Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 67-78

F. R. MARSICANO y A. PERETTI (*)

Sobre la ecuación «N» de Lagrange. (**)

1. - Sistema de ecuaciones de Lagrange para resolver el problema de tres cuerpos.

Dados los tres cuerpos P_0, P_1, P_2 de masas m_0, m_1, m_2 respectivamente, quedam determinados los tres vectores $\overline{u}_i = \overline{P_{i+2} - P_{i+1}}$ y las tres distancias $r_i = |\overline{u}_i|$ con las cuales se construyen las siguientes funciones y parámetros auxiliares de LAGRANGE [1], [2], [3]:

$$p_i = -\overline{u}_{i+1} \cdot \overline{u}_{i+2} = \tfrac{1}{2}(r_{i+1}^2 + r_{i+2}^2 - r_i^2)\,, \tag{1}$$

$$q_i = \frac{1}{r_{i+1}^3} - \frac{1}{r_{i+2}^3}\,, \tag{2}$$

$$\varrho = \overline{u}_i \cdot \dot{\overline{u}}_{i+1} - \overline{u}_{i+1} \cdot \dot{\overline{u}}_i\,, \tag{3}$$

$$\mathscr{U} = \sum_0^2 \frac{m_i m_{i+1}}{r_{i+2}}\,, \tag{4}$$

$$(\dot{\overline{u}}_i)^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2} r_i^2 + \frac{M}{r_i} + m_i(p_{i+1} q_{i+1} - p_{i+2} q_{i+2})\,, \tag{5}$$

(*) Indirizzo: F. R. MARSICANO, Consejo Nacional de Investigaciones Cientificas y Técnicas. Rep. Argentina.

(**) Ricevuto: 11-VI-1973.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{d^2r_i^2}{dt^2}-\frac{M}{r_i}+m_i(p_{i+1}q_{i+1}-q_{i+2}p_{i+2})\right]=m_i[q_{i+2}\dot{p}_{i+2}-q_{i+1}\dot{p}_{i+1}-q_i\,\varrho]\,, \tag{6}$$

$$\gamma_i=-\dot{\bar{u}}_{i+1}\cdot\dot{\bar{u}}_{i+2}=\frac{1}{2}[(\dot{\bar{u}}_{i+1})^2+(\dot{\bar{u}}_{i+2})^2-(\dot{\bar{u}}_i)^2]\,, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\nu_i&=r_i^2\varrho^2+2\varrho(p_{i+2}\dot{p}_{i+1}-p_{i+1}\dot{p}_{i+2})+\\&\qquad+p_{i+1}(\dot{p}_{i+2})^2+p_{i+2}(\dot{p}_{i+1})^2+p_i\left(\frac{d}{dt}r_i^2\right)^2,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\pi_i=(\bar{u}_i\wedge\dot{\bar{u}}_i)^2=r_i^2[(\dot{\bar{u}}_i)^2-(\dot{r}_i)^2]\,, \tag{9}$$

$$\psi_i=p_i\gamma_i+\tfrac{1}{4}[\varrho^2-(\dot{p}_i)^2]\,. \tag{10}$$

Además se construye el siguiente sistema de ecuaciones del movimiento en las solas distancias mutuas, formado por dos ecuaciones del segundo orden en las r_i y una del tercer orden, esta última a través de la función auxiliar ϱ que satisface a su vez a la susodicha ecuación de cuarto grado N:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum_0^2\frac{r_i^2}{m_i}=\frac{M\mathscr{U}}{m_0m_1m_2}+C \tag{L}$$

(C = costante de la energía)

$$\frac{d\varrho}{dt}=-\sum_0^2 m_ip_iq_i\,, \tag{H}$$

$$(\varrho^2+\sum_0^2\dot{p}_i\dot{p}_{i+1})^2-4\sum_0^2\gamma_i\nu_i+16\sum_0^2 p_ip_{i+1}\sum_0^2\gamma_i\gamma_{i+1}=0\,, \tag{N}$$

$$\sum_0^2\frac{\pi_i}{m_i^2}+2\sum_0^2\frac{\psi_i}{m_{i+1}m_{i+2}}=c_1^2 \tag{P}$$

(c_1 = costante del momento cinético).

2. - Casos particulares de Lagrange.

En su memoria LAGRANGE analiza el caso en que las tres distancias son iguales entre sí y además constantes (caso de las soluciones equiláteras) en cuyo caso se tiene:

$$r_0 = r_1 = r_2 = r\,, \qquad p_i = p = \frac{r^2}{2}\,, \qquad q_i = 0\,, \qquad \dot{r}_i = 0\,,$$

$$(\dot{\bar{u}}_0)^2 = (\dot{\bar{u}}_1)^2 = (\dot{\bar{u}}_2)^2 = (\dot{\bar{u}})^2 = \frac{M}{r}\,,$$

$$\dot{p}_i = 0\,, \qquad \gamma_i = \gamma = \frac{1}{2}(\dot{\bar{u}})^2 = \frac{M}{2r}\,,$$

$$\nu_i = r^2\varrho^2\,,$$

con lo que la ecuación N queda:

$$\varrho^4 - 12\,\varrho^2\gamma r^2 + 144p^2\gamma^2 = 0$$

o bien

$$\varrho^4 - 6\varrho^2 M + qM^2 r^2 = 0$$

de donde

$$\varrho = \sqrt{3Mr}\,. \tag{11}$$

A la fórmula (11) se le puede dar otra forma, haciendo intervenir la constante del momento cinético c_1.

En efecto, de (9):

$$\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \pi = r^2(\dot{\bar{u}})^2 = Mr \tag{12}$$

y de (10):

$$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = \psi = p\gamma + \frac{\varrho^2}{4} = \frac{1}{4}(Mr + \varrho^2)\,. \tag{13}$$

Introduciendo (12) y (13) en la ecuación P; queda:

$$Mr\sum_0^2 \frac{1}{m_i^2} + \frac{Mr + \varrho^2}{2}\sum_0^2 \frac{1}{m_i m_{i+1}} = c_1^2$$

de donde

$$\varrho = \frac{c_1 \sqrt{3}}{\sum_0^2 1/m_i} . \tag{14}$$

Como vemos, ϱ es una constante que depende de las masas m_i y de las condiciones iniciales a través de C_1.

Para el caso en que la configuración es equilátera pero con las r_i variables, se tiene:

$$r_0 = r_1 = r_2 = r , \qquad \dot{r}_i \neq 0 , \qquad q_i = 0 , \qquad p_i = p = \frac{r^2}{2} ,$$

$$\dot{p}_i = r\dot{r} , \qquad (\dot{\bar{u}}_i)^2 = (\dot{\bar{u}})^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 r^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{M}{r} = \ddot{p} + \frac{M}{r} ,$$

$$\gamma_i = \gamma = \frac{(\dot{\bar{u}})^2}{2} = \frac{\ddot{p}}{2} + \frac{M}{2r} ,$$

$$\nu = \nu_i = r^2 \varrho^2 + 2p(\dot{p})^2 + p\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} 2p\right)^2 = 2p\varrho^2 + 6p(\dot{p})^2 ,$$

de donde la ecuación N queda:

$$[\varrho^2 + 3(\dot{p})^2]^2 - 6\left(\ddot{p} + \frac{M}{r}\right)[2p\varrho^2 + 6p(\dot{p})^2] + 36p^2\left(\ddot{p} + \frac{M}{r}\right)^2 = 0 .$$

El determinante de esta ecuación es nulo, luego:

$$\varrho^2 = 6p\left(\ddot{p} + \frac{M}{r}\right) - 3(\dot{p})^2 . \tag{15}$$

En este caso también es possible hallar una expresión de ϱ en función de las masas y de las condiciones iniciales; en efecto, se tiene:

$$\pi_i = \pi = r^2[(\dot{\bar{u}})^2 - (\dot{r})^2] = 2p\left(\ddot{p} + \frac{M}{r}\right) - (\dot{p})^2$$

pero de (15) $\pi = \varrho^2/3$; además

$$\psi_i = \psi = p\gamma + \frac{\varrho^2 - (\dot{p})^2}{4} = p\left(\frac{\ddot{p}}{2} + \frac{M}{2r}\right) + \frac{\varrho^2 - (\dot{p})^2}{4} = \frac{\varrho^2}{3}$$

luego de p:

$$\varrho^2 = \frac{3c_1^2}{\sum_0^2 (1/m_i^2) + 2\sum_0^2 1/m_i m_{i+1}}$$

o bien:

$$\varrho = \frac{c_1\sqrt{3}}{\sum_0^2 1/m_i} \tag{16}$$

fórmula que coincide con la dada por LAGRANGE ([**1**], pag. 286).

El otro caso particular de LAGRANGE consiste también en un movimento plano donde los tres cuerpos están continuamente alineados, existiendo una relación constante entre las distancias:

$$r_1 = nr_0\,, \qquad r_2 = r_0 + r_1 = (1+n)r_0\,, \qquad \dot{r}_i \neq 0 \qquad (n = \text{constante})\,. \tag{17}$$

De (1) y (17) se obtiene:

$$\begin{cases} p_0 = r_1 r_2 = n(1+n)r_0^2 \\ p_1 = r_0 r_2 = (1+n)r_0^2 \\ p_2 = -r_0 r_1 = -nr_0^2\,, \end{cases} \tag{18}$$

y por lo tanto:

$$\sum_0^2 p_i p_{i+1} = r_0^4 n(1+n)[(1+n) - n - 1] = 0\,. \tag{19}$$

Asimismo:

$$\sum_0^2 \dot{p}_i \dot{p}_{i+1} = 4r_0^2(\dot{r}_0)^2[n(1+n)^2 - n^2(1+n) - n(1+n)] = 0\,. \tag{20}$$

También es fácil demostrar que:

$$\alpha_i = p_{i+1}(\dot{p}_{i+2})^2 + p_{i+2}(\dot{p}_{i+1})^2 + p_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r_i^2\right)^2 \tag{21}$$

es cero para cualquier i, luego como el término independiente de la ecuación N en este caso vale:

$$(\sum_0^2 \dot{p}_i\dot{p}_{i+1})^2 - 4\sum_0^2 \gamma_i\alpha_i + 16\sum_0^2 p_i p_{i+1}\sum_0^2 \gamma_i\gamma_{i+1} \tag{22}$$

siendo cero todos sus términos, se deduce que ϱ es constantemente nulo, resultado que también fue hallado por LAGRANGE.

Hasta acá todo lo resuelto por el ilustre sabio con respecto a la función auxiliar ϱ; veamos ahora otros casos particulares donde también se puede dar una expresión explícita de ϱ.

3. - Caso de las soluciones isósceles.

En el caso de las soluciones isósceles se tiene:

$$m_1 = m_2 = m\,, \qquad m_0 \lesseqgtr m\,, \qquad r_1 = r_2 = r\,, \qquad r_0 \gtrless r\,, \qquad \dot{r}_i \neq 0\,.$$

De (1) y (2):

$$\begin{cases} p_0 = r^2 - \dfrac{r_0^2}{2}\,, & p_1 = p_2 = p = \dfrac{r_0^2}{2}\,, \\ q_0 = 0\,, & q_1 = -q_2 = \dfrac{1}{r^3} - \dfrac{1}{r_0^3}\,. \end{cases} \tag{23}$$

Por lo tanto $\sum_0^2 p_i q_i = 0$ y de la ecuación (H) surge $\varrho = \text{cte}$.

Planteando las ecuaciones (6) para cada una de las distancias iguales r_1 y r_2 se tiene:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 r_1^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{M}{r_1} + m_1 p q_2\right] = m_1[-q_2\dot{p} - q_1\varrho]\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 r_2^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{M}{r_2} + m_2(-p q_1)\right] = m_2[q_1\dot{p} - q_2\varrho]\,,$$

pero por las igualdades $r_1 = r_2$, $m_1 = m_2$, $q_1 = -q_2$ surge la condición:

$$-mq_1\,\varrho = mq_1\,\varrho$$

que solo se cumple (para $q_1 \neq 0$) si $\varrho = 0$, de manera que ϱ es constantemente nula en el caso de las configuraciones isósceles. Es fácil ver que el término lineal de la ecuación N desaparece transformándose esta en una bicuadrada; pero como $\varrho = 0$, el término independiente que tiene la misma expresión (22) también se anula.

4. - Caso del movimiento plano.

Las condiciones de LAGRANGE para el movimiento plano ([1], pag. 266) están dadas por

$$(\dot{\overline{u}}_0)^2 = \frac{\nu_0}{4\sum_0^2 p_i p_{i+1}}\,, \qquad (\dot{\overline{u}}_1)^2 = \frac{\nu_1}{4\sum_0^2 p_i p_{i+1}}\,,$$

$$(\dot{\overline{u}}_2)^2 = \frac{\nu_2}{4\sum_0^2 p_i p_{i+1}}\,,$$

luego $\sum_0^2 \gamma_i \nu_i = 4 \sum_0^2 p_i p_{i+1} \sum_0^2 \gamma_i (\dot{\overline{u}}_i)^2$ pero

(24) $$(\dot{\overline{u}}_i)^2 = \gamma_{i+1} + \gamma_{i+2}\,,$$

por lo tanto

(25) $$\sum_0^2 \gamma_i \nu_i = 8 \sum_0^2 p_i p_{i+1} \sum_0^2 \gamma_i \gamma_{i+1}\,,$$

de manera que la ecuación N en este caso queda

(26) $$(\varrho^2 + \sum_0^2 \dot{p}_i \dot{p}_{i+1})^2 - 16 \sum_0^2 p_i p_{i+1} \sum_0^2 \gamma_i \gamma_{i+1} = 0\,.$$

Pero por otra parte

$$\gamma_i = \frac{1}{2}\,[(\dot{\overline{u}}_{i+1})^2 + (\dot{\overline{u}}_{i+2})^2 - (\dot{\overline{u}}_i)^2] = \frac{\nu_{i+1} + \nu_{i+2} - \nu_i}{8\sum_0^2 p_i p_{i+1}}$$

luego la (26) se puede expresar así:

$$(\varrho^2 + \sum_0^2 \dot{p}_i \dot{p}_{i+1})^2 - \frac{1}{4} \sum_0^2 \frac{(\nu_{i+1} + \nu_{i+2} - \nu_i)(\nu_{i+2} + \nu_i - \nu_{i+1})}{\sum_0^2 p_i p_{i+1}}, \tag{27}$$

o bien:

$$(\varrho^2 + \sum_0^2 \dot{p}_i \dot{p}_{i+1})^2 - \frac{1}{4} \frac{2\sum_0^2 \nu_i \nu_{i+1} - \sum_0^2 \nu_i^2}{\sum_0^2 p_i p_{i+1}} = 0 , \tag{28}$$

que indica que en el caso plano ϱ depende exclusivamente de las distancias mutuas y de sus derivadas primeras temporales, pero no de las derivadas segundas como en el caso general.

Si ocurre que, el movimiento además de ser plano, en un cierto instante las $\dot{r}_i$ son simultáneamente nulas (caso de las superficies de velocidad nula [**3**]), los tres cuerpos se mueven como un sólido rígido y todos los $\dot{p}_i$ son nulos siendo además $\nu_i = r_i^2 \varrho^2$ lo que conduce a que (28) se transforme en una identidad, por cuanto se tiene:

$$2 \sum_0^2 \nu_i \nu_{i+1} - \sum_0^2 \nu_i^2 = \varrho^4 [2 \sum_0^2 r_i r_{i+1} - \sum_0^2 r_i^2]$$

$$\sum_0^2 p_i p_{i+1} = \frac{1}{4} [2 \sum_0^2 r_i \, r_{i+1} - \sum_0^2 r_i^2]$$

luego en este caso conviene recurrir a la ecuación P con lo que se obtiene:

$$\pi_i = r_i^2 (\dot{\bar{u}}_i)^2 = \frac{r_i^2 \nu_i}{4 \sum_0^2 p_i p_{i+1}} ,$$

$$\psi_i = p_i \gamma_i + \frac{\varrho^2}{4} = p_i \frac{\nu_{i+1} + \nu_{i+2} - \nu_i}{8 \sum_0^2 p_i p_{i+1}} + \frac{\varrho^2}{4} ,$$

de donde la ecuación P se expresa así:

$$\varrho^2 \left[\frac{1}{2} \sum_0^2 \frac{1}{m_i m_{i+1}} + \frac{1}{4 \sum_0^2 p_i p_{i+1}} \sum_0^2 \frac{r_i}{m_i^2} + \frac{1}{2 \sum_0^2 p_i p_{i+1}} \sum_0^2 \frac{p_i^2}{m_{i+1} m_{i+2}} \right] = c_1^2 . \tag{29}$$

Como vemos en el caso en que el movimiento es plano y el punto representativo de los tres cuerpos « toca » la superficie de velocidad nula ϱ depende en ese instante exclusivamente de las distancias mutuas, de las masas y de la constante del momento cinético c_1. Si esta constante es nula ϱ también lo es.

Las distancias mutuas que aparecen en (29) no son independientes, ellas deben cumplir con la ecuación de las superficies de velocidad nula para el caso plano [**3**]:

$$\left[\frac{2MU}{m_0 m_1 m_2} - c\right] \sum_0^2 \frac{r_i^2}{m_i} = c_1^2 . \tag{30}$$

Basta por lo tanto resolver la (30), hallar una solución (r_0, r_1, r_2) reemplazar esos valores en (29) y hallar ϱ para ese punto (r_0, r_1, r_2) de la superficie de velocidad nula.

5. - Caso en que las $\dot{r}_i$ son simultáneamente nulas.

Si occurre que en un cierto instante y para el caso de movimiento general, las $\dot{r}_i$ son nulas sin serlo las derivadas de order sucesivo $(\ddot{r}_i \neq 0)$, la ecuación N se reduce a una bicuadrada de expresión:

$$\varrho^4 - 4\varrho^2 \sum_0^2 r_i^2 \nu_i + 16 \sum_0^2 p_i p_{i+1} \sum_0^2 \gamma_i \gamma_{i+1} = 0 \tag{31}$$

que resuelta, conduce a valores de ϱ funciones de las r_i y las $\ddot{r}_i$. No obstante es posible hallar ϱ en función exclusivamente de las distancias mutuas r_i, de las masas y de las constantes del movimiento, de acuerdo al siguiente razonamiento.

Por ser, en ese instante, las $\dot{r}_i$ nulas; los tres cuerpos se mueven como un sólido rígido, pero como además el baricentro es fijo o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme, los tres cuerpos participan de un movimiento a la Poinsot.

La energía cinética en ese instante es totalmente de rotación y por la integral de las fuerzas vivas ella es igual a la función potencial $\mathscr{U}$ más una constante h, siendo $\mathscr{U}$ la expresión dada por (4). El conocimiento de las tres distancias mutuas para ese instante, permite conocer también la energía cinética:

$$T = \mathscr{U} + h \tag{32}$$

6

que además podemos poner en la siguiente forma:

$$T = \mathscr{I}_1 \omega_1^2 + \mathscr{I}_2 \omega_2^2 + \mathscr{I}_3 \omega_3^2 , \tag{33}$$

donde $\mathscr{I}_1$, $\mathscr{I}_2$, $\mathscr{I}_3$ son los momentos principales de inercia baricentricos, correspondiendo el tercero $\mathscr{I}_3$ a un eje baricéntrico normal al plano de los tres cuerpos; estos momentos son facilmente calculables cuando se conocen las tres distancias r_i y las masas m_i; justamente $\mathscr{I}_3$ vale:

$$\mathscr{I}_3 = \sum_0^2 r_i^2 \frac{m_{i+1} m_{i+2}}{M} , \tag{34}$$

ω_1, ω_2, ω_3 son las componentes, según esos ejes principales de inercia, del vector $\bar{\Omega}$ rotación de los tres cuerpos, considerado en ese instante como un sólido rígido. La integral del momento cinético se expresa como:

$$\mathscr{I}_1^2 \omega_1^2 + \mathscr{I}_2^2 \omega_2^2 + \mathscr{I}_3^2 \omega_3^2 = k^2 \qquad (k = \text{constante}) . \tag{35}$$

Para conservar la nomenclatura usada en los capítulos anteriores debemos hacer

$$k = c_1 \frac{m_0 m_1 m_2}{M} .$$

Las velocidades de los cuerpos P_i están dadas por las siguientes relaciones generales:

$$\dot{\bar{u}}_i = \bar{v}_{i+2} - \bar{v}_{i+1} . \tag{36}$$

Pero en este caso:

$$\bar{v}_i = \bar{\Omega} \wedge \overline{P_i - G} . \tag{37}$$

De (36) y (37) surge

$$\dot{\bar{u}}_i = \bar{\Omega} \wedge \bar{u}_i . \tag{38}$$

Por otra parte

$$\varrho = \bar{u}_0 \cdot \dot{\bar{u}}_1 - \bar{u}_1 \cdot \dot{\bar{u}}_0$$

que puede ponerse como:

$$\varrho = \bar{u}_0 \cdot (\bar{\Omega} \wedge \bar{u}_1) - \bar{u}_1 \cdot (\bar{\Omega} \wedge \bar{u}_0) = 2\bar{\Omega} \cdot (\bar{u}_1 \wedge \bar{u}_0) , \tag{39}$$

pero $\overline{u}_i \wedge \overline{u}_0$ es un vector normal al plano de los tres cuerpos cuyo módulo vale $\sqrt{\sum_0^2 p_i p_{i+1}}$ de manera que la (39) puede expresarse en la siguiente forma

$$\varrho = 2\omega_3 \sqrt{\sum_0^2 p_i p_{i+1}} \,. \tag{40}$$

Derivando con respecto al tiempo la (40) con la condición $\dot{r}_i = 0$ se tiene:

$$\dot{\varrho} = 2\dot{\omega}_3 \sqrt{\sum_0^2 p_i p_{i+1}} \tag{41}$$

pero de la ecuación (H) de LAGRANGE:

$$\dot{\omega}_3 = -\frac{1}{2} \frac{\sum_0^2 m_i p_i q_i}{\sqrt{\sum_0^2 p_i p_{i+1}}} \tag{42}$$

y de la tercer ecuación de EULER:

$$\dot{\omega}_3 = \frac{\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_3}{\mathcal{I}_3} \omega_1 \omega_2 \,. \tag{43}$$

La eliminación de $\dot{\omega}_3$ entre (42) y (43) permite hallar ω_1, ω_2 en función de las distancias mutuas, mientras que las (33) y (35) permiten hallar ω_3 en función de esas distancias mutuas y de la (40) expresar ϱ también en función de esas mismas distancias.

En definitiva, para el caso en que los tres cuerpos se muevan en el espacio, en un instante en el cual las $\dot{r}_i$ son simultáneamente nulas, las r_i satisfacen en ese instante a la ecuación de las superficies de velocidad nula para el caso general que ya hemos dado en una memoria previa [**3**]; el conocimiento de las tres distancias mutuas para ese instante permiten hallar los momentos principales de inercia y por ende el elipsoide central de inercia, además permiten hallar el vector rotación $\overline{\Omega}$ y la energía cinética T y como el vector constante momento cinético con respecto al baricentro $\overline{L}_G$ es un dato del problema, quedan establecidos todos los parámetros que definen el movimiento a la Poinsot instantáneo.

Bibliografia.

[1] J. L. Lagrange, *Essai sur le problème des trois corps*, Oeuvres, **6**.

[2] C. Agostinelli, *Sul problema dei tre corpi*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **21** (1950), 165-195.

[3] F. R. Marsicano, *Sobre las superficies de velocidad nula correspondientes al problema de tres cuerpos*, An. Soc. C. Argentina **188** (1969).

Résumé.

Dans le problème des trois corps envisagé par Lagrange, il introduit une fonction auxiliaire σ qui satisfait à une équation algébrique de quatrième degrée à coefficients fonctions des distances mutuelles et de leurs derivées temporelles première et seconde. Cette équation de quatrième degrée, que Lagrange appelle « N » dans son mémoire, joue un rôle fondamental dans tout le procès de calcul de l'illustre savant: c'est pourquoi la connaissance de ses racines, même dans quelques cas particuliers permet de pénetrer dans l'étude du mouvement des trois corps.

Dans ce travail nous passons en revue quelques solutiones remarquables déjà signalées par Lagrange, et quelques autres que nous avons trouvées et que aussi bien contribuent à la connaissance de cette probléme classique de la mécanique céleste.

* * *