Riv. Mat. Univ. Parma (3) **3** (1974), 359-365

MARIO VILLA (*)

Sopra una classe di varietà algebriche. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

1. – Ho scritto ben volentieri questa Nota per il volume dedicato ad ANTONIO MAMBRIANI in occasione del suo settantacinquesimo compleanno.

Pensando all'amico MAMBRIANI, al risorto Istituto Matematico dell'Università di Parma e alla Rivista in cui questa Nota è inserita, si richiamano alle mia memoria periodi ormai lontani della mia vita stessa.

Quando nel dicembre del 1939 arrivai, professore straordinario, all'Istituto matematico dell'Università di Bologna, uno dei primi matematici di quell'Istituto che ebbi occasione di incontrare fu appunto il MAMBRIANI.

Fu quello un periodo certamente tra i più felici per me: dopo anni di vita dura e di duro lavoro scientifico, arrivavo in quel glorioso Istituto Matematico con l'animo lieto, pieno di entusiasmo per la ricerca scientifica e di speranza nella vita che si apriva innanzi alla mia giovinezza.

Poco dopo venne la guerra: la mia famiglia era sfollata nel mantovano ed io facevo la spola tra Bologna e la sede dello sfollamento, passando lunghe ore a Parma per cambiare il treno. Ebbi così modo di incontrarmi spesso col compianto amico GIORGIO VALLE, fisico dell'Università di Parma, e con lui progettammo e in seguito si attuò (assieme ai compianti PIETRO TEOFILATO, UGO CASSINA e a GIOVANNI RICCI) la ripresa dei corsi per la laurea in matematica presso l'Università di Parma (che da molti anni era stata soppressa) (***).

Nella testata del primo fascicolo di questa Rivista, che porta la data del gennaio-febbraio 1950, appaiono cinque nomi: quello di MAMBRIANI, di GIORGIO SESTINI, di CASSINA, di RICCI e il mio.

(*) Indirizzo: Università di Bologna, Istituto di Geometria, 40100 Bologna, Italia.

(**) Ricevuto: 11-VI-1973.

(***) Venne istituita la laurea in Matematica-Fisica e successivamente quella in Scienze Matematiche.

Lo stesso fascicolo della Rivista contiene, fra l'altro, le *Parole di apertura al Convegno Matematico di Parma del giugno 1949*, pronunciate da FRANCESCO SEVERI, che anche molti matematici di oggi non farebbero male a leggere, tenendo presente che uno scritto di un matematico della statura di SEVERI conserva sempre vivo interesse.

2. – Ho chiamato (1) trasformazione cremoniana generalizzata una trasformazione T fra n spazi proiettivi $\mathscr{P}_r$ $(n>2,\ r>1)$ quando, dati $n-2$ punti generici in $n-2$ qualunque degli n spazi dati (un punto in ciascun spazio) è cremoniana la corrispondenza fra i due spazi rimanenti in cui si corrispondono coppie di punti che assieme agli $n-2$ punti dati costituiscono n-uple di punti corrispondenti in T.

Ho chiamato ordini della trasformazione cremoniana generalizzata T gli ordini delle trasformazioni cremoniane (ordinarie) suddette (2). Una n-upla di punti corrispondenti si dice singolare se esistono $n-1$ punti della n-upla che non individuano il rimanente (3).

Il caso più semplice di trasformazioni cremoniane generalizzate si ha ovviamente quando le trasformazioni cremoniane (ordinarie) suddette sono tutte omografie (sicchè gli ordini sono tutti uguali ad 1); ho chiamato pertanto siffatte trasformazioni omografie fra gli n spazi proiettivi (4).

Ho determinato le omografie fra tre piani proiettivi (distinti): ne esistono soltanto due proiettivamente distinte (5).

Recentemente ho considerato un'omografia Ω fra n spazi proiettivi (distinti) $\mathscr{P}^1_r, \mathscr{P}^2_r, \ldots, \mathscr{P}^n_r$ di dimensione r $(n>2,\ r>1)$ (6). Se $x^j_1, x^j_2, \ldots, x^j_n$ sono le coordinate proiettive omogenee rispettivamente in tali spazi $(j=1,2,\ldots,r+1)$ le equazioni dell'omografia Ω sono

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x^i_n &= \sum_{1}^{n-1}{}_k \left(x^i_k \frac{\prod_{i}^{n-1}{}_p\, x^{r+1}_p}{x^{r+1}_k} \right) \\ x^{r+1}_n &= \prod_{1}^{n-1} x^{r+1}_p \end{aligned}\right. \qquad (i=1,2,\ldots,r)\,.$$

---

(1) M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali fra più di due spazi a n dimensioni*, Nota I, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **22** (1967), 57-67.

(2) M. VILLA, *Le omografie fra tre piani proiettivi*, Boll. Un. Mat. Ital. (4), **4** (1971), 239-250.

(3) M. VILLA, op. cit. nella (2), n. 1.

(4) M. VILLA, op. cit. nella (2), n. 1.

(5) M. VILLA, *Determinazione delle omografie fra tre piani proiettivi*, Boll. Un. Mat. Ital. (4), **5** (1972), 490-505.

(6) M. VILLA, *Un'omografia fra più di due spazi proiettivi*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **7** (1973).

Le singolarità dell'omografia Ω provengono da quelle $(n-2)$-uple di punti per cui la relativa omografia (ordinaria) è degenere. Siffatte $(n-2)$-uple sono quelle (e solo quelle) per cui uno (almeno) dei punti della $(n-2)$-upla appartiene a uno degli iperpiani $x_1^{r+1}=0, x_2^{r+1}=0, \ldots, x_n^{r+1}=0$. Sono questi gli iperpiani singolari dell'omografia.

Si può precisare che se un punto della $(n-2)$-upla appartiene ad un iperpiano singolare la corrispondente omografia è degenere di specie r.

Per $n=3$ e r qualunque $(r>1)$, posto $x_3^i=z_i$, $x_3^{r+1}=z_{r+1}$, $x_1^i=x_i$, $x_1^{r+1}=x_{r+1}$, $x_2^i=y_i$, $x_2^{r+1}=y_{r+1}$ le equazioni (1) di Ω divengono

$$(2)\qquad \begin{cases} z_i \;\;\;= x_i y_{r+1} + y_i x_{r+1} \\ z_{r+1} = x_{r+1} y_{r+1} \end{cases} \qquad (i=1,2,\ldots,r)\,.$$

Nei tre spazi $\mathscr{P}_r^1$, $\mathscr{P}_r^2$, $\mathscr{P}_r^3$ si hanno i tre iperpiani singolari $x_{r+1}=0$, $y_{r+1}=0$, $z_{r+1}=0$.

Per i punti P_1 di $x_{r+1}=0$ (ad esempio) e per essi soltanto, la corrispondente omografia fra gli spazi $\mathscr{P}_r^2$, $\mathscr{P}_r^3$ è degenere di specie r; ad un punto qualunque di $\mathscr{P}_r^2$ (non appartenente a $y_{r+1}=0$) corrisponde un punto P_3 di $z_{r+1}=0$ e (al variare di P_1) la corrispondenza fra i punti P_1, P_3 di $x_{r+1}=0$, $z_{r+1}=0$ è un'omografia Γ_2 $z_i=x_i$.

Le terne di punti costituite da un punto P_1 di $x_{r+1}=0$, da un punto P_2 di $\mathscr{P}_r^2$ (non appartenente a $y_{r+1}=0$) e dal punto P_3 di $z_{r+1}=0$ corrispondente a P_1 nell'omografia Γ_2 (e terne analoghe) costituiscono terne singolari della omografia Ω.

Un punto di uno degli spazi (di $\mathscr{P}_r^2$ ad esempio) dà luogo ad un'omografia fra gli spazi $\mathscr{P}_r^1$, $\mathscr{P}_r^3$, sicchè al variare del punto in $\mathscr{P}_r^2$ si ha una famiglia $\mathscr{F}$ ∞^r di omografie fra gli spazi $\mathscr{P}_r^1$, $\mathscr{P}_r^3$. Orbene: nelle omografie (non degeneri) della famiglia $\mathscr{F}$ si corrispondono gli iperpiani singolari dei relativi spazi; inoltre tutto queste omografie subordinano fra tali iperpiani la stessa omografia Γ_2 (7).

Se $r=2$, le (2) divengono

$$z_1 = x_1 y_3 + x_3 y_1\,,$$
$$z_2 = x_2 y_3 + x_3 y_2\,,$$
$$z_3 = x_3 y_3\,,$$

si ritrova cioè una delle due omografie esistenti fra tre piani proiettivi (8).

---

(7) Si ha un'omografia analoga Γ_1 fra gli iperpiani $x_{r+1}=0$, $z_{r+1}=0$. Fra gli iperpiani $x_{r+1}=0$, $y_{r+1}=0$ nasce analogamente l'omografia Γ_1, Γ_2. Si veda: M. Villa, op. cit. nella (6), n. 4.

(8) Si veda: M. Villa, op. cit. nella (5), n. 4.

3. – Presenta un certo interesse la classe delle varietà $V_{r(n-1)}$ rappresentative, sulla varietà di SEGRE relativa a n spazi proiettivi a r dimensioni, delle omografie fra tali spazi ($n > 3$, $r > 1$), in particolare dell'omografia (1). Siccome un'omografia (non degenere) fra due spazi proiettivi a r dimensioni è rappresentata, sulla varietà di SEGRE relativa a due spazi proiettivi a r dimensioni, dalla ben nota varietà $V_r^{2^r}$ di $\mathscr{P}_{r(r+3)/2}$ rappresentante la totalità delle quadriche di uno spazio lineare $\mathscr{P}_r$ (in particolare, per $r = 2$, dalla superficie di VERONESE (9)), ne viene che *tali varietà* $V_{r(n-1)}$ *contengono* $(n/2)$ *sistemi* $\infty^{r(n-2)}$ *delle suddette varietà* $V_r^{2^r}$ *e che per un punto generico della* $V_{r(n-1)}$ *passa una* (*e una sola*) $V_r^{2^r}$ *di ciascuno degli* $(n/2)$ *sistemi*).

In particolare, per $r = 2$, e n qualunque ($n > 2$), si hanno varietà $V_{2(n-1)}$ *che contengono* $(n/2)$ *sistemi* $\infty^{2(n-2)}$ *di superficie di Veronese e tali che per un punto generico della varietà passa una* (*e una sola*) *superficie di Veronese di ciascuno degli* $(n/2)$ *sistemi.*

Recentemente ho studiato il caso $r = 2$, $n = 3$, cioè le V_4 rappresentative, sulla varietà di SEGRE relativa a tre piani proiettivi, delle due omografie fra i tre piani (10).

Nel seguito del presente lavoro mi tratterò sulla varietà in discorso, rappresentativa dell'omografia (2), cioè del caso $n = 3$ dell'omografia (1).

4. – Veniamo alla rappresentazione dell'omografia (2) sulla varietà di SEGRE relativa ai tre spazi $\mathscr{P}_r^1(x_j)$, $\mathscr{P}_r^2(y_j)$, $\mathscr{P}_r^3(z_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, r+1)$. Questa varietà è una $V_{3r}^{(3r)!/(r!)^3}$ (cioè di dimensione $3r$ e d'ordine $(3r)!/(r!)^3$) appartenente ad uno spazio $\mathscr{P}_{(r+1)^3-1}$ ed ha le equazioni

$$(3) \qquad X_{jpq} = x_j y_p z_q \qquad (j, p, q = 1, 2, \ldots, r+1).$$

---

(9) La varietà di SEGRE relativa a due spazi proiettivi $\mathscr{P}_r^1(x_j)$, $\mathscr{P}_r^2(y_j)$ ha le equazioni parametriche $X_{jp} = x_j y_p$ $(j, p = 1, 2, \ldots, r+1)$. Un'omografia $y_p = x_p$ fra i due spazi è quindi rappresentata dalla varietà

$$X_{jp} = x_j x_p$$

che rappresenta appunto, nel modo ben noto, la totalità delle quadriche di $\mathscr{P}_r$. Questa varietà gode di notevoli proprietà. Per una di queste proprietà si veda: M. VILLA, *Proprietà differenziale caratteristica dei coni proiettanti le varietà che rappresentano la totalità delle quadriche di uno spazio lineare*, Rend. Accad. Naz. Lincei, (6), **28** (1938), 3-12.

(10) M. VILLA, *Sopra due particolari varietà algebriche* (in corso di stampa).

Dalle (2), dividendo le prime r membro a membro per la $(r+1)$-ma e riducendo a forma intera, si ottiene

$$x_{r+1} y_{r+1} z_i = (x_i y_{r+1} + y_i x_{r+1}) z_{r+1} \tag{4}$$

ossia, per le (3)

$$X_{r+1,r+1,i} = X_{i,r+1,r+1} + X_{r+1,i,r+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)\,. \tag{5}$$

La varietà rappresentativa dell'omografia (2) sulla $V_{3r}^{(3r)!/(r!)^3}$ dello spazio $\mathscr{P}_{(r+1)^3-1}$ si ottiene quindi segando la $V_{3r}^{(3r)!/(r!)^3}$ con lo spazio $\mathscr{P}_{(r+1)^3-r-1}$ di equazioni (5).

Va però tenuto presente che tutte le $(r+1)$-uple (x_j), (y_j), (z_j) per cui $x_{r+1} = z_{r+1} = 0$ soddisfano alle (4), cioè alle (5), mentre non soddisfano alle (2); e altrettanto dicasi per le $(r+1)$-uple (x_j), (y_j), (z_j) per cui $y_{r+1} = z_{r+1} = 0$. D'altra parte la varietà di SEGRE relativa agli iperpiani $x_{r+1} = 0$, $z_{r+1} = 0$ e allo spazio $\mathscr{P}_r^2$ è una $V_{3r-2}^{\frac{(3r-2)!}{r![(r-1)!]^2}}$ dello spazio $\mathscr{P}_{r^2(r+1)-1}$; e così la varietà di SEGRE relativa agli iperpiani $y_{r+1} = 0$, $r_{r+1} = 0$ e allo spazio $\mathscr{P}_r^1$ è una $V_{3r-2}^{\frac{(3r-2)!}{r![(r-1)!]^2}}$ di $\mathscr{P}_{r^2(r+1)-1}$. Dalla intersezione dalla $V_{3r}^{(3r)!/(r!)^3}$ con lo spazio $\mathscr{P}_{(r+1)^3-r-1}$ di equazioni (5) si devono quindi staccare queste due $V_{3r-2}^{\frac{(3r-2)!}{r![(r-1)!]^2}}$.

La varietà rappresentativa dell'omografia (2) *sulla varietà di Segre relativa ai tre spazi* $\mathscr{P}_r^1$, $\mathscr{P}_r^2$, $\mathscr{P}_r^3$ *ha dunque dimensione* $2r$ *e appartiene ad uno spazio (proiettivo) di dimensione* $(r+1)^3 - r - 1$.

Le equazioni parametriche di questa varietà, che indicheremo con Φ_{2r}, si ottengono dalle (3) ponendo in esse in luogo delle z_q le espressioni date dalle (2) (supponendo $x_{r+1} \neq 0$, $y_{r+1} \neq 0$) ([11]).

Le terne di punti singolari dell'omografia (2) sono quelle costituite da due punti di $x_{r+1} = 0$, $z_{r+1} = 0$ corrispondenti nell'omografia Γ_2 e da un punto arbitrario di $\mathscr{P}_r^2$ (non appartenente a $y_{r+1} = 0$) e le terne analoghe scambiando il ruolo dei tre spazi ([12]).

La varietà rappresentativa di queste terne sulla varietà di SEGRE relativa ai tre spazi $\mathscr{P}_r^1$, $\mathscr{P}_r^2$, $\mathscr{P}_r^3$ è una $V_{2r-1}^{2r(r-1)}$ dello spazio $\mathscr{P}_{(r+1)(r^2-1)-1}$ contenente ∞^r varietà $V_{r-1}^{2^{r-1}}$ di $\mathscr{P}_{(r-1)(r+2)/2}$ (rappresentative della totalità delle quadriche di

---

([11]) Da siffatte equazioni parametriche della Φ_{2r} seguono subito che sono soddisfatte le (5).

([12]) Si veda: M. VILLA, op. cit. nella ([6]), n. 4.

$\mathscr{P}_{r-1}$) e ∞^{r-1} $\mathscr{P}_r$ [13] che indicheremo con Σ_2; si hanno due altre varietà analoghe Σ_1, Σ_3.

Le varietà Σ_1, Σ_2, Σ_3 si diranno le *varietà singolari* di Φ_{2r}.

Ciò posto, si ha:

Sulla Φ_{2r} esistono tre sistemi ∞^r di varietà V_r di $\mathscr{P}_{r(r+3)/2}$ (rappresentativa della totalità delle quadriche di $\mathscr{P}_r$); per ogni punto di Φ_{2r}, non appartenente a Σ_1, Σ_2, Σ_3, passa una varietà $V_r^{2^r}$ di ciascuno dei tre sistemi; per un punto di Σ_1 (di Σ_2 o di Σ_3) passa una varietà $V_r^{2^r}$ e passano due spazi $\mathscr{P}_r$.

Infatti, un punto P di Φ_{2r}, non appartenente a Σ_1, Σ_2, Σ_3, rappresenta una terna di punti A_1, A_2, A_3 rispettivamente di $\mathscr{P}_r^1$, $\mathscr{P}_r^2$, $\mathscr{P}_r^3$ (non appartenenti agli iperpiani singolari $x_{r+1}=0$, $y_{r+1}=0$, $z_{r+1}=0$) o il punto A_1, ad esempio, individua fra $\mathscr{P}_r^2$, $\mathscr{P}_r^3$ un'omografia (non degenere) in cui si corrispondono A_2, A_3 e che dà luogo ad una varietà $V_r^{2^r}$ passante per P.

Un punto P di Σ_2, ad esempio, rappresenta invece una terna di punti A_1, A_2, A_3 dove A_1, A_3 appartengono rispettivamente a $x_{r+1}=0$, $z_{r+1}=0$ e si corrispondono in Γ_2, mentre A_2 è un punto di $\mathscr{P}_r^2$ (non appartenente a $y_{r+1}=0$). Il punto A_2 individua fra $\mathscr{P}_r^1$, $\mathscr{P}_r^3$ un'omografia (non degenere) in cui si corrispondono A_1, A_3 (in quanto questa omografia subordina fra $x_{r+1}=0$, $z_{r+1}=0$ la Γ_2) (n. **2**) che dà luogo ad una varietà $V_r^{2^r}$ passante per P; il punto A_1 (e

---

[13] Infatti la $V_{3r-2}^{\frac{(3r-2)!}{r![(r-1)!]^2}}$ del $\mathscr{P}_{r^2(r+1)-1}$ relativa a due iperpiani di $\mathscr{P}_r^1(x_{r+1}=0)$ e di $\mathscr{P}_r^3(z_{r+1}=0)$ e ad un $\mathscr{P}_r(y_j)$ ha le equazioni $X_{ips}=x_i y_p z_s$ $(i=1,\dots,r;\ p=1,\dots,r+1;\ s=1,\dots,r)$.

Se fra i due iperpiani $x_{r+1}=0$, $z_{r+1}=0$ consideriamo l'omografia Γ_2 $x_i=z_i$, si ha

$$X_{ips}=x_i y_p x_s\,, \tag{6}$$

da cui

$$X_{ips}=X_{spi}\,; \tag{7}$$

siccome le (2) sono $r+1$, si conclude che la V_{2r-1} rappresentativa sta in uno spazio proiettivo di dimensione $r^2(r+1)-1-(r+1)=(r+1)(r^2-1)-1$. Segando queste V_{2r-1} con uno spazio proiettivo di dimensione $(r+1)(r^2-1)-1-(2r-1)=(r+1)\cdot(r^2-1)-2r$ si ottengono $(r+1)(r^2-1)-1-[(r+1)(r^2-1)-2r]=2r-1$ equazioni lineari nelle X, cioè $2r-1$ equazioni lineari nelle (coordinate non omogenee) $y_1,\dots,y_r$ con coefficienti di 2° grado nelle (coordinate non omogenee) $x_1,\dots,x_{r-1}$; si conclude che la V_{2r-1} è d'ordine $2^{r(r-1)}$. Sulla $V_{2r-1}^{2^{r(r-1)}}$ giacciono ∞^r varietà V_{r-1}^2 rappresentative delle terne costituite dalle coppie di punti corrispondenti nell'omografia Γ_2 e da un punto fisso di $\mathscr{P}_r^2$ e giacciono ∞^{r-1} spazi $\mathscr{P}_r$ rappresentativi delle terne costituite da una coppia fissa di punti corrispondenti in Γ_2 e da un punto arbitrario di $\mathscr{P}_r$.

analogamente il punto A_3) individua invece fra $\mathcal{P}^2_r$, $\mathcal{P}^3_r$ un'omografia degenere di specie r (n. **2**) nella quale ad un punto generico di $\mathcal{P}^2_r$ (non appartenente alla $y_{r+1}=0$) corrisponde il punto A_3, che dà luogo ad uno spazio $\mathcal{P}_r$ passante per P.

Osserviamo infine che:

La varietà $V^{2^r}_r$ di Φ_{2r} del sistema che proviene (*ad esempio*) *dei punti di $\mathcal{P}^2_r$ segano la Σ_2 in $V^{2^{r-1}}_{r-1}$* (*anzi la Σ_2 è il luogo di queste ∞^r $V^{2^{r-1}}_{r-1}$*).

Infatti, nell'omografia (non degenere) determinata fra $\mathcal{P}^1_r$, $\mathcal{P}^3_r$ da un punto di $\mathcal{P}^2_r$ (non appartenente alla $y_{r+1}=0$) si corrispondono gli iperpiani $x_{r+1}=0$, $z_{r+1}=0$ e l'omografia subordina fra essi l'omografia Γ_2 (n. **2**) [14].

---

[14] I risultati sulle varietà rappresentative dell'omografia (2) per $r=2$ si trovano già in VILLA, op. cit. nella [10], n. 5.

* * *