Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 51-65

RADU ROSCA (*)

Sur une classe de variétés isotropes de c-index nul, incluses dans un espace pseudo-riemannien doué d'une structure paracohermitienne. (**)

Introduction.

Les inclusions x telles que les variétés horizontales $\alpha = 0$ de la structure $S_{p.c.h.}$ qu'elles induisent, soient intégrables, sont caractérisées par l'annulation de toutes les 1-formes de torsions (formes préalablement définies) associées à x. Une pareille inclusion est dénommée à *connexion normale triviale* (et notée par x_T) et c'est surtout de ce type d'inclusion qu'il est question dans le présent ouvrage. Pour une inclusion x_T le champ $\boldsymbol{p} \mapsto \mathscr{I}^{\perp}_{p}(V^{n+1}_{(n)})$ donne à V^{n+1} une structure de *variété feuilletée* [3] *et* $\alpha = 0$, sont des sous-variétés (*totalement isotropes*) asymptotiques de $V^{n+1}_{(n)}$.

On associe à x_T deux 1-formes β et π dénommées respectivement la *forme distinguée* et son *associée*, et deux champs $\boldsymbol{X}_\beta$ et $\boldsymbol{X}_w$ dénommés respectivement *champ distingué normal* et *champ distingué supplémentaire*.

Alors la condition nécessaire et suffisante pour que $\boldsymbol{X}_w$ soit *parallèle* sur $V^{n+1}_{(n)}$ est que la forme β soit fermée. Différentes autres propriétés qui résultent d'une inclusion x_T sont mises en évidence. Dans le cas où α est confermée, on définit les inclusions x_T qui sont aussi *minimales*. Pour une pareille inclusion on a $\operatorname{div} \boldsymbol{X}_\beta = \langle \boldsymbol{X}_\beta, \boldsymbol{X}_w \rangle$ et dans le cas où $\operatorname{div} \boldsymbol{X}_\beta = \text{const}$, les *opérateurs harmoniques* de α et β satisfont à la relation (de G. DE RHAM [11]) symétrique $\Delta\alpha \wedge_* \beta = \Delta\beta \wedge_* \alpha$.

(*) Indirizzo: c/o prof. L. Vanhecke, Katolische Universiteit de Leuven, Faculteit der Wetnschappen, Department Wiskunde, Celestinenlaan 2008, 3030 Heverlee, Belgio.

(**) Ricevuto: 4-V-1973.

Finalement et dans le cas ou $n = 2p$, on considère sur $V_{(n)}^{n+1}$ une certaine structure *presque cosymplectique* locale $C(\Omega, \alpha)$ définie par la 1-forme α de $S_{p.c.h.}$ induite par x_τ et par les composantes du champ X_β. Par rapport à cette structure, certaines propriétés des *parenthèses de Lagrange pfaffiennes* [4] *des* formes π et β sont discutées.

1. – Soit $V^{n,n+1}$ un espace pseudo-riemannien de signature $(n, n+1)$ et soit $\mathscr{I}_p(V^{n,n+1})$ l'espace tangent en chaque point $\boldsymbol{p} \in V^{n,n+1}$. On peut écrire

$$\mathscr{I}_p(V^{n,n+1}) = \mathscr{H}_p^{2n} \oplus D_p \tag{1}$$

où $\mathscr{H}_p^{2n}$ et D_p sont respectivement un espace *parahermitien vectoriel* [2] de dimension $2n$ et une *droite spatiale.* Soient $\mathscr{S}_p^n$ et $\mathscr{S}_p^{*n}$ *l'espace temporel* et *l'espace spatiale* qui définissent un automorphisme $\mathscr{U}$ sur $\mathscr{H}_p^{2n}$, tel que $\mathscr{U}^2 = +1$. Le champ D_p est orthogonal à $\mathscr{H}_p^{2n}$ et $\mathscr{U}(X) = 0$ pour tout champ $\boldsymbol{X} \in D_p$. Soient ξ_i, ξ_{i^*} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ i^* = i + n)$ les vecteurs *isotropes* qui définissent la base canonique de $\mathscr{H}_p^{2n}$ et $\xi = \xi_{2n+1}$ le vecteur unitaire (spatiale) de D_p.

Si $\boldsymbol{e}_i \in \mathscr{S}_p^n$ et $\boldsymbol{e}_{i^*} \in \mathscr{S}_p^{*n}$ forment une base orthonormale, alors moyennant la transformation

$$\xi_i = \frac{\boldsymbol{e}_i + \mathscr{U}\boldsymbol{e}_{i^*}}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

on voit facilement que les repères $\{\boldsymbol{p}, \xi_A;\ A, B = 1, \ldots, 2n+1\}$ sont *normés* c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{lll} \langle \xi_i, \xi_{i^*}\rangle = 1\,, & \langle \xi, \xi\rangle = -1\,, & \\ \langle \xi_i, \xi_A\rangle = 0\,, & \langle \xi_{i^*}, \xi_B\rangle = 0\,, & A \neq i^*\,,\ B \neq i\,. \end{array}\right. \tag{3}$$

Si $\{\bar{\alpha}^A\}$ est le *corepère* associé à $\{\boldsymbol{p}, \xi_A\}$ et $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^{2n+1}$ alors l'élément linéaire $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ de $V^{n,n+1}$ est

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \bar{\alpha}^A \otimes \xi_A\,. \tag{4}$$

Moyennant (3) on déduit de (4) que la métrique $\bar{\Lambda}_1$ de $V^{n,n+1}$ a pour expression

$$\bar{\Lambda}_1 = \langle \mathrm{d}\boldsymbol{p}, \mathrm{d}\boldsymbol{p}\rangle = 2\sum_i \bar{\alpha}^i \bar{\alpha}^{i^*} - (\bar{\alpha})^2\,. \tag{5}$$

La forme quadratique $\mathscr{X} = 2\sum_i \bar{\alpha}^i \bar{\alpha}^{i^*}$ est la forme parahermitienne de $\mathscr{H}_p^{2n}$ et $\bar{\alpha}$ est le *covecteur spatial* associé. La forme $\mathscr{X}$ est échangeable avec la 2-forme

$\mathscr{U} \sum_i \bar{\alpha}^i \wedge \bar{\alpha}^{i*}$ et les deux sont invariantes pour le groupe *unitaire* U^n (ce groupe est isomorphe au groupe linéaire réel L^n [2]). Par des considérations analogues à celles faites par J. BOUZON dans [1], nous dirons que le triplet $\{\mathscr{X}, \bar{\alpha}, \xi\}$ définit une *structure paracohermitienne* $S_{p.c.h.}$ sur $V^{n,n+1}$. Soit $\mathscr{F}_\xi = \cup\{\boldsymbol{p}, \xi_A\}$ le *fibré principal* des repères $\{\boldsymbol{p}, \xi_A\}$ et soient $\bar{\alpha}^A_B = l^A_{BC}\bar{\alpha}^C$ les formes de connexion sur $\mathscr{F}_\xi$.

L'espace $V^{n,n+1}$ est structuré par la connexion

$$\nabla\xi_A = \bar{\alpha}^B_A \otimes \xi_B \tag{6}$$

et en vertu de (3) il vient

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^i_{i*} = 0\,, & \bar{\alpha}^{i*}_i = 0\,, \qquad \bar{\alpha}^{2n+1}_{2n+1} = 0\,, \\ \bar{\alpha}^i_i + \bar{\alpha}^{i*}_{i*} = 0\,, & \bar{\alpha}^i_{i*} + \bar{\alpha}^i_{i*} = 0\,, \\ \bar{\alpha}^{2n+1}_i + \bar{\alpha}^{i*}_{2n+1} = 0\,, & \bar{\alpha}^i_{2n+1} + \bar{\alpha}^{2n+1}_i = 0\,. \end{cases} \tag{7}$$

La connexion $\overline{\nabla}$ étant sans torsion, les deux groupes d'équations de structure sont

$$\alpha \wedge \bar{\alpha}^A = \bar{\alpha}^B \wedge \bar{\alpha}^A_B\,, \tag{8}$$

$$\alpha \wedge \bar{\alpha}^A_B = \bar{\alpha}^C_B \wedge \bar{\alpha}^A_C + \bar{\Omega}^A_B\,, \tag{8'}$$

où $\bar{\Omega}^A_B$ sont les 2-formes de courbure, sur $V^{n,n+1}$.

2. – Soit maintenant $x\colon V^q \mapsto V^{q+\bar{q}}$ l'inclusion d'une C^∞-variété V^q de dimension q et codimension $\bar{q}$ dans $V^{q+\bar{q}}$. La variété V^q est *isotrope de défaut d* $(0 < d \leqslant q)$ si le rang de la matrice Jacobienne de x est partout $q-d$ et nous dénommons $|\bar{q}-d|$ le *c-index* de la variété isotrope V^q. Nous nous proposons d'étudier ici les variétés isotropes $V^{n+1}_{(n)}$ de c-index $= 0$, qui sont incluses dans un espace pseudo-riemannien $V^{n,n+1}$ dont l'*index* n est égal au défaut de $V^{n+1}_{(n)}$. Eu égard à (3) et (4) une variété $V^{n+1}_{(n)}$ peut être considérée comme étant une variété intégrale du système

$$\bar{\alpha}^{i*} = 0\,. \tag{9}$$

Si nous notons par α^r $(r = 1, 2, \ldots, n, 2n+1)$ et par α^A_B respectivement les valeurs des $\bar{\alpha}^A$ et des $\bar{\alpha}^A_B$ induites par x, la restriction de $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ à $V^{n+1}_{(n)}$ s'écrit

$$\mathrm{d}x(\boldsymbol{p}) = \alpha^i \otimes \xi_i + \alpha \otimes \xi \Rightarrow \langle \mathrm{d}x(\boldsymbol{p}), \mathrm{d}x(\boldsymbol{p})\rangle = -(\alpha)^2\,. \tag{10}$$

Désignons par $\mathscr{I}_p(V^{n+1}_{(n)})$ l'espace tangent en $\boldsymbol{p}$ à $V^{n+1}_{(u)}$ et par $\mathscr{I}^{\perp}_p(V^{n+1}_{(n)})$ l'espace *totalement normal*. Ce dernier est *self-orthogonal* et en vertu des hypothèses faites on a

$$\mathscr{I}_p(V^{n+1}_{(n)}) = \mathscr{I}^{\perp}_p(V^{n+1}_{(n)}) \oplus D_p \,. \tag{11}$$

Si nous notons par $\mathscr{I}_{p.s.}(V^{n+1}_{(n)})$ l'espace *supplémentaire* de $\mathscr{I}_p(V^{n+1}_{(n)})$ dans $\mathscr{I}_p(V^{n,n+1})$, on peut écrire

$$\mathscr{I}_{p.s.}(V^{n+1}_{(n)}) = \mathscr{I}_p(V^{n,n+1})/\mathscr{I}_p(V^{n+1}_{(n)}) \,. \tag{12}$$

Remarque. Puisque $\mathscr{I}^{\perp}_p(V^{n+1}_{(n)}) \subset \mathscr{I}_p(V^{n+1}_{(n)})$ on peut dire encore que $\mathscr{I}_p(V^{n+1}_{(n)})$ est un espace *co-isotrope* [**3**].

Soit $\boldsymbol{X}$ un champ quelconque sur $V^{n+1}_{(n)}$ et soit ∇ la restriction de $\overline{\nabla}$ à $V^{n+1}_{(n)}$. On peut écrire

$$\nabla \boldsymbol{X} = (\nabla \boldsymbol{X})_t + (\nabla \boldsymbol{X})_s \,,$$

où $(\nabla \boldsymbol{X})_t$ et $(\nabla \boldsymbol{X})_s$ sont respectivement la partie tangentielle et la partie supplémentaire sur $V^{n+1}_{(n)}$ dans $V^{n,n+1}$. Si $(\nabla \boldsymbol{X})_s = 0$, nous dirons que $\boldsymbol{X}$ est *parallèle dans le faisceau supplémentaire* $\cup\, \mathscr{I}_{p.s.}(V^{n+1}_{(n)})$ [**5**]. En nous rapportant à (6), nous conviendrons d'appeler les formes

$$\langle \nabla \xi_i, \xi_k \rangle = \alpha^{k*}_i \qquad (i < k) \tag{14}$$

les *formes de torsion* (cette dénomination est légitimée par le fait que les indices i, k sont les indices normaux associées à x). En adoptant la même terminologie que dans [**6**], nous dirons que toute inclusion x telle que $\alpha^{k*}_i = 0$, est une *inclusion normale triviale*.

Soit alors

$$\boldsymbol{N} = \textstyle\sum_i \lambda_i \xi_i \in \mathscr{I}^{\perp}_p(V^{n+1}_{(n)}) \,, \qquad \lambda_i \in \mathscr{D}(V^{n+1}_{(n)}) \tag{15}$$

un champ normal quelconque. A l'aide de (6) on déduit

$$\nabla \boldsymbol{N} = \textstyle\sum_i (\mathrm{d}\lambda_i + \sum_k \lambda_k \alpha^i_k) \otimes \xi_i + \sum_i \lambda_i \alpha^{k*}_i \otimes \xi_{k*} \tag{16}$$

et eu égard à (13) on trouve

$$(\nabla \boldsymbol{N})_s = 0 \Leftrightarrow \alpha^{k*}_i = 0 \,. \tag{17}$$

On a donc le

Lemme. *Etant donné l'inclusion* $x\colon V^{n+1}_{(n)} \to V^{n,n+1}$ *la condition nécessaire et suffisante pour que tout champ normal sur* $V^{n+1}_{(n)}$ *soit parallèle dans le faisceau supplémentaire, est que* x *soit une inclusion normale triviale.* (Une pareille inclusion sera notée par la suite par x_T).

Mais l'espace totalement normal local étant déterminé par les vecteurs isotropes ξ_i, il résulte que les secondes formes fondamentales φ_i associées à x sont exprimées par

$$\varphi_i = -\langle \mathrm{d}x(\boldsymbol{p}), \nabla\xi_i \rangle = \alpha\alpha_i^{2n+1} - \textstyle\sum_k \alpha^k \alpha_i^k \,. \tag{18}$$

D'autre part la différentiation extérieure du système (9) donne après calculs

$$\alpha_i^{k*} \wedge \alpha = 0 \,, \tag{19}$$

d'où

Théorème. *Etant donnée l'inclusion* $x\colon V^{n+1}_{(n)} \to V^{n,n+1}$, *toutes les formes de torsion associées à* x *sont conformes à la* 1*-forme induite par* x, *de la structure* $S_{p.c.h.}$ *définie sur* $V^{n,n+1}$.

3. – Exprimons maintenant que les variétés horizontales $\alpha = 0$, de la structure $S_{p.c.h.}$ induites par x_T sont intégrables.

On devra écrire

$$\alpha \wedge (d \wedge \alpha) = 0 \tag{20}$$

et (19), (20) donnent

$$\alpha_i^{k*} = 0 \,, \tag{21}$$

$$\alpha_i^{2n+1} = a_i\alpha \,; \qquad a_i \in \mathscr{D}(V^{n+1}_{(n)}) \,. \tag{21'}$$

Eu égard à (12) on voit facilement que les variétés horizontales définies par $\alpha = 0$, sont *totalement isotropes* [7] (nous les notons par $V^{n}_{(n)}$) et sont tangentes en chaque point à l'espace isotrope $\mathscr{I}^{\perp}_p(V^{n+1}_{(n)}) \subset \mathscr{I}_p(V^{n+1}_{(n)})$.

On peut donc dire puisque $V^{n}_{(n)} \subset V^{n+1}_{(n)}$, que l'application $\boldsymbol{p} \mapsto \mathscr{I}^{\perp}_p V^{n+1}_{(n)}$ est un *feuilletage* de $V^{n+1}_{(n)}$ [**3**], et en vertu de (11) il résulte que la droite D_p est *transversale* à ce feuilletage.

De (18) et (21) on déduit aussitôt

$$\varphi_i = a_i(\alpha)^2 . \tag{22}$$

Il résulte de là que l'*invariant de Chern* associé à x_τ est 1, et que les variétés $V_n^{(n)}$ sont les sous-variétés *asymptotiques* de $V_{(n)}^{n+1}$.

De plus la comparaison de (22) et (10) permet de dire que toute inclusion normale triviale est aussi une inclusion *ombilicale*. D'autre part la courbure de KILLING-LIPSCHITZ $K(\boldsymbol{p}, \xi_i)$ dans la direction d'un vecteur normal ξ_i est comme on le sait [**8**]

$$K(\boldsymbol{p}, \xi_i) = \det(\varphi_i) .$$

Dans le cas qui nous occupe la forme développable (22) des φ_i, montre aussitôt que *toutes* les courbures de KILLING-LIPSCHITZ sont nulles.

En faisant maintenant usage de (8) et compte tenu de (21) la différention extérieure de α donne

$$d \wedge \alpha = (a_i \alpha^i) \wedge \alpha . \tag{23}$$

Posons

$$\beta = a_i \alpha^i \tag{24}$$

et dénommons

(i) β la 1-*forme distinguée* associée à l'inclusion x_τ,

(ii) α_i^{2n+1} et Ω_i^{2n+1} respectivement les formes de *connexion* mixtes et les 2-formes de *courbures mixtes* associées à x_τ.

La différentiation extérieure des équations (21) donne

$$a_i d \wedge \alpha = \Omega_i^{2n+1} + (a_k \alpha_i^k - da_i) \wedge \alpha \tag{25}$$

et en vertu de (19) il vient

$$\Omega_i^{2n+1} \wedge \alpha = 0 . \tag{26}$$

Si nous considérons le système de PFAFF Σ_a

$$da_i = a_k \alpha_i^k \tag{27}$$

celui-ci est de rang n et à $n+1$ inconnues. Par conséquent conformément à la théorie générale il est complètement intégrable. Nous pouvons donc supposer que les fonctions a_i sont telles que l'on ait

$$\Omega_i^{2n+1} = a_i d \wedge \alpha \tag{28}$$

et eu égard à (27) on déduit de (24)

$$d \wedge \beta = \alpha \wedge (a_i \alpha_{2n+1}^i) . \tag{29}$$

Posons

$$\pi = a_i \alpha_{2n+1}^i \tag{30}$$

et appelons π la 1-*forme associé* de β.

Notons maintenant par α_{tr} la 1-*forme trace associée* à x_τ, soit (puisque $\alpha_{2n+1}^{2n+1} \equiv 0$) $\alpha_{tr} = \sum_i \alpha_i^i$. De (8′) et (21) on déduit

$$d \wedge \alpha_{tr} = \alpha \wedge \pi + \sum_i \Omega_i^i , \tag{31}$$

où $\sum_i \Omega_i^i$ représente la 2-*forme de Ricci associée à* x_τ. Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que la 1-forme trace soit égale à la 2-forme de Ricci est que β soit fermée.

A titre de verification on obtient de Σ_a par différentiation extérieure

$$a_k \Omega_i^k + a_i \alpha \wedge \pi = 0 \qquad (k, i = 1, \ldots, n) \tag{32}$$

et en faisant usage de l'identité de Bianchi (sous forme extérieure)

$$d \wedge \Omega_k^i = \alpha_k^h \wedge \Omega_h^i - \Omega_k^h \wedge \alpha_h^i$$

on déduit de (25)

$$a_k \Omega_i^k \wedge \alpha = 0$$

(la différentiation extérieure de (32) est identiquement vérifiée).

Nous énoncons

Théorème. *Etant donnée l'inclusion* $x\colon V_{(n)}^{n+1} \to V^{n,n+1}$, *soit* α *la* 1-*forme induite par* x, *de la structure* $S_{p.c.h.}$ *et soient* α_i^{2n+1} *et* Ω_i^{2n+1} *respectivement les formes de connexions mixtes et les* 2-*formes de courbure mixtes associées à* x. *Si*

α est completement intégrable, alors l'espace tangent aux sous-variétés $\alpha = 0$, est $\mathscr{I}_p^{\perp}(V_{(n)}^{n+1})$ et l'on a les propriétés suivantes:

(i) *x est une inclusion normale triviale, les formes de connexion mixtes sont conformes à α et les formes de courbures mixtes sont divisibles par α;*

(ii) *le champ $\boldsymbol{p} \mapsto \mathscr{I}_p^{\perp}(V_{(n)}^{n+1})$ donne à $V_{(n)}^{n+1}$ une structure de variétés feuilletée et $\alpha = 0$, sont des sous-variétés asymptotiques de $V_{(n)}^{n+1}$;*

(iii) *l'inclusion x_T est ombilicale et toutes les courbures de Killing-Lipschitz associées à x_T sont nulles;*

(iv) *la condition nécessaire et suffisante pour que la 1-forme β qui divise $d \wedge \alpha$ (la forme distinguée) soit fermée, est que la différentielle de la 1-forme trace $\sum \alpha_i^i$ soit égale à la 2-forme de Ricci.*

Remarque. Calculons *la second forme métrique fondamentale Λ_2 de $V_{(n)}^{n+1}$* dans le sens de F. Bompiani [**9**]. En négligent les différentielles algébriques $d\alpha_B^A$ on déduit de (6), (10)

$$\Lambda_2 = \langle d^2x(\boldsymbol{p}), d^2x(\boldsymbol{p})\rangle = -\alpha^2\{\beta^2 + 2a_i\alpha_k^i\alpha^k\} ,$$

l'expression de Λ_2 montre aussitôt que les sous-variétés asymptotiques de $V_{(n)}^{n+1}$ sont *doublement totalement isotropes* [**9**].

4. – Soient $\boldsymbol{X}(X^r)$ et $\boldsymbol{Z}(Z^r)$ ($r, s = 1, 2, \ldots, n, 2n+1$) deux champs tangents sur $V_{(n)}^{n+1}$. Eu égard aux expressions (17) des formes fondamentales φ_i, nous définissons le *shape opérateur normal* des champs [**10**] sur $V_{(n)}^{n+1}$, par l'opérateur bilinéaire et autoadjoint $S_Z \cdot \mathscr{I}_p \mapsto \mathscr{I}_p^{\perp}$ tel que

$$S_z(\boldsymbol{X}) = l_{rs}^{i^*} X^r Z^s \xi_{i^*} . \tag{33}$$

Nous dirons d'après Otsuki [**10**] que si pour $\forall\, \boldsymbol{X} \in \mathscr{I}_p(V_{(n)}^{n+1})$ on a

$$S_z(\boldsymbol{X}) = \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}\rangle \boldsymbol{W} , \tag{34}$$

alors $\boldsymbol{W} \in \mathscr{I}_p^{\perp}(V_{(n)}^{n+1})$ est un *champ normal principal* de $V_{(n)}^{n+1}$ dans $V^{n,n+1}$ qui correspond au champ tangentiel $\boldsymbol{Z}$.

Cherchons le champ normal $\boldsymbol{W}(W^i)$ qui correspond à un champ tangentiel $\boldsymbol{Z}$ porté par la droite D_p de la structure $S_{p.c.h.}$. A l'aide (7), (33) on déduit de (34)

$$\boldsymbol{Z} = Z^{2n+1}\xi \Rightarrow \alpha_i^{k^*} = 0 , \tag{35}$$

$$\boldsymbol{W} = -\textstyle\sum_i a_i \xi_{i^*} . \tag{36}$$

Théorème. *Soit l'inclusion* x: $V_{(n)}^{n+1} \mapsto V^{n,n+1}$ *et soit* ξ *le vecteur spatial tangentiel associé à* x. *La condition nécéssaire et suffisante pour qu'il existe un champ normal principal* $\boldsymbol{W}$ *correspondant à un champ colinéaire à* ξ *est que* x *soit une inclusion normale triviale. Le champ* $\boldsymbol{W}$ *a alors les mêmes composantes que la forme* β.

5. – Convenons d'appeler les champs

$$X_\beta \in \mathscr{I}_p^\perp(V_{(n)}^{n+1}) \qquad \text{et} \qquad X_w = -\boldsymbol{W} \in \mathscr{I}_{p.s.}(V_{(n)}^{n+1})$$

définis par

$$X_\beta = \textstyle\sum_i a_i \xi_i \tag{37}$$

et, par (36), respectivement le champ *normal distingué* et le *champ supplémentaire distingué associés à* x_T.

On a

$$\langle X_\beta, X_w \rangle = \textstyle\sum_i (a_i)^2 = \nu = X_\beta \lrcorner\, \beta \tag{38}$$

et l'on peut considérer ce produit scalaire comme étant la *norme euclidienne* du point $\boldsymbol{a}(a_i)$ de $\mathbb{R}^n$.

Cherchons dans quelles conditions X_w est parallèle sur $V_{(n)}^{n+1}$. Eu égard à (6), (7), on retrouve la condition (27) à laquelle s'ajoute

$$\pi = 0 \Rightarrow d \wedge \beta = 0\,, \tag{39}$$

$$\alpha_{k*}^i = 0\,. \tag{39'}$$

La différentiation extérieure des équations (39') donne en plus les relations

$$\Omega_{k*}^{k-1} + \Omega_{k*-1}^{k} = 0\,. \tag{40}$$

En convenant d'appeler Ω_{k*}^i les 2-formes de *courbure supplémentaire* et eu égard à (29) nous avons donc le

Théorème. *Si le champ supplémentaire distingué* X_w *associé à une inclusion* x_T: $V_{(n)}^{n+1} \mapsto V^{n,n+1}$ *est parallele sur* V^{n+1} *alors on a les propriétés suivantes*:

(i) *la* 1-*forme distinguée* β *associée à* x_T *est fermée*,

(ii) *les* 2-*formes de courbure supplémentaire satisfont à la relation* (40).

6. – Considérons la *n-forme vectorielle*

$$H_\alpha = « // » \underbrace{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_v \dots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_a}_{n} \xi_i \dots \xi_n \cdot \xi « // » \tag{41}$$

où « // », « // » signifie l'opération combinée du produit extérieur (Λ) des formes et du produit extérieur ($\times$) des vecteurs et

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}_a = \alpha^i \otimes \xi_{i*} + \alpha \otimes \xi$$

est l'élément *linéaire associé à* $\mathrm{d}x(\boldsymbol{p})$ [7]. En faisant usage de l'application $(2\cdot n)\, \xi \mapsto \xi$ (après avoir préalablement orienté l'espace) et de (6), on déduit après calculs de (41)

$$d \wedge \boldsymbol{H}_\alpha = \{\textstyle\sum_i (\operatorname{div} \xi_i + \operatorname{trace}(l^i_{jk}))\, \xi_i + (\operatorname{div} \xi)\, \xi\} \otimes \eta\,. \tag{42}$$

Si nous supposons que le champ ξ est de divergence nulle sur $V^{n+1}_{(n)}$, on a

$$\mathscr{L}_\xi \eta = d \wedge (\xi \lrcorner\, \eta) = d \wedge \psi = (\operatorname{div}_\eta \xi)\eta = 0\,, \tag{43}$$

où $\psi = \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^n$.

Dans ce cas nous définissons le vecteur normal

$$\boldsymbol{H} = \textstyle\sum_i (\operatorname{div} \xi_i + \operatorname{trace}(l^i_{jk}))\, \xi_i \tag{44}$$

qui ne dépend pas du choix du repère $\{\boldsymbol{p}, \xi_A\}$, comme étant le *vecteur de courbure moyenne* associé à x_τ [7]. Si $\boldsymbol{H} \equiv 0$, nous disons que l'inclusion x_τ *est minimale*. Dans cette hypothèse nous allons donner une interprétation liée à la théorie des champs, pour le produit scalaire ν défini par (38).

En premier lieu on trouve que l'*adjointe* β^* de β par rapport à l'élément de volume η de $V^{n+1}_{(n)}$, est exprimée par

$$\beta^* = \{\textstyle\sum (-1)^{i-1} a_i \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \dots \wedge \alpha^n\} \wedge \alpha \tag{45}$$

(le terme « chapauté » doit être omis).

L'on a donc

$$\alpha \wedge \beta^* = (\beta, \alpha)\eta = 0 \tag{46}$$

et cette relation exprime que les formes α et β sont *orthogonales*.

Si nous posons

$$\mu = \sum (-1)^{i-1} a_i \alpha^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \dots \wedge \alpha^n \tag{47}$$

on déduit compte tenu de (44)

$$d \wedge \mu = \langle \boldsymbol{H}, \boldsymbol{X} \rangle \psi + \alpha \wedge \Pi_{n-1} \tag{48}$$

où Π_{n-1} est une certaine $(n-1)$-forme.

Eu égard à (48) la différentation extérieure de β^* donne

$$d \wedge \beta^* = \langle \boldsymbol{H}, \boldsymbol{X} \rangle \eta + \mu \wedge \beta \wedge \alpha\,. \tag{49}$$

Pour établir la formule que nous avons en vue, calculons la divergence du champ normal principal $\boldsymbol{X}_\beta$ défini par (37). On a par définition et en vertu de (48)

$$\mathscr{L}_{X\beta}\eta = (\operatorname{div}_\eta \boldsymbol{X}_\beta)\eta = \mathscr{L}_{X\beta}\psi \wedge \alpha + \psi \wedge \mathscr{L}_{X\beta}\alpha\,. \tag{50}$$

Si nous supposons que l'inclusion x_τ est minimale ($\boldsymbol{H} = 0$), on déduit à l'aide (48), (38), (23), (24) et compte tenu que $\boldsymbol{X}_\beta$ est un champ horizontal pour la structure $S_{p.c.h.}$

$$\mathscr{L}_{X\beta}\eta = \psi \wedge \mathscr{L}_{X\beta}\alpha = \psi \wedge (\boldsymbol{X}_\beta \lrcorner\, (\beta \wedge \alpha)) = \nu\eta\,. \tag{51}$$

Ainsi si $\boldsymbol{H} = 0$, on a

$$\operatorname{div}_\eta \boldsymbol{X}_\beta = \nu = \langle \boldsymbol{X}_\beta, \boldsymbol{X}_w \rangle\,. \tag{52}$$

Montrons que dans ce cas les opérateurs harmoniques Δ de α et β sont reliés par une relation remarquable.

Le support $V_{(n)}^{n+1}$ étant non compacte, on a la formule générale de G. DE RHAM [**11**]

$$d \wedge (\alpha \wedge (d \wedge \beta)^* - \beta \wedge (d \wedge \alpha)^* + \delta\alpha \wedge \beta^* - \delta\beta \wedge \alpha^*)^* = \\ = \Delta\alpha \wedge \beta^* - \Delta\beta \wedge \alpha^*\,. \tag{53}$$

En remarquant que $\alpha^* = \psi$ et puisque par hypothèse $d \wedge \psi = 0$, il résulte que la forme α est *coférmée* ($\delta\alpha = 0$). D'autre part

$$\operatorname{div}_\eta \boldsymbol{X}_\beta = \nu \Rightarrow \delta\beta = -\nu$$

et en faisant usage de (53) il vient

$$2\,d\nu \wedge \psi = \Delta\alpha \wedge \mu \wedge \alpha - \Delta\beta \wedge \psi\,. \tag{54}$$

Il résulte de ci-dessus que si $\operatorname{div}_\eta \mathbf{X}_\beta = \text{const.}$ on a

$$\Delta\alpha \wedge \beta^* \doteq \Delta\beta \wedge \alpha^*\,. \tag{54'}$$

Nous formulons

Théorème. *Etant donnée une inclusion* $x_\tau\colon V^{n+1}_{(n)} \mapsto V^{n,n+1}$, *soient* α *et* β *respectivement la* 1*-forme de la structure* $S_{p.c.h.}$ *induite par* x_τ *et la* 1*-forme distinguée associée à* x_τ *et soient* $\mathbf{X}_\beta$ *et* $\mathbf{X}_w$ *respectivement le champ normal et le champ supplémentaire distingué associés à* x_τ. *Alors*

(i) α *et* β *sont orthogonales,*

(ii) *si l'inclusion* x_τ *est minimale on a* $\operatorname{div}_\eta \mathbf{X}_\beta = \langle \mathbf{X}_\beta, \mathbf{X}_w \rangle$,

(iii) *si l'inclusion* x_τ *est minimale et* $\operatorname{div}_\eta \mathbf{X}_\beta = \text{const}$ *les opérateurs harmoniques de* α *et* β *satisfont à* $\Delta\alpha \wedge \beta^* \doteq \Delta\beta \wedge \alpha^*$.

7. – Supposons $n = 2p$ et considérons la 2-forme Ω de rang $2p$

$$\Omega = \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i<k} a_i a_k \alpha^i \wedge \alpha^k, \tag{55}$$

ayant pour *bivecteur fondamental* $a_{ik} = a_i a_k$.

Dans le cas d'une inclusion $x_\tau\colon V^{n+1}_{(n)} \mapsto V^{n,n+1}$ munissons $V^{n+1}_{(n)}$ avec la structure *presque cosymplectique locale* $C(\Omega, \alpha)$ ayant pour *champ de Reeb* le vecteur ξ. De (31) on obtient pour la p-ième puissance extérieure de Ω

$$\overset{p}{\wedge}\,\Omega = \frac{1}{2^p}\, a_1\, a_2 \ldots a_{2p} \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^{2p}, \tag{56}$$

où

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{2^p}\, a_1\; a_2 \ldots a_{2p}\,, \tag{57}$$

est l'*agrégat de Pfaff d'ordre* $2p$ *de* Ω.

Si nous posons

$$\psi = \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^{2p}, \tag{58}$$

l'élément de volume η de $V^{n+1}_{(n)}$ s'écrit

$$\eta = \alpha \wedge \psi = \frac{1}{\Delta_{2p}} L^p_\alpha, \tag{59}$$

où L^p_α est l'*opérateur* $L^p : \alpha \mapsto \alpha \wedge (\overset{p}{\wedge}\,\Omega)$.

Rappelons [4] qu'étant donnée une variété V munie d'une structure presque cosymplectique $C(\Omega, \alpha, \xi)$, la *parenthèse de Lagrange pfaffienne* $\boldsymbol{l}(\omega)$ d'une 1-forme $\omega \in \Lambda^1(V)$ est définie par l'application $l : \bar{\Lambda}^1(V) \mapsto \mathscr{I}(V)$, telle que

$$\boldsymbol{l}(\omega) \lrcorner\, \alpha = 0\,, \qquad \boldsymbol{l}(\omega) \lrcorner\, \Omega = (\xi \lrcorner\, \omega)\alpha - \omega\,. \tag{60}$$

Si $\theta \in \Lambda^1(V)$ est une 1-forme quelconque on a aussi la formule

$$(\boldsymbol{l}(\omega) \lrcorner\, \theta)\,\alpha \wedge (\overset{p}{\wedge}\,\Omega) = p\omega \wedge \theta \wedge \alpha \wedge (\overset{p-1}{\wedge}\,\Omega)\,. \tag{61}$$

En revenant au cas qui nous occupe soit $\boldsymbol{l}(\pi)$ la parenthèse de LAGRANGE pfaffienne de la 1-forme π définie par (30). Si la forme distinguée β est fermée, on déduit de (29) et de (43) (où l'on remplace θ par β)

$$\boldsymbol{l}(\pi) \lrcorner\, \beta = 0\,.$$

Mais puisque l'on a aussi $\mathscr{L}_{\boldsymbol{l}(\pi)}\beta = 0$, il résulte que si la forme β est fermée, alors elle est un *invariant intégral absolu* du champ $\boldsymbol{l}(\pi)$.

La forme distinguée β étant *semi-basique* par rapport à la structure C, on trouve en faisant usage de (60) et eu égard à (55)

$$\boldsymbol{l}(\beta) = \frac{1}{\Delta_{2p}} \sum (-1)^i a_1 a_2 \ldots \hat{a}_i \ldots a_n \xi_i\,. \tag{62}$$

Le champ $\boldsymbol{l}(\beta)$ étant *horizontal* par rapport à C, on a

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{l}(\beta)}\eta = \operatorname{div}_\eta \boldsymbol{l}(\beta)\eta = d \wedge (\boldsymbol{l}(\beta) \lrcorner\, \eta) = \{d \wedge \boldsymbol{l}(\beta) \lrcorner\, \psi\} \wedge \alpha\,. \tag{63}$$

D'autre part, en faisant usage de l'opérateur L on obtient

$$\boldsymbol{l}(\beta) \lrcorner\, \psi = -2^{(p-1)}(\overset{p-1}{\wedge}\,\Omega) \wedge \frac{\beta}{\Delta_{2p}} = -\frac{2^{p-1}}{\Delta_{2p}} L^{p-1}\beta\,.$$

D'où par différentiation extérieure et compte tenu que β est fermée, il vient

$$(63') \qquad \operatorname{div}_\eta \boldsymbol{l}(\beta)\eta = -(p-1)2^{p-1}\left\{d \wedge \Omega - \frac{\Omega}{p-1} \wedge \frac{\mathrm{d}\Delta_{2p}}{\Delta_{2p}}\right\} \wedge (\overset{p-2}{\wedge}\Omega) \wedge \frac{\beta}{\Delta_{2p}} \wedge \alpha\,.$$

En supposant que la 3-forme $d \wedge \Omega - \Omega/p-1 \wedge d\Delta_{2p}/\Delta_{2p}$, n'est pas *effective*, la formule (63') montre que

$$\operatorname{div}_\eta \boldsymbol{l}(\beta) = 0 \Leftrightarrow d \wedge \Omega = \frac{\omega}{p-1} \wedge \frac{d\Delta_{2p}}{\Delta_{2p}} = 0$$

et nous formulons le

Théorème. *Etant donnée l'inclusion* x_τ: $V_{(2p)}^{2p+1} \mapsto V^{2p,2p+1}$ *soit* $C(\Omega, \alpha)$ *la structure presque cosymplectique locale telle que la* 1-*forme* α *de* C *soit la forme spatiale de* $S_{p.c.h.}$ *induite par* x_τ *et le bivecteur fondamental de* Ω *soit défini par les composantes du champ distingué* $\mathbf{X}_\beta$.

π *et* Δ_{2p} *étant respectivement la forme associée de* β *et l'agrégat de Pfaff d'ordre* $2p$ *de* Ω, *si* β *est fermée et* α *est confermée on a les propriétés suivantes*:

(i) β *est un invariant intégral absolu de la parenthèse de Lagrange pfaffienne* $\boldsymbol{l}(\pi)$ *de* π *par rapport à* C;

(ii) *la condition nécessaire et suffisante pour que la parenthèse de Lagrange pfaffienne* $\boldsymbol{l}(\beta)$ *de* β *soit incompressible sur* $V_{(2p)}^{2p+1}$ *est que* Ω *soit conforme à une forme fermée avec* $d\Delta_{2p}/\Delta_{2p}$ *comme vecteur de courbure de Lee.*

Bibliographie.

[1] I. Bouzon, *Structures presque cohermitienne*, C. R. Acad. Sci. Paris, groupe II, **258** (1964).

[2] P. Libermann, *Sur la problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales*, Ann. Mat. Pura Appl. **36** (1954), 27-100.

[3] J. M. Souriau, *Structures des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris 1970.

[4] S. Takizawa, *On contact structures of real and complex manifolds*, Tôhoku Math. J. **15** (1963).

[5] K. Yano and B. Y. Chen, *On the concurrent vector fields of immersed manifolds*, Kōdai Math. Sem. Rep. **23** (1971), 343-350.

[6] K. Kenmotsu, *Some remarks on minimal submanifolds*, Tôhoku Math. J. **22** (1970), 240-248.

[7] R. ROSCA et L. VANHECKE, *Sur les variétés totalement isotropes de codimension géodésique* 1 *incluses dans une variétés lorentzienne de dimension paire*, C.R. Acad. Sci. Paris **27** (1972), 921-924.

[8] B. Y. CHEN, *On the total absolute curvature of manifolds immersed in a Riemannian manifold* II, Kōdai Math. Sem. Rep **22** (1970), 89-97.

[9] E. BOMPIANI, *Intorno alle varietà isotrope*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **20** (1941), 21-38.

[10] T. OTSUKI, *On principal normal vector fields of submanifolds in a Riemannian manifold of constant curvature*, J. Math. Soc. Japan (1) **22** (1970), 35-46.

[11] G. DE RHAM, *Variétés differentiables*, Hermann, Paris 1960.

Résumé.

Etant donné un espace pseudo-riemannien $V^{n,n+1}$ *de signature* $(n, n+1)$ *on peut le munir aver une structure paracohermitienne* [1] $S_{p.c.h.}$ *dont la* 1*-forme associée* $\bar{\alpha} \in \Lambda^1 \cdot (V^{n,n+1})$ *est un covecteur spatial. Par rapport à* $S_{p.c.h.}$ *la métrique de* $V^{n,n+1}$ *est égale à* $\mathscr{X} - (\bar{\alpha})^2$ *où* $\mathscr{X} = 2\sum_i \bar{\alpha}^i \bar{\alpha}^{i^*}$, $i = 1, \ldots, n$, $i^* = i + n$ *est une forme quadratique parahermitienne* [2].

Une variété isotrope V^q *incluse dans* $V^{n,n+1}$ *est dite de c-index* $= 0$, *si le défaut* d *de* V^q *(si le rang de la matrice jacobienne de l'inclusion* $x \colon V^q \to V^{n,n+1}$ *est* r, *alors* $d = q - r$*) est égal à la codimension de* V^q. *Dans cet ouvrage on étudie les inclusions* $x \colon V^{n+1}_{(n)} \to V^{n,n+1}$ *des variétés* $V^{n+1}_{(n)}$ *de c-index* $= 0$ *et dont le défaut est égal à l'index de la variété pseudo-riemannienne dans laquelle elles sont incluses.*

Si D_p *est la droite verticale de la structure* $S_{p.c.h.}$ *et si* $\mathscr{I}_p(V^{n+1}_{(n)})$ *et* $\mathscr{I}_p(V^{n+1}_{(n)})$ *sont respectivement l'espace tangent et l'espace totalement normal en chaque point* $p \in V^{n+1}_{(\pi)}$, *on a* $\mathscr{I}_p(V^{n+1}_{(n)}) = \mathscr{I}_p(V^{n+1}_{(n)}) \oplus D_p$.

* * *