Riv. Mat. Univ. Parma (4) 1 (1975), 45-50

GABRIELE KORCHMAROS (*)

Poligoni regolari. (**)

Introduzione.

Un recente teorema di KÁRTESZI e di VAN DER WAERDEN che ha un'applicazione pratica nello studio della struttura della materia [3], [4], dice: *Nello spazio euclideo non esiste alcun pentagono equilatero e nello stesso tempo isogonale non giacente su un piano* ([1]$_1$, [1]$_2$, [2], [6]). Come scrive KÁRTESZI [1]$_2$: «... probabilmente EULER fu il primo ad aver scoperto e a riconoscere questo fatto geometrico». Un teorema euleriano relativo a quattro e a cinque punti suggerisce il teorema enunciato.

Partendo da questo teorema, nella presente Nota si studiano le generalizzazioni 3-dimensionali della nozione di poligono regolare.

1. – Per svolgere il presente studio è opportuno introdurre una classificazione dei poligono equilateri dello spazio 3-dimensionale aventi delle corde di lunghezza uguale:

Diremo che un n-agono $A = A_1 A_2 \dots A_n$ *è t-volte* $(1 \leqslant t \leqslant [n/2]-1)$ *regolare se per* $l = 1, 2, \dots, t+1$ *valgono le*

$$A_k A_{k+l} = A_{k+1} A_{k+1+l} \qquad (k = 1, 2, \dots, n) , \tag{1}$$

ove gli indici si intendono considerati, com'è lecito, mod n. Diremo poi che A *è sottilmente t-volte regolare se risulta t-volte regolare ma non* $(t+1)$*-volte regolare.*

Notiamo anzitutto che un poligono situato su un piano e 1-volta regolare risulta regolare nel senso classico.

(*) Indirizzo: Budapest Müszaki Egyetem, Közlekedésmérnöki Kar, Matematika Tanszék, H-1111 Budapest, Müegyetem rkp. 3, Ungeria.

(**) Ricevuto: 10-III-1973.

Notiamo poi che il teorema citato di KÁRTESZI-VAN DER WAERDEN può venir enunciato ora come segue:

Nello spazio euclideo non esiste alcun pentagono 1-volta regolare non giacente su un piano.

Passiamo ora a studiare alcuni esempi istruttivi. Cominciamo col porgere dei poligoni sottilmente 1-volta regolari. A questo scopo consideriamo il reticolo di un dodecaedro e ne togliamo due facce che s'incontrano in uno spigolo. Se si sopprime questo spigolo si perviene a un ottagono sottilmente 1-volta regolare. Con questo procedimento — con un'opportuna modificazione — può risultare un ennagono sottilmente 1-volta regolare. Infatti, se togliamo gli spigoli comuni a tre facce di un dodecaedro che s'incontrano in un vertice, gli spigoli rimanenti formano un tal ennagono.

Si può trovare, senza difficoltà, un poligono sottilmente 2-volte regolare. Per esempio i punti $C_1, C_2, \ldots, C_{12}$ identificati dalle coordinate come segue:

$$C_1(1,0,0)\,,\qquad C_2(1,1,0)\,,\qquad C_3(0,1,0)\,,\qquad C_4(0,1,1)\,,$$

$$C_5(0,0,1)\,,\qquad C_6(-1,0,1)\,,\qquad C_7(-1,0,0)\,,\qquad C_8(-1,-1,0)\,,$$

$$C_9(0,-1,0)\,,\qquad C_{10}(0,-1,-1)\,,\qquad C_{11}(0,0,-1)\,,\qquad C_{12}(1,0,-1)\,,$$

costituiscono un tal poligono $C_1C_2\ldots C_{12}$, essendo per ogni k

$$C_kC_{k+1}=1\,,\qquad C_kC_{k+2}=\sqrt{2}\,,\qquad C_kC_{k+3}=\sqrt{3}\,,$$

mentre

$$C_1C_5=\sqrt{2}\neq\sqrt{6}=C_2C_6\,.$$

Nel seguito, quando vorremmo trovare un esempio per illustrare un n-agono 3-volte regolare, troveremo un fatto sorprendente. Ma prima premettiamo alcuni lemmi ben noti (cfr. in [**5**] i teoremi 161, 162, 165, 164).

Lemma 1. *Siano A, B, C tre punti non allineati e D, D' due punti che soddisfano alla congruenza geometrica $ABCD\cong ABCD'$. Risulta o $D=D'$, oppure D' è l'immagine speculare di D rispetto al piano individuato da A, B, C.*

Lemma 2. *Siano A, B, C, D quattro punti fra loro linearmente indipendenti e A', B', C' tre punti che soddisfano $ABC\cong A'B'C'$. Allora in ognuno* *dei semispazi limitati dal piano $A'B'C'$ esiste uno e un solo punto D' per cui risulta $ABCD \cong A'B'C'D'$.*

Lemma 3. *Se A, B, C, D sono punti non complanari e P è un punto arbitrario dello spazio, esiste un solo punto P' soddisfacente alla congruenza $ABCDP \cong ABCDP'$.*

Lemma 4. *Se i punti A, B, C, D risultano complanari e se $ABCD \cong A'B'C'D'$, allora A', B', C', D' risultano altresì complanari.*

Ci proponiamo ora di dimostrare il nostro teorema porgendo il suddetto « fatto sorprendente ». Notiamo che il teorema è valido anche nello spazio ellittico ed iperbolico, è cioè « teorema assoluto secondo JÁNOS BÓYLAI ».

Teorema. *Ogni n-agono 3-volte regolare è $[n/2]-1$, ossia completamente regolare. n-agoni completamente regolari che non risultano regolari nel senso classico esistono soltanto per $n = 2m$. Preso un tal poligono $A_1A_2 \ldots A_{2m}$, sia $\boldsymbol{A}_1 = A_1A_3 \ldots A_{2m-1}$ sia $\boldsymbol{A}_2 = A_2A_4 \ldots A_{2m}$ risultano regolari nel senso classico e giacciono su due piani fra loro paralleli in maniera che $\boldsymbol{A}_1$ sia trasformabile in $\boldsymbol{A}_2$ mediante un moto elicoidale in cui l'ampiezza di rotazione vale $(\pi/n)k$ ($k = 1, 3, \ldots, \mathrm{mod}\, n$).*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che un poligono situato su un piano e 1-volta regolare risulta regolare nel senso classico, pertanto, in particolare, risulta completamente regolare. Osserviamo poi che i $2m$-agoni descritti nel teorema risultano altresí completamente regolari.

Supponiamo ora assegnato un poligono $\boldsymbol{A} = A_1A_2 \ldots A_n$ 3-volte regolare che non giaccia su un piano. È chiara l'esistenza di quattro vertici consecutivi di $\boldsymbol{A}$ non situati sullo stesso piano. Avuto riguardo al Lemma 4, ciò fornisce che lo stesso può dirsi per ogni quattro vertici consecutivi di $\boldsymbol{A}$.

Fissiamo ora un numero intero k $(1 \leq k \leq n)$. Indicheremo con A'_k il punto di mezzo della corda $A_{k-1}A_{k+1}$, con Π_k il piano individuato dai vertici A_k, A_{k-1}, A_{k+1}, con Σ_k il piano che contiene la retta $A_kA'_k$ e perpendicolare al piano Π_k. Denotiamo poi con B_{k+2} l'immagine speculare di A_{k-2} rispetto al piano Σ_k e infine B'_{k+2} sarà l'immagine speculare di B_{k+2} rispetto al piano Π_k. Sotto tali convenzioni sussistono

$$A_{k-2}A_{k-1}A_kA_{k+1} \cong B_{k+2}A_{k+1}A_kA_{k-1} \cong B'_{k+2}A_{k+1}A_kA_{k-1}\,.$$

Sussiste inoltre, essendo A 3-volte regolare, la congruenza

$$A_{k+2}A_{k+1}A_kA_{k-1} \cong A_{k-2}A_{k-1}A_kA_{k-}t\ ,$$

sicchè, in virtù del Lemma 2, si avrà o $A_{k+2}=B_{k+2}$ oppure $A_{k+2}=B'_{k+2}$. Denotiamo ora con B_{k+3} (risp. con B'_{k+3}) l'immagine speculare di A_{k-3} (risp. B_{k+3}) relativo al piano Σ_k (risp. a quello Π_k). Se $A_{k+2}=B_{k+2}$, essendo A 3-volte regolare, il Lemma 3, in cui attualmente si pongano $A_{k-1}=A$, $A_k=B$, $A_{k+1}=C$, $A_{k+2}=D$, $A_{k+3}=P$, fornisce $P=A_{k+3}=B_{k+3}$. Del pari la ipotesi $A_{k+2}=B'_{k+2}$ implica $A_{k+3}=B'_{k+3}$. Ne consegue l'esistenza di una congruenza involutoria ϑ_k, più precisamente ϑ_k per $A_{k+2}=B_{k+2}$ la simmetria relativa al piano Π_k, mentre per $A_{k+2}=B'_{k+2}$ quella relativa alla retta $\Sigma_k\cap\Pi_k=$ $=A_kA'_k$, soddisfacente alla seguente proprietà:

$$\vartheta_k:\begin{Bmatrix} A_{k-3} & A_{k-2} & A_{k-1} & A_k \\ A_{k+3} & A_{k+2} & A_{k+1} & A_k \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Passando dall'ultimo capoverso col porvi, al posto k, $k+1$ poi ancor una volta col porvi, al posto k, $k+2$ si ottengono

$$\vartheta_{k+1}:\begin{Bmatrix} A_{k-2} & A_{k-1} & A_k & A_{k+1} \\ A_{k+4} & A_{k+3} & A_{k+2} & A_{k+1} \end{Bmatrix}, \tag{3}$$

$$\vartheta_{k+2}:\begin{Bmatrix} A_{k-1} & A_k & A_{k+1} & A_{k+2} \\ A_{k+5} & A_{k+4} & A_{k+3} & A_{k+2} \end{Bmatrix}. \tag{4}$$

Se ora teniamo conto del fatto che ϑ_k, ϑ_{k+1}, ϑ_{k+2} risultano involutorie, abbiamo in forza delle (2), (3), (4) che

$$\vartheta_{k+1}\vartheta_k:\begin{Bmatrix} A_{k-2} & A_{k-1} & A_k & A_{k+1} & A_{k+2} \\ A_k & A_{k+1} & A_{k+2} & A_{k+3} & A_{k+4} \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

$$\vartheta_{k+2}\vartheta_{k+1}:\begin{Bmatrix} A_{k-1} & A_k & A_{k+1} & A_{k+2} & A_{k+3} \\ A_{k+1} & A_{k+2} & A_{k+3} & A_{k+4} & A_{k+5} \end{Bmatrix}. \tag{6}$$

Ponendo $\vartheta_{k+1}\vartheta_k = \varrho_k$ e $\vartheta_{k+2}\vartheta_{k+1} = \varrho_{k+1}$ le (5), (6) forniscono ora

$$\varrho_{k+1}^{-1}\varrho_k : \begin{Bmatrix} A_{k-1} & A_k & A_{k+1} & A_{k+2} \\ A_{k-1} & A_k & A_{k+1} & A_{k+2} \end{Bmatrix}.$$

Poichè $\varrho_{k+1}^{-1}\varrho_k$ ha quattro punti fissi non complanari, essa dev'essere la identità, risultando $\varrho_{k+1} = \varrho_k$. Ne segue, al variare di k sui numeri interi $1, 2, \dots, n$, $\varrho_1 = \varrho_2 = \dots = \varrho_n$, cioè tutte queste risultano la stessa congruenza, che verrà abbreviata con ϱ. Avuto riguardo alla (5), sapendo che essa vale per ogni k, si ottiene così

$$\varrho(A_r) = A_{r+2} \tag{7}$$

ove r percorre gli interi $1, 2, \dots, n$, considerandolo notoriamente mod n.

Se ϱ conserva l'orientazione risulta, com'è ben noto, movimento elicoidale il quale, tenendo conto della (7), si riduce attualmente a una rotazione intorno a un'asse. Pertanto sotto quest'ipotesi il teorema resta dimostrato.

Se invece ϱ è una congruenza non diretta, da $\vartheta_{k+1}\vartheta_k = \varrho$ discende che l'una delle ϑ_k, ϑ_{k+1} è la simmetria relativa a un piano, mentre l'altra è la simmetria relativa a una retta: anzi preso come ϑ_1 — com'è lecito — la simmetria rispetto a una retta, tutte le $\vartheta_1, \vartheta_3, \dots$ risultano altresì tali simmetrie mentre tutte le $\vartheta_2, \vartheta_4, \dots$ saranno simmetrie relative a piani.

Ciò fornisce per n dispari che ϑ_k deve essere la simmetria relativa a un piano e contemporaneamente rispetto a una retta, risultando un'assurdità. Pertanto si ha attualmente che se n è dispari, ogni n-agono 3-volte regolare giace su un piano, dunque è un n-agono regolare nel senso classico e in particolare è completamente regolare.

Conservando l'ipotesi che ϱ sia indiretta, per ottenere lo stesso risultato per n pari dobbiamo fare uno studio più approfondito. A questo scopo consideriamo fissato un intero r $(1 \leqslant r \leqslant n/2)$. Ricordiamo che attualmente ϑ_{2r} (risp. ϑ_{2r+2}) è la simmetria relativa ad $A_{2r}A'_{2r}$ (risp. ad $A_{2r+2}A'_{2r+2}$) mentre ϑ_{2r-1} (risp. ϑ_{2r+1}) è quella relativa al piano Σ_{2r-1} (risp. Σ_{2r+1}). Avuto riguardo al capoverso contenente (7), si hanno $\varrho_1 = \varrho_2 = \dots = \varrho_n$, quindi in particolare $\varrho_{2r-1} = \varrho_{2r}$ e $\varrho_{2r} = \varrho_{2r+1}$. Poichè $\varrho_{2r-1} = \varrho_{2r}$ può scriversi anche sotto la forma

$$\vartheta_{2r}\vartheta_{2r-1}\vartheta_{2r} = \vartheta_{2r+1}$$

si riconosce subito che ϑ_{2r}, ossia la simmetria relativa ad $A_{2r}A'_{2r}$, permuta Σ_{2r-1} con Σ_{2r+1}. Un risultato analogo si può ottenere esaminando il contenuto geometrico dell'uguaglianza

$$\vartheta_{2r+1}\vartheta_{2r}\vartheta_{2r+1} = \vartheta_{2r+2}$$

conseguenza immediata di $\varrho_{2r} = \varrho_{2r+1}$: la simmetria relativa al piano Σ_{2r+1} trasforma $A_{2r}A'_{2r}$ in $A_{2r+2}A'_{2r+2}$.

Gli ultimi due asserti forniscono da una parte l'isometria dell'angolo formato da $A_{2r}A'_{2r}$ e da Σ_{2r-1} con quello di $A_{2r+2}A'_{2r+2}$ e di Σ_{2r+1}, d'altra parte $A_{2r}A'_{2r} \cap \Sigma_{2r-1} = A_{2r+2}A'_{2r+2} \cap \Sigma_{2r+1}$ ove quest'intersezione non risulta nè vuota nè una retta, essendo A_{2r-1}, A_{2r}, A_{2r+1}, A_{2r+2} quattro punti non complanari.

Facendo percorrere r gli interi, $1, 2, \ldots, n/2$ ne consegue facilmente che le rette $A_{2r}A'_{2r}$ non risultano parallele e costituiscono un fascio di rette. Pertanto i punti A_{2r} $(r = 1, 2, \ldots, n/2)$ giacciono sul medesimo piano e formano un $n/2$-agono regolare. Se A_{2j-1}, per un intero j, non fosse su questo piano lo stesso potrebbe dirsi di A_{2j+1} essendo esso l'immagine speculare di A_{2j-1} relativo ad $A_jA'_j$. Risulterebbe allora $A_{2j-1}A_{2j+1} > A_{2j}A_{2j+2}$ in contraddizione con la 1-volta regolarità di $\boldsymbol{A}$. Si ottiene così l'asserto desiderato, perchè $\boldsymbol{A}$ risulta regolare in senso classico.

Bibliografia.

[1] F. Kárteszi: $[\bullet]_1$ *Una soluzione di un problema notevole della topologia elementare*, Atti del Convegno dell'Un. Mat. It. Trieste 2-7 ottobre 1967; $[\bullet]_2$ *Contributo al pentagono equilatero ed isogonale*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. **16** (1973), 63.

[2] B. L. van der Waerden, *Ein Satz übei räumliche Fünfecke*, Elem. Math. **25** (1970), 73.

[3] W. Lüssy and T. Trost, *Zu einem Satz über räumliche Fünfecke*, Elem. Math. **25** (1970), 25.

[4] J. D. Dunitz and L. Waser, *The planarity of the Equilateral, Isogonal Pentagon*, Elem. Math. **27** (1972), 25.

[5] B. Kerékjártó, *Les fondaments de la géometrié*, Akadémia Kiadó Budapest 1966.

[6] O. Bottema, *Pentagons with Equal Sides and Equal Angles*, Geom. Dedic. **2** (1973), 189.

Zusammenfassung.

Im dreidimensionalen euklidischen Raum wird ein n-Eck $A_1A_2 \ldots A_n$ t-stufig regulär genannt, wenn bei jedem k $[= 1, 2, \ldots, n]$ die Gleichung (1) erfüllt. Unser Hauptergebnis ist der folgende allgemeine Satz: Ein dreistufiges n-Eck, bei ungeraden n gehört zu einer Ebene, bei geraden n bilden die Punkte $A_1A_3 \ldots A_{n-1}$ und $A_2A_4 \ldots A_n$ je ein auf einer Ebene liegendes regulären n/2-Eck, wobei diese beide Vielecke mit einer passenden Schraubung ineinander transformieren können.

* * *