Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 97-111

BRUNO D'AMORE (*)

Sulle trasformazioni puntuali fra tre piani proiettivi che subordinano tra le coppie di tali piani trasformazioni puntuali di seconda specie. (**)

1. – Alcuni anni fa, il VILLA ha iniziato lo studio delle trasformazioni puntuali $\mathscr{C}$ fra tre piani proiettivi π_1, π_2, π_3 in una terna regolare di punti corrispondenti O_1, O_2, O_3 (1). Nel presente lavoro si considerano trasformazioni puntuali fra tre piani proiettivi che subordinano tra le coppie di tali piani trasformazioni puntuali di seconda specie.

2. – Sia $\mathscr{C}$ una trasformazione puntuale fra tre piani proiettivi π_1, π_2, π_3 ed O_1, O_2, O_3 una terna regolare di punti corrispondenti in $\mathscr{C}$. Assumiamo O_1, O_2, O_3 come origini delle coordinate proiettive non omogenee x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2 rispettivamente su π_1, π_2, π_3. Quando sarà comodo, indicheremo con q_1 e q_2 le coordinate sul piano π_q $(q = 1, 2, 3)$ e quindi q_1 e q_2 indicheranno x_1, x_2 se $q = 1$; y_1, y_2 se $q = 2$; z_1, z_2 se $q = 3$.

Le equazioni della $\mathscr{C}$ assumono la forma:

$$z_1 = f_1(x_1, x_2; y_1, y_2), \qquad z_2 = f_2(x_1, x_2; y_1, y_2) \tag{1}$$

ove le f_1, f_2 si suppongano sviluppabili in serie di potenze nell'intorno dei punti O_1, O_2.

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria, Porta S. Donato, 40127 Bologna, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. - Ricevuto: 23-XI-1973.

(1) M. VILLA, *Sulle corrispondenze fra tre piani*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **71** (1966), 351.

Detta ω_i la proiettività che la trasformazione puntuale T_i subordina fra i fasci di direzioni di centri O_h, O_k $(i, h, k = 1, 2, 3;\ i \neq h,\ i \neq k,\ h \neq k)$ ed assumendo come rette $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_1 = z_2$ le rette rispettivamente corrispondenti delle rette $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = x_2$ nella ω_2 e come rette $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_1 = y_2$ le rette rispettivamente corrispondenti delle rette $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_1 = z_2$ nella ω_1 (²), le equazioni della $\mathscr{C}$ diventano:

$$(2) \quad \begin{cases} z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 + A_1(x_1, x_2) + B_1(y_1, y_2) + C_1(x_1, x_2; y_1, y_2) + [\mathbf{3}] \\ z_2 = \alpha x_2 + \beta y_2 + A_2(x_1, x_2) + B_2(y_1, y_2) + C_2(x_1, x_2; y_1, y_2) + [\mathbf{3}] , \end{cases}$$

avendo posto:

$$A_j(x_1, x_2) = \sum_{r,s} a^j_{rs} x_r x_s ,$$

$$B_j(y_1, y_2) = \sum_{r,s} b^j_{rs} y_r y_s ,$$

$$C_j(x_1, x_2; y_1, y_2) = \sum_{r,s} c^j_{rs} x_r y_s ,$$

con $a_{rs} = a_{sr}$, $b_{rs} = b_{sr}$, $\alpha\beta \neq 0$, $j, r, s = 1, 2$ ed avendo indicato con $[\mathbf{3}]$ i termini di grado superiore al secondo.

Per la scelta fatta dei sistemi di riferimento, la terna σ_{1q} di direzioni caratteristiche $(q_2 = p_i q_1,\ i = 1, 2, 3)$ della $\mathscr{C}$ per O_q i cui E_2 relativi di flesso stanno su π_1, è data dall'equazione:

$$(3) \qquad 2\beta[pA_1(1, p) - A_2(1, p)] - \alpha[pC_1(1, p; 1, p) - C_2(1, p; 1, p)] = 0 ;$$

la terna σ_{2q} di direzioni caratteristiche della $\mathscr{C}$ per O_q i cui E_2 relativi di flesso stanno su π_2 è data dall'equazione:

$$(4) \qquad 2\alpha[pB_1(1, p) - B_2(1, p)] - \beta[pC_1(1, p;\ 1, p) - C_2\ (1, p;\ 1, p)] = 0;$$

la terna σ_{3q} di direzioni caratteristiche della $\mathscr{C}$ per O_q i cui E_2 relativi di flesso stanno su π_3 è data dall'equazione:

$$(5) \qquad pC_1(1, p; 1, p) - C_2(1, p; 1, p) = 0 .$$

(²) Con tale scelta dei sistemi di riferimento, una terna di direzioni corrispondenti in $\mathscr{C}$ è data da $q_2 = pq_1$.

Supporremo che le trasformazioni puntuali T_i siano tutte con due direzioni caratteristiche coincidenti [3] ed indicheremo con τ_d^i, τ_s^i sia la terna di direzioni corrispondenti in $\mathscr{C}$ individuata dalle direzioni caratteristiche rispettivamente doppia e semplice di T_i, sia le direzioni di tali terne per O_q.

3. – In questo numero supporremo che le τ_d^i siano coincidenti e costituiscano una terna τ. Dimostreremo che, *nelle ipotesi poste, la direzione* τ *per* O_q *è una direzione caratteristica della* $\mathscr{C}$ *di* 3° *tipo doppia per ciascuna delle terne* σ_{iq} *e che se inoltre* $\tau_s^i \equiv \tau_s^h$ *allora le direzioni di primo tipo delle* σ_{iq} *e* σ_{hq} *sono separate armonicamente da* τ_s^k *e* $\tau_s^i \equiv \tau_s^h$ $(i, h, k = 1, 2, 3$ fissati $i \neq h,\ i \neq k,\ h \neq k)$.

Infatti, se $q_2 = mq_1$ rappresenta la direzione τ e $q_2 = m_i q_1$ la direzione τ_s^i per O_q, allora le (3), (4), (5) diventano:

$$(6)\qquad (p-m)^2[(2\beta^2 a_{22}^1 - \alpha\beta c_{22}^1)p + {} + (\alpha\beta c_{22}^1 - \alpha^2 b_{22}^1 - \beta^2 a_{22}^1)m_3 + \alpha^2 b_{22}^1 m_1 - \beta^2 a_{22}^1 m_2] = 0\ .$$

$$(7)\qquad (p-m)^2[(2\alpha^2 b_{22}^1 - \alpha\beta c_{22}^1)p + {} + (\alpha\beta c_{22}^1 - \alpha^2 b_{22}^1 - \beta^2 a_{22}^1)m_3 - \alpha^2 b_{22}^1 m_1 + \beta^2 a_{22}^1 m_2] = 0\ ,$$

$$(8)\qquad (p-m)^2[\alpha\beta c_{22}^1 p - (\alpha\beta c_{22}^1 - \alpha^2 b_{22}^1 - \beta^2 a_{22}^1)m_3 - \alpha^2 b_{22}^1 m_1 - \beta^2 a_{22}^1 m_2] = 0\ ,$$

e ciò dimostra che $q_2 = mq_1$ rappresenta una direzione per O_q caratteristica della $\mathscr{C}$ di 3° tipo e doppia per tutte e tre le terne σ_{iq}. Indicando con $q_2 = p_i q_1$ la direzione t_i per O_q semplice della σ_{iq}, si verifica subito che se $\tau_s^i \equiv \tau_s^h$ cioè se $m_i = m_h$ allora le direzioni t_i, t_h sono separate armonicamente da $\tau_s^i \equiv \tau_s^h$ e τ_s^k [4].

---

[3] M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali con direzioni caratteristiche coincidenti,* (I), Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A (3) **78** (1944-1945), 321-335.

M. VILLA, *Un fascio di quartiche collegato alle trasformazioni puntuali,* Boll. Un. Mat. Ital. (3) **3** (1948), 8-15.

[4] Il caso in cui è $\tau_d^1 \equiv \tau_d^2 \equiv \tau_d^3$ e $\tau_s^1 \equiv \tau_s^2 \equiv \tau_s^3$ è già stato considerato:

C. TINAGLIA, *Alcune osservazioni sulle trasformazioni puntuali fra tre piani proiettivi,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **6** (1972), 248-255.

C. TINAGLIA, *Determinazione dei riferimenti proiettivi intrinseci in una trasformazione puntuale fra tre piani proiettivi a direzioni caratteristiche tutte di terzo tipo,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **7** (1973), 56-66.

4. – Nel caso considerato, assumendo come rette $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_1 = q_2$, rispettivamente la terna τ_s^2, τ, τ_s^1, si impone:

$$a_{22}^1 = a_{11}^2 = 0 \,, \quad a_{11}^1 = 2a_{12}^2 \,; \quad b_{11}^2 = 0 \,, \quad b_{11}^1 = 2b_{12}^2 \,, \quad b_{22}^2 = b_{22}^1 + 2b_{12}^1 \,;$$
$$c_{11}^2 = 0 \,, \quad c_{11}^1 = c_{12}^2 + c_{21}^2 \,. \tag{9}$$

Indicando con $\mathscr{P}_d^i$ e $\mathscr{P}_s^i$ rispettivamente le proiettività caratteristiche subordinate dalla T_i fra le direzioni caratteristiche doppie e semplici, rispettivamente, sia Ω_i la omografia tra i piani π_h e π_k che subordina tali proiettività. Assumendo su π_3 gli elementi del sistema di riferimento rispettivamente corrispondenti nella Ω_2 di quelli di π_1, si impone:

$$a_{11}^1 = a_{22}^2 = 0 \,, \qquad \alpha = 1 \,; \tag{10}$$

assumendo su π_2 gli elementi del sistema di riferimento rispettivamente corrispondenti nella inversa della Ω_1 di quelli di π_3, si impone:

$$b_{11}^1 = b_{22}^2 = 0 \,, \qquad \beta = 1 \,. \tag{11}$$

Per la scelta fatta dei sistemi di riferimento, le equazioni (2) della $\mathscr{C}$ diventano:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + y_1 + 2a_{12}^1 x_1 x_2 - b_{22}^1 y_1 y_2 + b_{22}^1 y_2^2 + \\ \qquad\qquad + (c_{12}^2 + c_{21}^2) x_1 y_1 + c_{12}^1 x_1 y_2 + c_{21}^1 x_2 y_1 + c_{22}^1 x_2 y_2 + [3] \\ z_2 = x_2 + y_2 + c_{12}^2 x_1 y_2 + c_{21}^2 x_2 y_1 + c_{22}^2 x_2 y_2 + [3] \,. \end{cases} \tag{12}$$

Per individuare completamente i sistemi di riferimento, basta ormai fissare su π_1 (ad esempio) la retta $x_3 = 0$ ed il punto $(1, 1, 1)$. Poichè la terna τ_i è rappresentata da $q_2 = m_3 q_1$, si ha:

$$(c_{22}^1 - b_{22}^1)\, m_3 + b_{22}^1 - 2a_{12}^1 - c_{22}^2 + c_{12}^1 + c_{21}^1 = 0 \,. \tag{13}$$

Le equazioni della Ω_3 sono:

$$y_1 = \frac{-x_1}{(c_{12}^2 + c_{21}^2)x_1 - [2a_{12}^1 - b_{22}^1 - c_{21}^1 - c_{21}^1 + (b_{22}^1 - c_{22}^1)\, m_3]\, x_2 + 1} \,,$$

$$y_2 = \frac{-x_2}{(c_{12}^2 + c_{21}^2)x_1 - [2a_{12}^1 - b_{22}^1 - c_{12}^1 - c_{21}^1 + (b_{22}^1 - c_{22}^1)\, m_3]\, x_2 + 1} \,.$$

Detta Ω l'omografia $\Omega_1^{-1} \circ \Omega_2$ e r la retta

$$(c_{12}^2 + c_{21}^2)x_1 - [2a_{12}^1 - b_{22}^1 - c_{12}^1 - c_{21}^1 + (b_{22}^1 - c_{22}^1)m_3]x_2 + 2 = 0 ,$$

$\Omega(r) = \Omega_3(r)$, pertanto tale retta resta intrinsecamente determinata e possiamo assumerla come retta $x_3 = 0$.

Ciò impone:

$$c_{12}^2 + c_{21}^2 = 0 , \qquad c_{12}^1 + c_{21}^1 = 2a_{12}^1 - b_{22}^1 + (b_{22}^1 - c_{22}^1)m_3 . \tag{14}$$

Le equazioni della trasformazione quadratica osculatrice la T_2 (5) ed avente per punti singolari i punti $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ di π_1 (che sono stati intrinsecamente fissati) sono:

$$z_1 = x_1 + 2a_{12}^1 x_1 x_2 , \qquad z_2 = x_2$$

e la sua retta singolare su π_1 è:

$$2a_{12}^1 x_2 + 1 = 0$$

che è pure individuata intrinsecamente.

Assumendo come punto $(1, 1, 1)$ di π_1 il punto intersezione di tale retta con la $x_2 = x_1$, si impone:

$$2a_{12}^1 = -1 . \tag{15}$$

Per la (13), (14), (15) le equazioni canoniche di $\mathscr{C}$ sono:

$$\left\{\begin{aligned} z_1 &= x_1 + y_1 - x_1 x_2 - b_{12}^1 y_1 y_2 + b_{22}^1 y_2^2 + c_{12}^1 x_1 y_2 + \\ &\qquad + [(b_{22}^1 - c_{22}^1)m_3 - c_{12}^1 - b_{22}^1 - 1]x_2 y_1 + c_{22}^1 x_2 y_2 + [3] \\ z_2 &= x_2 + y_2 + c_{12}^2 x_1 y_2 - c_{12}^2 x_2 y_1 + [3] \text{ (6)} . \end{aligned}\right. \tag{16}$$

---

(5) M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi*, I, II, Atti Accad. Ital. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (7) **3** (1942), 718-724 e **4** (1943), 1-7.

(6) Ovviamente è $b_{22}^1 \cdot (b_{22}^1 - c_{22}^1) \neq 0$ giacchè in caso contrario una almeno delle T_1, T_3 sarebbe a direzioni caratteristiche indeterminate, contro l'ipotesi.

5. – Supponiamo ora che sia $\tau_d^i \equiv \tau_d^h \equiv \bar{\tau}$ e dimostriamo che: *nelle ipotesi poste, $\bar{\tau}$ e una direzione caratteristica della $\mathscr{C}$ di 3° tipo semplice per ciascuna delle terne σ_{jq} $(j = 1, 2, 3)$;* inoltre *si ha che:*

1) *nell'involuzione in cui si corrispondono le rimanenti direzioni di σ_{iq} e τ_d^k è unita, si corrispondono anche le rimanenti direzioni della σ_{hq};*

2) *le rimanenti direzioni di σ_{kq}, le rimanenti direzioni di σ_{iq} (σ_{hq}), le direzioni caratteristiche della T_h (T_i) si corrispondono in una stessa involuzione.*

Lo stesso accade se τ_d^k coincide con τ_s^i o con τ_s^h.

Se invece è $\tau_s^i \equiv \tau_s^h \equiv \bar{\tau}'$, allora le rimanenti direzioni delle σ_{jq} si corrispondono nell'involuzione in cui è unita τ_d^k ed a $\bar{\tau}$ corrisponde $\bar{\tau}'$.

Se, infine, è $\tau_s^i \equiv \tau_s^h \equiv \tau_d^k \equiv \bar{\tau}''$, allora anche $\bar{\tau}''$ è una direzione caratteristica di 3° tipo della $\mathscr{C}$ semplice per ciascuna delle terne σ_{jq} e le direzioni $\bar{\tau}'$, $\bar{\tau}''$ separano armonicamente la direzione di 1° tipo semplice di σ_{iq} e σ_{hq}.

Sia $\tau_d^1 \equiv \tau_d^2 \equiv \tau_d^3 \equiv \bar{\tau}$ e sia $q_2 = mq_1$ l'equazione di tale terna; siano $q_2 = m_1 q_1$, $q_2 = m_2 q_1$, $q_2 = m_3 q_1$ le equazioni delle terne τ_s^1, τ_s^2, τ_s^3 rispettivamente. Le equazioni (3), (4), (5) diventano rispettivamente:

$$
\begin{aligned}
(17) \qquad & (p-m)\{(\alpha\beta c_{22}^1 - 2\beta^2 a_{22}^1)p^2 + \\
& + [\beta^2 a_{22}^1(2m_3 + m + m_2) + \alpha^2 b_{22}^1(2m_3 - m - m_1) - 2\alpha\beta c_{22}^1 m_3]p - \\
& - \beta^2 a_{22}^1(mm_2 + m_3^2) + \alpha^2 b_{22}^1(mm_1 - m_3^2) + \alpha\beta c_{22}^1 m_3^2\} = 0\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(18) \qquad & (p-m)\{(\alpha\beta c_{22}^1 - 2\alpha^2 b_{22}^1)p^2 + \\
& + [\beta^2 a_{22}^1(2m_3 - m - m_2) + \alpha^2 b_{22}^1(2m_3 + m + m_1) - 2\alpha\beta c_{22}^1 m_3]p + \\
& + \beta^2 a_{22}^1(mm_2 - m_3^2) - \alpha^2 b_{22}^1(mm_1 + m_3^2) + \alpha\beta c_{22}^1 m_3^2\} = 0\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(19) \qquad & (p-m)\{\alpha\beta c_{22}^1 p^2 + [\beta^2 a_{22}^1(2m_3 - m - m_2) + \alpha^2 b_{22}^1(2m_3 - m - m_1) - \\
& - 2\alpha\beta c_{22}^1 m]p + \beta^2 a_{22}^1(mm_2 - m_3^2) + \alpha^2 b_{22}^1(mm_1 - m_3^2) + \alpha\beta c_{22}^1 m_3^2\} = 0\,,
\end{aligned}
$$

e ciò dimostra che $q_2 = mq_1$ è direzione caratteristica della $\mathscr{C}$ di 3° tipo semplice per ciascuna delle σ_{iq}.

Indicando con p e p' le coordinate proiettive (non omogenee) nei fasci sovrapposti di centro O_q e con t_i, t_i' le direzioni della σ_{iq} diverse da $\bar{\tau}$, l'equazione dell'involuzione in cui a t_1 corrisponde t_1' ed a t_2 corrispondente t_2', è:

$$\begin{vmatrix} pp' & p+p' & 1 \\ \alpha\beta c_{22}^1 m_3^2 + \alpha^2 b_{22}^1(mm_1 - m_3^2) - & 2\alpha\beta c_{22}^1 m_3 - \alpha^2 b_{22}^1(2m_3 - m_1 - m) - & \alpha\beta c_{22}^1 - 2\beta^2 a_{22}^1 \\ -\beta^2 a_{22}^1(mm_2 + m_3^2) & -\beta^2 a_{22}^1(2m_3 + m + m_2) & \\ \alpha\beta c_{22}^1 m_3^2 - \alpha^2 b_{22}^1(mm_1 - m_3^2) + & 2\alpha\beta c_{22}^1 m_3 - \alpha^2 b_{22}^1(2m_3 + m + m_1) - & \alpha\beta c_{22}^1 - 2\alpha^2 b_{22}^1 \\ +\beta^2 a_{22}^1(mm_2 - m_3^2) & -\beta^2 a_{22}^1(2m_3 - m - m_2) & \end{vmatrix}$$

Si verifica subito che τ_d^3 (cioè la retta $q_2 = m_3 q_1$) è unita. Si verifica pure immediatamente che t_1 e t_1', t_3 e t_3', $\bar{\tau} \equiv \tau_d^2$ e τ_s^2 si corrispondono in una stessa involuzione ed anche che t_2 e t_2', t_3 e t_3', $\bar{\tau} \equiv \tau_d^1$ e τ_s^1 si corrispondono in una stessa involuzione. Si verifica anche che quanto si è detto vale anche nel caso in cui τ_d^3 coincida con $\tau_s^1(m_3 = m_1)$ o con $\tau_s^2(m_3 = m_2)$. Se è, invece, $\tau_s^1 \equiv \tau_s^2 \equiv \bar{\tau}'$, cioè $m_1 = m_2$, le (17), (18), (19) diventano:

$$(20) \qquad (p-m)\{(\alpha\beta c_{22}^1 - 2\beta^2 a_{22}^1)p^2 +$$
$$+ [2(\beta^2 a_{22}^1 + \alpha^2 b_{22}^1 - \alpha\beta c_{22}^1)m_3 + (\beta^2 a_{22}^1 - \alpha^2 b_{22}^1)(m + m_1)]p -$$
$$-(\beta^2 a_{22}^1 + \alpha^2 b_{22}^1 - \alpha\beta c_{22}^1)m_3^2 - (\beta^2 a_{22}^1 - \alpha^2 b_{22}^1)mm_1\} = 0$$

$$(21) \qquad (p-m)\{(\alpha\beta c_{22}^1 - 2\alpha^2 b_{22}^1)p^2 +$$
$$+ [2(\beta^2 a_{22}^1 + \alpha^2 b_{22}^1 - \alpha\beta c_{22}^1)m_3 - (\beta^2 a_{22}^1 - \alpha^2 b_{22}^1)(m + m_1)]p -$$
$$-(\beta^2 a_{22}^1 + \alpha^2 b_{22}^1 - \alpha\beta c_{22}^1)m_3^2 + (\beta^2 a_{22}^1 - \alpha^2 b_{22}^1)mm_1\} = 0\,,$$

$$(22) \qquad (p-m)\{\alpha\beta c_{22}^1 p^2 + [2(\beta^2 a_{22}^1 + \alpha^2 b_{22}^1 - \alpha\beta c_{22}^1)m_3 - (\beta^2 a_{22}^1 + \alpha^2 b_{22}^1)(m + m_1)]p -$$
$$-(\beta^2 a_{22}^1 + \alpha^2 b_{22}^1 - \alpha\beta c_{22}^1)m_3^2 + (\beta^2 a_{22}^1 + \alpha^2 b_{22}^1)mm_1\} = 0\,,$$

e l'involuzione in cui è unita τ_d^3 ed a $\bar{\tau}$ corrisponde $\bar{\tau}'$ ha equazione:

$$\begin{vmatrix} pp' & p+p' & 1 \\ m_3^2 & 2m_3 & 1 \\ mm_1 & m+m_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ed in tale involuzione si corrispondono t_i e t_i'.

Se infine è $\tau^1_s \equiv \tau^2_s \equiv \tau^3_d \equiv \bar{\tau}$, cioè $m_1 = m_2 = m_3$, le (20), (21), (22) diventano:

$$(23) \qquad (p-m)(p-m_1)\cdot$$
$$\cdot[(\alpha\beta c^1_{22} - 2\beta^2 a^1_{22})p + (\beta^2 a^1_{22} + \alpha^2 b^1_{22} - \alpha\beta c^1_{22})m_1 + (\beta^2 a^1_{22} - \alpha^2 b^1_{22})m] = 0\,,$$

$$(24) \qquad (p-m)(p-m_1)\cdot$$
$$\cdot[(\alpha\beta c^1_{22} - 2\alpha^2 b^1_{22})\,p + (\beta^2 a^1_{22} + \alpha^2 b^1_{22} - \alpha\beta c^1_{22})m_1 - (\beta^2 a^1_{22} - \alpha^2 b^1_{22})m] = 0\,,$$

$$(25) \qquad (p-m)(p-m_1)[\alpha\beta c^1_{22}p + (\beta^2 a^1_{22} + \alpha^2 b^1_{22} - \alpha\beta c^1_{22})m] = 0\,,$$

e ciò dimostra che anche $\bar{\tau}''$ è direzione caratteristica della $\mathscr{C}$ di 3° tipo semplice per ciascuna terma σ_{iq} e si verifica subito che $\bar{\tau}$ e $\bar{\tau}''$ separano armonicamente le rimanenti direzioni caratteristiche di σ_{1q} e σ_{2q}.

Procedendo in modo analogo nel caso che sia $\tau^1_d \equiv \tau^2_s \equiv \tau^3_d$ oppure $\tau^1_s \equiv \equiv \tau^2_d \equiv \tau^3_d$ resta dimostrato quanto si voleva.

6. – In questo numero determineremo i riferimenti intrinseci della $\mathscr{C}$ nel caso in cui $\tau^1_d \equiv \tau^2_s \equiv \tau^3_d$. Assumendo come terne $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ le terne $\tau^1_d \equiv \equiv \tau^2_s \equiv \tau^3_d$ e τ^2_d rispettivamente, assumendo su π_3 gli elementi del sistema di riferimento rispettivamente corrispondenti di quelli di π_1 nella Ω_2 e gli elementi del sistema di riferimento di π_2 rispettivamente corrispondenti di quelli di π_3 nell'omografia inversa della Ω_1 ed infine assumendo come retta $x_3 = 0$ la retta di π_1 a cui corrispondono gli stessi punti di π_2 sia mediante la Ω_3 sia mediante la Ω, si impone:

$$(26) \quad \begin{cases} \alpha = 1\,, \quad a^1_{11} = a^1_{22} = a^2_{11} = a^2_{22} = 0\,, \\ \beta = 1\,, \quad b^1_{11} = b^1_{12} = b^1_{22} = b^2_{22} = 0\,, \quad b^2_{11} = -2b^2_{12}m_1\,, \\ c^1_{11} = c^1_{22} = c^2_{22} = 0\,, \quad c^1_{21} = 2a^1_{12} - c^1_{12}\,, \quad c^2_{11} = 2b^2_{12}(m_3 - m_1) - (c^2_{12} + c^2_{21})m_3\,, \end{cases}$$

avendo indicato la terna τ^1_s con $q_2 = m_1 q_1$ e la terna τ^3_s con $q_2 = m_3 q_1$.

Con tale scelta dei sistemi di riferimento, le equazioni della $\mathscr{C}$ diventano

$$(27) \quad \begin{cases} z_1 = x_1 + y_1 + 2a^1_{12}x_1x_2 + c^1_{12}x_1y_2 + (2a^1_{12} - c^1_{12})x_2y_1 + [\mathbf{3}] \\ z_2 = x_2 + y_2 - 2m_1 b^2_{12}y_1^2 + 2b^2_{12}y_1y_2 + \\ \qquad + [-2b^2_{12}m_1 + (2b^2_{12} - c^2_{12} - c^2_{21})m_3]x_1y_1 + c^2_{12}x_1y_2 + c^2_{21}x_2y_1 + [\mathbf{3}]\,, \end{cases}$$

e le equazioni delle terne σ_{1q}, σ_{2q}, σ_{3q} sono date rispettivamente dalle equazioni:

$$2a^1_{12}p^2 + (c^2_{12} + c^2_{21})p + (2b^2_{12} - c^2_{12} - c^2_{21})m_3 - 2b^2_{12}m_1 = 0\,, \tag{28}$$

$$2a^1_{12}p^2 - (c^2_{12} + c^2_{21} - 4b^2_{12})p - (2b^2_{12} - c^2_{12} - c^2_{21})m_3 - 2b^2_{12}m_1 = 0\,, \tag{29}$$

$$2a^1_{12}p^2 - (c^2_{12} + c^2_{21})p - (2b^2_{12} - c^2_{12} - c^2_{21})m_3 + 2b^2_{12}m_1 = 0\,. \tag{30}$$

Per individuare completamente i sistemi di riferimento intrinseci, bisogna ancora fissare le rette unità ed il punto unità di π_1 (ad esempio). Assumendo il punto $(1, 1, 1)$ sulla retta singolare della trasformazione quadratica osculatrice la T_2 ed avente per punti singolari i punti $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ si impone:

$$2a^1_{12} = -1\,. \tag{31}$$

Se $\tau^1_s \equiv \tau^3_s$ e τ^2_d è diversa da entrambe, assumendo come terna $q_2 = q_1$ la terna τ^1_s si ha:

$$m_1 = 1\,. \tag{32}$$

Restano così fissati intrinsecamente i sistemi di riferimento, e le equazioni della $\mathscr{C}$ sono:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + y_1 - x_1x_2 + c^1_{12}x_1y_2 - (1 + c^1_{12})x_2y_1 + [3] \\ z_2 = x_2 + y_2 - 2b^2_{12}y_1^2 + 2b^2_{12}y_1y_2 + \\ \qquad + [2b^2_{12}(m_3 - 1) - (c^2_{12} + c^2_{21})m_3]x_1y_1 + c^2_{12}x_1y_2 + c^2_{21}x_2y_1 + [3]\,, \end{cases} \tag{33}$$

e le (28), (29), (30) diventano:

$$p^2 + (c^2_{12} + c^2_{21})p - 2b^2_{12}(m_3 - 1) + (c^2_{12} + c^2_{21})m_3 = 0\,, \tag{34}$$

$$p^2 - (c^2_{12} + c^2_{21} - 4b^2_{12})p + 2b^2_{12}(m_3 + 1) - (c^2_{12} + c^2_{21})m_3 = 0\,, \tag{35}$$

$$p^2 - (c^2_{12} + c^2_{21})p + 2b^2_{12}(m_3 - 1) - (c^2_{12} + c^2_{21})m_3 = 0\,. \tag{36}$$

Se poi è $\tau^3_s \equiv \tau^2_d$ (7), le equazioni canoniche di $\mathscr{C}$ e le equazioni che danno le terne σ_{iq} si ottengono dalle precedenti sostituendo $m_3 = 0$.

(7) Nel caso in cui sia, invece, $\tau^1_s \equiv \tau^2_d \not\equiv \tau^3_s$ si procede nello stesso modo, scambiando τ^1_s con τ^3_s.

Se invece fosse $\tau_s^1 \equiv \tau_s^3 \not\equiv \tau_d^2$, le equazioni canoniche della $\mathscr{C}$ si ottengono dalle precedenti ponendo $m_3 = 1$.

Se infine è $\tau_s^1 \equiv \tau_s^3 \equiv \tau_d^2$, si ha:

$$m_1 = m_3 = 0 \tag{37}$$

e, per le (31) e (37), le equazioni di $\mathscr{C}$ diventano:

$$\left\{\begin{aligned} z_1 &= x_1 + y_1 - x_1x_2 + c_{12}^1 x_1y_2 - (1 + c_{12}^1)x_2x_1 + [3] \\ z_2 &= x_2 + y_2 + 2b_{12}^2 y_1y_2 + c_{12}^2 x_1y_2 + c_{21}^2 x_2y_1 + [3]\,. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

La trasformazione quadratica osculatrice la T_1 ed avente su π_3 per punti singolari i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ ha equazioni:

$$z_1 = y_1\,, \qquad z_2 = y_2 + 2b_{12}^2 y_1y_2$$

e la sua retta singolare su π_2 è la retta $2b_{12}^2 y_1 + 1 = 0$; a tale retta corrisponde su π_1 mediante Ω la retta di equazione $2b_{12}^2 x_1 + 1 = 0$; assumendo su tale retta il punto $(1, 1, 1)$, si impone:

$$2b_{12}^2 = -1\,; \tag{39}$$

posto $c_{12}^1 = c_1$, $c_{12}^2 = c_2$, $c_{21}^2 = c - c_2$, le equazioni canoniche della $\mathscr{C}$ sono:

$$\left\{\begin{aligned} z_1 &= x_1 + y_1 - x_1x_2 + c_1x_1y_2 - (1 + c_1)x_2y_1 + [3] \\ z_2 &= x_2 + y_2 - y_1y_2 + c_2x_1y_2 + (c - c_2)x_2y_1 + [3]\,, \end{aligned}\right. \tag{40}$$

e le terne σ_{1q}, σ_{2q}, σ_{3q} sono date rispettivamente dalle equazioni:

$$p(p + c) = 0\,, \qquad p(p - c - 2) = 0\,, \qquad p(p - c) = 0\,. \tag{41}$$

7. – Supponiamo che sia $\tau_s^i \equiv \tau_s^h \equiv \tau_s^k \equiv \tau$ $(i, h, k = 1, 2, 3$ fissati $i \neq h$, $i \neq k$, $h \neq k)$ e che $q_2 = mq_1$ sia l'equazione di tale terna; siano invece $q_2 = m_jq_1$ le equazioni delle terne τ_d^j $(j = 1, 2, 3)$. Dimostreremo che

nelle ipotesi poste, la direzione τ per O_q è caratteristica per $\mathscr{C}$ di 3° tipo semplice per ciascuna delle terne σ_{jq} e le rimanenti direzioni delle terne σ_{jq}, σ_{rq} si corrispondono in una involuzione in cui è unita la direzione τ_d^p $(j, r, p = 1, 2, 3,$ fissati $j \neq r$, $j \neq p$, $r \neq p)$. Se poi è anche $\tau_d^i \equiv \tau_d^h$ allora le direzioni caratteristiche di 1° tipo semplici delle terne σ_{iq} si corrispondono nell'involuzione in cui sono unite $\tau_d^i \equiv \tau_d^h$ e τ_d^k.

Per le ipotesi poste, le equazioni (3), (4), (5) diventano, rispettivamente

$$(42)\qquad (p-m)\{(\alpha\beta c^1_{22}-2\beta^2 a^1_{22})p^2-$$

$$-2[\alpha^2 b^1_{22} m_1-\beta^2 a^1_{22} m_2-(\alpha^2 b^1_{22}+\beta^2 a^1_{22}-\alpha\beta c^1_{22})m_3]p+$$

$$+\alpha^2 b^1_{22} m_1^2-\beta^2 a^1_{22} m_2^2-(\alpha^2 b^1_{22}+\beta^2 a^1_{22}-\alpha\beta c^1_{22})m_3^2\}=0\,,$$

$$(43)\qquad (p-m)\{(\alpha\beta c^1_{22}+2\alpha^2 b^1_{22})p^2+$$

$$+2[\alpha^2 b^1_{22} m_1-\beta^2 a^1_{22} m_2+(\alpha^2 b^1_{22}+\beta^2 a^1_{22}-\alpha\beta c^1_{22})m_3]-$$

$$-\alpha^2 b^1_{22} m_1^2+\beta^2 a^1_{22} m_2^2-(\alpha^2 b^1_{22}+\beta^2 a^1_{22}-\alpha\beta c^1_{22})m_3^2\}=0\,,$$

$$(44)\qquad (p-m)\{\alpha\beta c^1_{22}p^2-2[\alpha^2 b^1_{22} m_1+\beta^2 a^1_{22} m_2-(\alpha^2 b^1_{22}+\beta^2 a^1_{22}-\alpha\beta c^1_{22})m_3]p+$$

$$+\alpha^2 b^1_{22} m_1^2+\beta^2 a^1_{22} m_2^2-(\alpha^2 b^1_{22}+\beta^2 a^1_{22}-\alpha\beta c^1_{22})m_3^2\}=0$$

e ciò dimostra che τ è direzione caratteristica della $\mathscr{C}$ di 3° tipo semplice per ciascuna delle σ_{ir}. Indicando con t_i, t'_i le rimanenti direzioni per O_q delle σ_{iq} si verifica subito che nell'involuzione in cui a t_i corrisponde t'_i ed a t_h corrisponde t'_h, è unita la direzione τ^k_d.

Se poi si suppone $\tau^i_d \equiv \tau^h_d$ allora le t_i, t'_i risultano separate armonicamente da τ^k_d e da $\tau^i_d \equiv \tau^h_d$ (anche questo fatto si verifica immediatamente) (8).

8. – Indicando con $\mathscr{P}^i_d$ e $\mathscr{P}^i_s$ rispettivamente le proiettività caratteristiche subordinate dalla T_i fra le direzioni caratteristiche doppie e semplici, rispettivamente, sia Ω_i la omografia tra i piani π_h e π_k che subordina tali proiettività.

Assumiamo come terne $q_1=0$, $q_2=0$ rispettivamente le terne $\tau\equiv\tau^1_s\equiv\equiv\tau^2_s\equiv\tau^3_s$ e τ^2_d. Assumiamo gli elementi del sistema di riferimento del piano π_3 rispettivamente corrispondenti di quelli di π_1 nella Ω_2 e gli elementi del sistema di riferimento su π_2 rispettivamente corrispondenti di quelli di π_3 nell'omografia inversa della Ω_1.

---

(8) Nel caso che fosse anche $\tau^i_d \equiv \tau^h_d \equiv \tau^k_d$, ved.:

C. Tinaglia, *Alcune osservazioni sulle trasformazioni puntuali fra tre piani proiettivi*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **6** (1972), 248-255.

C. Tinaglia, *Determinazione dei riferimenti proiettivi intrinseci in una trasformazione puntuale fra tre piani proiettivi a direzioni caratteristiche tutte di terzo tipo*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **7** (1973), 56-66.

Per le ipotesi poste e per la scelta fatta dei sistemi di riferimento, si impone:

$$(45)\quad \begin{cases} \alpha = 1\,, \; a^1_{11} = a^1_{22} = a^2_{11} = a^2_{12} = a^2_{22} = 0 \\ \beta = 1\,, \; b^1_{22} = b^2_{22} = 0\,, \; b^1_{11} = -2b^1_{12}m_1\,, \; b^2_{11} = -2b^1_{12}m^2_1\,, \; 2b^2_{12} = 2b^1_{12}m_1 \\ c^1_{22} = 0\,, \; c^1_{11} = c^2_{12} + c^2_{11} - 4m_1 b^1_{12} + 2(2a^1_{12} + 2b^1_{12} + c^2_{22} - c^1_{12} - c^1_{21})\,m_3 \\ c^2_{11} = (2a^1_{12} + 2b^1_{12} + c^2_{22} - c^1_{12} - c^1_{21})\,m^2_3 - 2m^2_1 b^1_{12}\,. \end{cases}$$

Le equazioni della Ω_3 sono:

$$y_1 = \frac{-x_1}{ax_1 + c^2_{22}x_2 + 1}\,, \qquad y_2 = \frac{-x_2}{ax_1 + c^2_{22}x_2 + 1}\,,$$

avendo posto:

$$(46)\qquad a = c^2_{12} + c^2_{11} - 2m_1 b^1_{12} + (2a^1_{12} + 2b^1_{12} + c^2_{22} - c^1_{12} - c^1_{21})\,m_3\,.$$

Ai punti della retta $ax_1 + bx_2 - 2 = 0$ corrispondono sia mediante la Ω sia mediante la Ω_3 gli stessi punti di π_2 e tale retta resta dunque individuata intrinsecamente. Assumendo tale retta come retta $x_3 = 0$, si ha:

$$(47)\qquad a = 0\,, \qquad c^2_{22} = 0\,.$$

Per individuare completamente i sistemi di riferimento intrinseci, basta fissare intrinsecamente la retta $x_2 = 1$ e la retta $x_2 = x_1$ (ad esempio).

La trasformazione quadratica osculatrice la T_2 ed avente per punti singolari i punti (1, 0, 0), (0, 1, 0), ha equazioni:

$$z_1 = x_1 + 2a^1_{12}x_1x_2\,, \qquad z_2 = x_2$$

e la sua retta singolare su π_1 ha equazione $2a^1_{12}x_2 + 1 = 0$. Assumendo tale retta come retta $x_2 = 1$, si ha:

$$(48)\qquad 2a^1_{12} = -1\,.$$

Per le (9), (10), (11), (12), le equazioni (2) della $\mathscr{C}$ diventano:

$$(49)\quad \begin{cases} z_1 = x_1 + y_1 - x_1 x_2 - 2m_1 b^1_{12} y_1^2 + 2b^1_{12} y_1 y_2 + \\ \qquad + [(2b^1_{12} - c^1_{12} - c^1_{21} - 1)m_3 - 2m_1 b^1_{12}] x_1 y_1 + c^1_{12} x_1 y_2 + c^1_{21} x_2 y_1 + [\mathbf{3}] \\ z_2 = x_2 + y_2 - 2m_1^2 b^1_{12} y_1^2 + 2m_1 b^1_{12} y_1 y_2 + \\ \qquad + [(2b^1_{12} - c^1_{12} - c^1_{21} - 1)m_3^2 - 2m_1^2 b^1_{12}] x_1 y_1 + c^2_{12} x_1 y_2 + \\ \qquad\qquad + [2m_1 b^1_{12} - c^2_{12} - (2b^1_{12} - c^1_{12} - c^1_{21} - 1)m_3] x_2 y_1 + [\mathbf{3}]\,. \end{cases}$$

Le terne $\sigma_{1q}, \sigma_{2q}, \sigma_{3q}$ $(q_2 = pq_1)$ di direzioni caratteristiche della $\mathscr{C}$ per O_q saranno date, rispettivamente, dalle equazioni:

$$(50)\quad (c^1_{12} + c^1_{21} + 2)p^2 - 2\,[2m_1 b^1_{12} - (2b^1_{12} - c^1_{12} - c^1_{21} - 1)\,m_3]p - \\ - (2b^1_{12} - c^1_{12} - c^1_{21} - 1)\,m_3^2 + 2m_1^2 b^1_{12} = 0\,,$$

$$(51)\quad (c^1_{12} + c^1_{21} - 4b^1_{12})p^2 + 2[2m_1 b^1_{12} + (2b^1_{12} - c^1_{12} - c^1_{21} - 1)\,m_3]p - \\ - (2b^1_{12} - c^1_{12} - c^1_{21} - 1)\,m_3^2 - 2m_1^2 b^1_{12} = 0\,,$$

$$(52)\quad (c^1_{12} + c^1_{21})p^2 - 2[2m_1 b^1_{12} - (2b^1_{12} - c^1_{12} - c^1_{21} - 1)\,m_3]p - \\ - (2b^1_{12} - c^1_{12} - c^1_{21} - 1)\,m_3^2 + 2m_1^2 b^1_{12} = 0\,.$$

Poichè almeno una delle terne τ^1_d, τ^3_d è distinta dalla τ^2_d (9), per individuare completamente i riferimenti intrinseci della $\mathscr{C}$ basterà fissare come terna $q_2 = q_1$ una di esse.

9. – Consideriamo ora il caso in cui $\tau^i_s \equiv \tau^h_s \equiv \tau^k_d \equiv \bar{\tau}$ e dimostriamo che: *nelle ipotesi poste, la direzione $\bar{\tau}$ è caratteristica di 3° tipo semplice per ciascuna delle σ_{jq} e le direzioni caratteristiche di 1° tipo delle σ_{iq}, σ_{hq}, e quelle della T_k si corrispondono in una stessa involuzione e nell'involuzione in cui si corrispondono le direzioni di 1° tipo della σ_{hq} e della σ_{kq}, è unita la τ^i_d.*

Lo stesso accade se $\tau^i_d \equiv \tau^k_s$ oppure $\tau^h_d \equiv \tau^k_s$. Se invece è anche $\tau^h_d \equiv \tau^i_d$ allora le direzioni di 1° tipo delle σ_{jq} si corrispondono nell'involuzione in cui è unita $\tau^i_d \equiv \tau^h_d$ e si corrispondono le τ^k_s e τ^k_d.

---

(9) Ciò è vero in quanto abbiamo escluso il caso $\tau^1_d \equiv \tau^2_d \equiv \tau^3_d$.

Sia $\tau_s^1 \equiv \tau_s^2 \equiv \tau_d^3$ e sia $q_2 = mq_1$ l'equazione di tale terna; sia inoltre $q_2 = m_1 q_1$ l'equazione della τ_d^1, $q_2 = m_2 q_1$ quella della τ_d^2, $q_2 = m_3 q_1$ quella della τ_s^3. Le equazioni (3), (4), (5) diventano, rispettivamente:

$$(53) \qquad \begin{aligned} &(p-m)\{(\alpha\beta c_{22}^1 - 2\beta^2 c_{22}^1)p^2 + \\ &+ [(\alpha^2 b_{22}^1 + \beta^2 a_{22}^1 - \alpha\beta c_{22}^1)(m+m_3) - 2\alpha^2 b_{22}^1 m_1 + 2\beta^2 a_{22}^1 m_2]p - \\ &- (\alpha^2 b_{22}^1 + \beta^2 a_{22}^1 - \alpha\beta c_{22}^1)mm_3 + \alpha^2 b_{22}^1 m_1^2 - \beta\, a_{22}^1 m_2^2\} = 0\,, \end{aligned}$$

$$(54) \qquad \begin{aligned} &(p-m)\{(\alpha\beta c_{22}^1 - 2\alpha^2 b_{22}^1)p^2 + \\ &+ [(\alpha^2 b_{22}^1 + \beta^2 a_{22}^1 - \alpha\beta c_{22}^1)(m+m_3) + 2\alpha^2 b_{22}^1 m_1 - 2\beta^2 a_{22}^1 m^2]p - \\ &- (\alpha^2 b_{22}^1 + \beta^2 a_{22}^1 - \alpha\beta c_{22}^1)mm_3 - \alpha^2 b_{22}^1 m_1^2 + \beta^2 a_{22}^1 m_2^2\} = 0\,, \end{aligned}$$

$$(55) \qquad \begin{aligned} &(p-m)\{\alpha\beta c_{22}^1 p^2 + \\ &+ [\alpha^2 b_{22}^1 + \beta^2 a_{22}^1 - \alpha\beta c_{22}^1)(m+m_3) - 2\alpha^2 b_{22}^1 m_1 - 2\beta^2 a_{22}^1 m_2]p - \\ &- (\alpha^2 b_{22}^1 + \beta^2 a_{22}^1 - \alpha\beta c_{22}^1)mm_3 + \alpha^2 b_{22}^1 m_1^2 + \beta^2 a_{22}^1 m_2^2\} = 0\,. \end{aligned}$$

Ciò dimostra che $\bar{\tau}$ è caratteristica di 3° tipo semplice per ciascuna delle σ_{jq} e si verifica subito quanto è stato enunciato. Procedendo in modo analogo nel caso che sia $\tau_s^1 \equiv \tau_d^2 \equiv \tau_s^3$ oppure $\tau_d^1 \equiv \tau_s^2 \equiv \tau_s^3$, si dimostra l'asserto.

10. – In questo numero ci proponiamo di trovare le equazioni canoniche della $\mathscr{C}$ nel caso che sia $\tau_d^1 \equiv \tau_s^2 \equiv \tau_s^3$. Assumendo come terna $q_1 = 0$ tale terna, come terna $q_2 = 0$ la terna τ_d^2, gli elementi del sistema di riferimento su π_3 rispettivamente corrispondenti di quelli di π_1 nella Ω_2, gli elementi del sistema di riferimento su π_2 rispettivamente corrispondenti di quelli π_3 nell'omografia inversa della Ω_1, come retta $x_3 = 0$ la retta di π_1 cui, sia mediante la Ω che mediante la Ω_3 corrispondono gli stessi punti di π_2, come retta $x_2 = 1$ la retta singolare su π_1 della trasformazione quadratica osculatrice la T_2 avente come punti singolari i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ di tale piano, si impone:

$$(56) \qquad \begin{cases} \alpha = 1\,,\ a_{11}^1 = a_{22}^1 = a_{11}^2 = a_{12}^2 = a_{22}^2 = 0\,,\ 2a_{12}^1 = -1 \\ \beta = 1\,,\ b_{11}^1 = b_{12}^1 = b_{22}^1 = b_{22}^2 = 0\,,\ b_{11}^2 = -2m_1 b_{12}^2 \\ c_{22}^1 = c_{22}^2 = 0,\ c_{11}^1 = -m_3(c_{12}^1 + c_{21}^1 + 1),\ c_{11}^2 = -(c_{12}^1 + c_{21}^1 + 1)m_3^2 - 2m_1 b_{12}^2 \\ c_{21}^2 = (c_{12}^1 + c_{21}^1 + 1)m_3 + 2b_{12}^2 - c_{12}^2\,. \end{cases}$$

Per le (20), le equazioni della $\mathscr{C}$ diventano:

$$
(57)\quad \begin{cases} z_1 = x_1 + y_1 - x_1 x_2 - m_3(c^1_{12} + c^1_{21} + 1) x_1 y_1 + c^1_{12} x_1 y_2 + c^1_{21} x_2 y_1 + [\mathbf{3}] \\ z_2 = x_2 + y_2 - 2m_1 b^2_{12} y_1 + 2b^2_{12} y_1 y_2 - [m^2_3(c^1_{12} + c^1_{21} + 1) + 2m_1 b^2_{12}] x_1 y_1 + \\ \qquad + c^2_{12} x_1 y_2 + [m_3(c^1_{12} + c^1_{21} + 1) - 2b^2_{12} - c^2_{12}] x_2 y_1 + [\mathbf{3}] , \end{cases}
$$

e le terne σ_{1q}, σ_{2q}, σ_{3q} sono date rispettivamente dalle equazioni:

$$
(58)\quad (c^1_{12} + c^1_{21} + 2) p^2 - [2m_3(c^1_{12} + c^1_{.1} + 1) + 2b^2_{12}] p + \\ + m^2_3(c^1_{12} + c^1_{21} + 1) + 2m_1 b^2_{12} = 0 ,
$$

$$
(59)\quad (c^1_{12} + c^1_{21}) p^2 - [2m_3(c^1_{12} + c^1_{21} + 1) - 2b^2_{12}] p + \\ + m^2_3(c^1_{12} + c^1_{21} + 1) - 2m_1 b^2_{12}] = 0 ,
$$

$$
(60)\quad (c^1_{12} + c^1_{21}) p^2 - [2m_3(c^1_{12} + c^1_{21} + 1) + 2b^2_{12}] p + \\ + m^2_3(c^1_{12} + c^1_{21} + 1) + 2m_1 b^2_{12} = 0 .
$$

Per fissare completamente i sistemi di riferimento intrinseci, basterà assumere come terna $q_2 = q_1$ una delle due terne τ^1_s o τ^3_d.

Summary.

We study some properties of the points correspondences among three projective planes that subordinate among the couples of such planes points correspondences of second kind. Particularly we study the case here characteristic double directions are coincident and we determine their intrinsic references.

* * *