda : \ell^1 \to R$ è continua, quindi trasforma limitati di $\ell^1$ in limitati di $R$, e in particolare l'insieme delle troncate $t_k$ di $b$, cioè $t_k = (a_1, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots)$ deve essere portato in un limitato di $R$, dunque per ogni $k$

$$\left|\sum_{n=1}^k a_n x'(f_n)\right| = |x' \circ \lambda(t_k)| \leqslant M ,$$

in contrasto con $\sum_{nn=1}^\infty a_n x'(f_n) = +\infty$.

Teor. 6. *$F$ sia munito di una topologia $\tau$ tonnelé più fine della $\sigma(F, G)$ ed abbia un sistema fondamentale di intorni di $O$ formato da dischi chiusi per la $\sigma(F, G)$. Allora $\tau =$ top-nat $(F, s)$.*

Dim. Essendo $\tau$ una topologia tonnelé, coincide con $\beta(F, F')$, che è più fine di $\beta(F, G)$ dato che $F' \supseteq G$: dunque si ha che top-nat $(F) \leqslant \tau$. Viceversa, fissiamo un intorno $V$ in $\tau$ che sia un disco chiuso per la $\sigma(F, G)$: $V$ risulta un tonneau di $\sigma(F, G)$ e quindi un intorno di $O$ in $\beta(F, G)$ cioè in top-nat $(F)$.

Cor. $(F, \tau)$ *sia uno spazio di* Banach *riflessivo e $\tau$ sia più fine della* $\sigma(F, G)$. *Allora* $\tau = $ *top-nat* $(F)$.

Dim. Mostriamo che la palla unitaria di $F$ $(= \{f \in F \mid \|f\| \leq 1\})$ e quindi tutte le omotetiche, è chiusa in $\sigma(F, G)$. A tal scopo basta osservare che $G$ è denso in $F'$ munito della $\beta(F', F)$ dato che la topologia $\beta(F', F)$ è compatibile con la dualità $(F', F)$, essendo $\tau$ riflessiva. Ma allora è subito visto che $G$ separa la palla unitaria di $F$ dai punti esterni alla palla (cioè per ogni $f \in F$ con $\|f\| > 1$ $\exists g \in G$ tale che $s(f, g) > 1$ e $s(h, g) < 1$, $h$ appartenente alla palla), e questa proprietà di $G$ equivale a dire che la palla è chiusa in $\sigma(F, G)$.

## 5. - Applicazioni ed esempi.

Supponiamo ora che $F$ sia uno spazio vettoriale di funzioni reali definite su un insieme $X$, e $G$ denoti quel sottospazio di $F^*$ formato dalle combinazioni lineari finite di delta di Dirac (cioè di quei funzionali $\delta_x$ che associano alla funzione $f$ il numero $f(x)$). La forma bilineare $s$ sarà ovviamente quella indotta dalla dualità $(F, F^*)$.

*a*) Prendiamo come spazio *$F$ lo spazio* $C_0(R^n)$ formato dalle funzioni continue a supporto compatto definite su $R^n$.

La topologia standard di questo spazio vettoriale è quella di limite induttivo loc. conv. della successione di spazi di Banach $C(K_m)$, ove $K_m$ è una successione di compatti invadenti $R^n$ e $C(K_m)$ è il sottospazio di $C_0(R^n)$ formato dalle funzioni aventi supporto in $K_m$, munito della norma dell'estremo superiore del valore assoluto.

È facile verificare che un sistema fondamentale di intorni di $O$ in $C_0(R^n)$ è formato dai dischi:

$$V_{p(x)} = \{f \in C_0 \mid |f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in R^n\}$$

al variare di $p(x)$ tra le funzioni continue strettamente positive da $R^n$ in $R$. Questi dischi risultano chiusi in $\sigma(C_0, G)$ (basta osservare che $V_{p(x)}$ è l'intersezione degli insiemi $\{f \in C_0 \mid |f(x)| \leq p(x)\}$ al variare di $x$ in $R^n$ ed ognuno di questi insiemi è chiuso essendo la contrimmagine secondo la $\delta_x$ dell'intervallo $[-p(x), p(x)]$).

Considerando poi che $C_0$ è tonnelé in quanto $LF$, risultano verificate le ipotesi del Teor. 6 e possiamo concludere che top-nat $(C_0)$ coincide con la topologia di $C_0$. Sfruttando poi il fatto che $C_0$ è separabile, il Teor. 3 ci garantisce che il duale topologico di $C_0$ coincide con il duale-nat $(C_0)$. Infine la coincidenza fra la bornologia standard di $C_0$ e la bor-nat $(C_0)$ è assicurata dal Teor. 5.

*b*) Prendiamo ora come spazio $F$ *lo spazio* $C^k(R^n)$ formato dalle funzioni $k$-volte derivabili con continuità, con $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Generalmente questo spazio è munito di una topologia di FRÉCHET avente il seguente sistema fondamentale di $O$:

$$V_{m,\varepsilon} = \{f \in C^k(R^n) \mid \sup |f^{(i)}(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall x \in K_m, \ i = 0, 1, \ldots, k\}$$

al variare di $m$ ed $\varepsilon$. Se $K_m$ denota la sfera di $R^n$ di centro l'origine e raggio $m$, non è difficile verificare che gli insiemi $V_{m,\varepsilon}$ sono dei dischi chiusi per la $\sigma(C^k, G)$, e si può pertanto concludere, grazie al Teor. 6, che la topologia di $C^k(R^n)$ coincide con top-nat $(C^k)$.

Dato che $C^k$ è uno spazio di FRÉCHET separabile, il Teor. 4 ci dice che il duale di $C^k$ è il duale-nat $(C^k)$ e il Teor. 5 assicura che i limitati di $C^k$ sono i limitati naturali.

*c*) Anche lo spazio di SCHWARTZ $\mathscr{S}(R^n)$ delle funzioni aventi derivate rapidamente decrescenti, munito della sua solita topologia di FRÉCHET, e così pure lo spazio $C_0^\infty(R^n)$ delle funzioni indefinitamente derivabili a supporto compatto, munito della sua solita topologia di limite ind. loc. conv. soddisfano le ipotesi del Teor, 6, quindi anche per questi spazi si ha la coincidenza fra le loro topologie usuali e le rispettive topologie naturali.

Anche gli spazi $H^{k,p}(R^n)$ formati dalle funzioni di $L^p(R^n)$ aventi tutte le derivate deboli fino all'ordine $k$ in $L^p$, tutte le volte che gli indici $k$ e $p$ sono tali da avere una immersione continua da $H^{k,p}$ in $C^0(R^n)$ e inoltre $p$ sia diverso da 1 e da $+\infty$ (in modo che $H^{k,p}$ risulti riflessivo), forniscono esempi di coincidenza tra topologie naturali e le topologie standard (grazie al Cor. al Teor. 6).

Finora si è solo considerato il caso di dualità tra uno spazio di funzioni e lo spazio generato dalle delta di DIRAC; consideriamo ora un altro tipo di dualità: e precisamente $F$ sia un sottospazio vettoriale di $L^1_{\text{loc}}(R^n)$, $G$ denoti lo spazio $C_0^\infty(R^n)$ ed $s$ è la forma bilineare definita dall'integrale di LEBESGUE: $s(f, g) = \int_{R^n} f(x) g(x) \,dx$.

*d*) Prendiamo come spazio $F$ lo spazio $L^p(R^n)$ con $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Osserviamo innanzitutto che la topologia indotta dalla norma su $L^p$ è più fine della $\sigma(L^p, G)$ e quindi per ogni $p$ diverso da 1 e da $+\infty$ la topologia di $L^p$ coincide con top-nat $(L^p)$, per il Cor. al Teor. 6. Comunque anche nei due casi eccezionali di $p = 1$ e $p = +\infty$ è facile mostrare direttamente che le palle unitarie risultano chiuse in $\sigma(L^p, G)$ e quindi è applicabile il Teor. 6.

Se è $p < \infty$ lo spazio $L^p$ è separabile e quindi per il Teor. 4 il duale di $L^p$ coincide con il duale-nat $(L^p)$. Nel caso invece di $L^\infty$ il duale naturale è strettamente contenuto nel duale topologico.

*e*) Sia ora $F$ lo spazio $H^{k,p}(R^n)$ con $1 \leqslant k < \infty$ e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Lo spazio $H^{k,p}$ con la norma $\|f\|_{k,p}^p = \sup\{\int_{R^n} |\partial^\alpha f|^p; |\alpha| \leqslant k\}$ se $p < \infty$ e con la norma $\|f\|_{k,\infty} = \sup\{\|\partial^\alpha f\|_\infty; |\alpha| \leqslant k\}$ se $p = +\infty$ risulta uno spazio di BANACH riflessivo se $p \neq 1$ e $p \neq \infty$ e quindi in tali casi la topologia della norma coincide con la naturale. Nei rimanenti due casi di non riflessività si riesce lo stesso a mostrare che $H^{k,p}$ soddisfa le ipotesi del Teor. 6: la palla unitaria di $H^{k,p}$ è chiusa in $\sigma(H^{k,p}, G)$ in quanto se $\{f_i\}$ è un net di funzioni della palla convergente a $f$ in $\sigma(H^{k,p}, G)$ ne segue che per ogni $\alpha$ con $|\alpha| \leqslant k$, $\partial^\alpha f_i \to \partial^\alpha f$ in $\sigma(L^p, G)$ e quindi sfruttando che la palla unitaria di $L^p$ è chiusa in $\sigma(L^p, G)$ ho che $f$ appartiene alla palla unitaria di $H^{k,p}$.

## Bibliografia.


H. HOGBE NIEND. *Theorie des bornologies et applications*, Springer Verlag, New York 1971.

J. HORVATH, *Topological Vector Spaces and Distributions*, Addison-Wesley, Reading Mass. 1966.

H. JACQUET, *Espaces Vectoriels Topologiques et Bornologiques*, Springer-Verlag, New York 1972.

H. H. SCHAEFER, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag. New York, 1970.

L. WAELBROECK, *Topological Vector Spaces and Algebras*, Springer Verlag. New York 1971.


* * *