Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 349-358

FRANCO TRICERRI (*)

Sulle varietà dotate di due strutture quasi complesse linearmente indipendenti (**)

ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

Sia M una varietà differenziabile di dimensione $2n$ (con $n \geqslant 2$), con $\mathscr{F}$ indichiamo l'algebra sui reali delle funzioni differenziabili di classe C^∞ definite su M a valori reali, e con $\mathscr{D}^r_s$ l'$\mathscr{F}$-modulo dei campi tensoriali r volte controvarianti ed s volte covarianti.

In particolare i campi vettoriali di M saranno gli elementi di $\mathscr{D}^1_0$; ed allora gli elementi di $\mathscr{D}^1_1$ possono pensarsi come endomorfismi di $\mathscr{D}^1_0$. Ne segue che, rispetto all'ordinaria composizione di endomorfismi, $\mathscr{D}^1_1$ ha anche la struttura di algebra su R.

Ricordiamo ancora che per *struttura quasi complessa* J su M si intende un campo tensoriale elemento di $\mathscr{D}^1_1$ *antiinvolutorio*, tale cioè che $J^2 = -I$, dove $I \in \mathscr{D}^1_1$ è l'endomorfismo identico di $\mathscr{D}^1_0$ (1).

Supporremo ora M dotato di due strutture quasi complesse J_1 e J_2 *linearmente indipendenti su* R, vale a dire $J_1 \neq \pm J_2$. Si può provare allora (ved. n. 1) che J_1 e J_2 generano una sottoalgebra $\mathscr{A}$ di $\mathscr{D}^1_1$ che ha dimensione maggiore od uguale a 4.

Lo scopo del presente lavoro è quello di classificare le varietà tali che la dimensione di $\mathscr{A}$ sia proprio 4, e di fornire alcuni esempi.

Ringrazio il Prof. G. B. RIZZA che mi ha proposto l'argomento di questo lavoro, e fornito utili indicazioni.

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria, Università, 10100 Torino, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. – Ricevuto: 16-VII-1974.
(1) Vedi p. es. S. KOBAYASHI and K. NOMIZU [3], vol. II, p. 121.

1. – Sia allora M una varietà differenziabile dotata di due strutture quasi complesse J_1 e J_2, che supporremo linearmente indipendenti su R; in queste ipotesi si può provare il seguente lemma:

L$_1$. *I campi tensoriali di* $\mathscr{D}^1_1$, I, J_1, J_2 *e* J_1J_2, *dove è, per ogni* $X \in \mathscr{D}^1_0$, $(J_1J_2)(X) = J_1(J_2(X))$, *sono linearmente indipendenti su* R.

Dim. Se J_1 e J_2 sono linearmente indipendenti su R, lo sono anche I, J_1 e J_2. Se poi fosse:

$$J_1J_2 = \alpha I + \beta J_1 + \gamma J_2$$

con α, β e $\gamma \in R$, moltiplicando per J_2 a destra si ha:

$$-J_1 = \alpha J_2 + \beta J_1 J_2 - \gamma I .$$

Sostituendo si ottiene:

$$(\alpha\beta - \gamma) I + (\beta^2 + 1) J_1 + (\beta\gamma + \alpha) J_2 = 0$$

il che è impossibile avendosi sempre $\beta^2 + 1 \neq 0$.

Dal lemma ora provato segue che la dimensione della sottoalgebra $\mathscr{A}$ di $\mathscr{D}^1_1$ generata da J_1 e J_2 è maggiore od uguale a 4.

In particolare vale il seguente teorema:

T$_1$. *La sottoalgebra* $\mathscr{A}$ *di* $\mathscr{D}^1_1$ *generata da* J_1 *e* J_2 *è di dimensione* 4 *se e solo se vale una delle seguenti condizioni*:

$$J_1 J_2 = J_2 J_1 \tag{1.1}$$

cioè se J_1 *e* J_2 *commutano, oppure se*:

$$J_1 J_2 + J_2 J_1 = \alpha I \tag{1.2}$$

dove α *è un numero reale* (2).

Dim. Le condizioni (1.1) e (1.2) sono sufficienti; è infatti immediato verificare che, sotto una di queste due ipotesi, il prodotto di due combinazioni

(2) Le (1.1) e (1.2) sono note. Vedi p. es. H. WAKAKUWA [7], ove sono dedotte ed utilizzate per altri scopi.

lineari a coefficienti reali di I, J_1, J_2 e J_1J_2 è ancora una loro combinazione lineare.

Viceversa, supposto che $\mathscr{A}$ sia di dimensione 4, si dovrà avere in particolare:

$$J_2J_1 = \alpha I + \beta J_1 + \gamma J_2 + \delta J_1 J_2$$

con α, β, γ e δ elementi di R opportuni. Moltiplicando per J_2 una volta a destra ed una a sinistra, si ottengono le seguenti identità:

$$J_2J_1J_2 = \alpha J_2 + \beta J_1 J_2 - \gamma I - \delta J_1; \qquad -J_1 = \alpha J_2 + \beta J_2 J_1 - \gamma I + \delta J_2 J_1 J_2 .$$

Dalle tre relazioni precedenti si deduce allora che:

$$(\alpha\beta - \delta\gamma - \gamma) I + (\beta^2 - \delta^2 + 1) J_1 + (\alpha + \beta\gamma + \delta\alpha) J_2 + 2\beta\delta J_1 J_2 = 0 .$$

Per il lemma L_1 deve aversi $\beta\delta = 0$. Se fosse $\delta = 0$ seguirebbe pure $\beta^2 + 1 = 0$, il che è impossibile.

Si deve avere dunque $\beta = 0$ e quindi $\delta = \pm 1$ e $\gamma \cdot (\delta + 1) = \alpha \cdot (\delta + 1) = 0$.

Perciò, se $\delta = +1$ segue $\alpha = \gamma = 0$ e si ottiene la (1.1), mentre se è $\delta = -1$ si avrà:

$$J_1 J_2 + J_2 J_1 = \alpha I + \gamma J_2 \tag{1.3}$$

con α e γ arbitrari. Applicando J_2 a destra si ha:

$$J_2 J_1 J_2 = J_1 + \alpha J_2 - \gamma I .$$

Osserviamo allora che $J_2J_1J_2$ è *antiinvolutorio* e che quindi si deve avere:

$$(J_1 + \alpha J_2 - \gamma I)^2 = -I$$

da cui si ottiene:

$$(\gamma^2 - \alpha^2) I - 2\gamma J_1 - 2\alpha\gamma J_2 + \alpha(J_1 J_2 + J_2 J_1) = 0$$

e quindi per la (1.3):

$$\gamma^2 I - 2\gamma J_1 - \alpha\gamma J_2 = 0 .$$

Per il lemma L_1 segue $\gamma = 0$ e la (1.3) si riduce alla (1.2).

2. – Studieremo ora in particolare il caso in cui per J_1 e per J_2 sono verificate le condizioni del teorema T_1, cioè quando l'algebra $\mathscr{A}$ da essi generata è di dimensione 4.

Tali algebre (su un campo qualunque) sono state classificate da G. SCORZA (³), e riferendoci a tale classificazione, possiamo vedere che le condizioni (1.1) e (1.2) danno luogo a quattro tipi di algebre non isomorfe, precisamente vale il seguente teorema:

T_1. (a) *Se vale la* (1.1) *allora l'algebra* $\mathscr{A}$ *è isomorfa all'algebra di tipo* (V) (⁴), *cioè è somma diretta di due algebre complesse* ($\mathscr{A} = \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}$).

(b_1) *Se vale la* (1.2) *con* $\alpha^2 < 4$, *allora* $\mathscr{A}$ *è isomorfa all'algebra di tipo* (I), *cioè è isomorfa all'algebra dei quaternioni su* R.

(b_2) *Se vale la* (1.2) *con* $\alpha^2 = 4$, *allora* $\mathscr{A}$ *è isomorfa all'algebra di tipo* (LXXXI), *cioè è una algebra con ideale* E *di dimensione* 2, *nilpotente di ordine* 2, *tale che l'algebra quoziente* $\mathscr{A}/E$ *sia un'algebra con divisione.*

(b_3) *Se vale la* (1.2) *con* $\alpha^2 > 4$, *allora* $\mathscr{A}$ *è isomorfa all'algebra di tipo* (III), *cioè è isomorfa all'algebra delle matrici reali di tipo* 2×2.

Dim. Caso (a). Poniamo $H = J_1 J_2$ ed osserviamo che H è *involutorio* (⁵), quindi posto $u_1 = (I - H)/2$, $u_2 = (J_1 + J_2)/2$, $u_3 = (I + H)/2$, $u_4 = (J_1 - J_2)/2$, si ottiene la seguente tavola di moltiplicazione:

$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & u_3 & u_4 \\ \\ 0 & 0 & u_4 & -u_3 \end{array}$$

dove all'incrocio della i-esima riga con la j-esima colonna compare il prodotto $u_i u_j$ $(1 \leqslant i \leqslant 4,\ 1 \leqslant j \leqslant 4)$ e tale tavola è quella dell'algebra di tipo (V).

Caso (b_1) Se fosse $\alpha = 0$, allora è immediato vedere che si ottiene l'algebra dei quaternioni.

(³) Vedi G. SCORZA [**4**], vol. III, p. 259.

(⁴) I numeri romani in parentesi si riferiscono alla classificazione di G. SCORZA.

(⁵) Cioè $H^2 = I$. In tal caso H definisce una *struttura quasi prodotto*. Vedi p. es. K. YANO [**7**], p. 234, oppure A. P. SHIROKOV [**5**], p. 151.

Se $\alpha \neq 0$, posto $u_1 = I$, $u_2 = J_1$, $u_3 = J_1 + (2/\alpha) J_2$, $u_4 = -I + (2/\alpha) J_1 J_2$, si trova la seguente tavola:

$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & -u_1 & u_4 & -u_3 \\ u_3 & -u_4 & \beta u_1 & -\beta u_2 \\ u_4 & u_3 & \beta u_2 & -\beta u_1 \end{array}$$

dove $\beta = (\alpha^2 - 4)/\alpha^2$, e se è $\alpha^2 < 4$ è isomorfa all'algebra di tipo (I) (6).

Caso (b_2). Con le stesse posizioni del caso (b_1) si trova la seguente tavola:

$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & -u_1 & u_4 & -u_3 \\ u_3 & -u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & u_3 & 0 & 0 \end{array}$$

che corrisponde proprio al tipo (LXXXI).

Caso (b_3). Basta porre $u_1 = (I - \tilde{H})/2$, $u_2 = (J_1 + J_1\tilde{H})/2$, $u_3 = (J_1\tilde{H} - J_1)/2$ $u_4 = (I + \tilde{H})/2$ con:

$$\tilde{H} = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 4}} I + \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 4}} J_1 J_2 .$$

Si verifica immediatamente che $\tilde{H}$ è *involutorio* (7) e tale che $\tilde{H} J_1 = -J_1 \tilde{H}$.

---

(6) Che nel caso attuale si ottenga proprio l'algebra dei quaternioni su R si può vedere direttamente ponendo:

$$\tilde{J}_1 = J_1; \qquad \tilde{J}_2 = \frac{-\alpha}{\sqrt{4 - \alpha^2}} I + \frac{2}{\sqrt{4 - \alpha^2}} J_1 J_2 .$$

Infatti si ha $\tilde{J}_2^2 = -I$ e $\tilde{J}_1 \tilde{J}_2 + \tilde{J}_2 \tilde{J}_1 = 0$.

(7) Vedi nota (5).

Ciò premesso risulta:

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & u_4 \end{matrix}$$

che corrisponde al tipo (III).

3. – Dalla dimostrazione del teorema T_2 segue che nel caso (a) l'algebra $\mathscr{A}$ è generata anche da una *struttura quasi complessa* $J = J_1$ e da una quasi prodotto [8] $H = J_1 J_2$ che *commutano.*

Nel caso (b_1) $\mathscr{A}$ è generata da due *strutture quasi complesse* $\tilde{J}_1$ e $\tilde{J}_2$ che *anticommutano* [9].

Nel caso (b_2) $\mathscr{A}$ è generata da una *struttura quasi complessa* $J = J_1$ e da una *struttura* $F = J_1 + (2/\alpha) J_2$ *nilpotente* ($F^2 = 0$) che *anticommutano.*

Infine, nel caso (b_3), $\mathscr{A}$ è generata da una *struttura quasi complessa* $J = J_1$ e da una *quasi prodotto*:

$$\tilde{H} = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 4}} I + \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 4}} J_1 J_2$$

che *anticommutano.*

Ne risulta perciò il seguente teorema:

T_3. *Tutte e sole le varietà dotate di due strutture quasi complesse J_1 e J_2, tali che l'algebra da esse generata sia di dimensione* 4, *sono di uno dei tipi seguenti*:

(a) *Varietà dotate di una struttura quasi complessa J e di una quasi prodotto H che commutano.*

(b_1) *Varietà dotate di due strutture quasi complesse J_1 e J_2 che anticommutano.*

(b_2) *Varietà dotate di una struttura quasi complessa J e di una struttura F tale che $F^2 = 0$, che anticommutano.*

---

(8) Vedi nota (5).
(9) Vedi nota (6).

(b$_3$) *Varietà dotate di una struttura quasi complessa J e di una quasi prodotto $\tilde{H}$ che anticommutano.*

Le varietà di tipo (b$_1$) sono le varietà *quasi quaternionali*, quelle di tipo (b$_3$) sono dette varietà *quasi complesse-prodotto di primo tipo*, e quelle di tipo (a) varietà quasi *complesse-prodotto di secondo tipo* (10).

Le varietà di tipo (b$_2$) sono state introdotte da H. WAKAKUWA (11).

4. – Costruiamo ora un esempio di varietà di tipo (a).

Per fare ciò, consideriamo due varietà quasi complesse M ed M' rispettivamente di dimensione $2n$ e $2n'$. Con J indichiamo la struttura quasi complessa su M e con J' la struttura quasi complessa su M'. Sulla varietà prodotto $M\times M'$ è definita in modo naturale una struttura quasi complessa *prodotto* (12), che indicheremo con $J_1=J\times J'$.

Se al posto di J' consideriamo la sua coniugata $\bar{J}'=-J'$ e costruiamo la struttura quasi complessa $J_2=J\times\bar{J}'$, si verifica facilmente che $J_1\neq\pm J_2$ e che $J_1J_2=J_2J_1$.

Passiamo ora al caso in cui debba valere la (1.2), che, come abbiamo visto, comprende i sottocasi b_1, b_2, b_3.

Consideriamo allora una varietà M di dimensione $m=2n$ dotata di una struttura quasi complessa J e di una connessione lineare Γ. Sul fibrato tangente $T(M)$ si può allora costruire una struttura quasi complessa J_1 dipendente da Γ; tale costruzione, dovuta nella sua generalità, a P. DOMBROWSKI (13), verrà brevemente ricordata qui di seguito.

Se (x,X) è un punto di $T(M)$ e (x^i,X^i) le coordinate locali in un intorno di tale punto, allora un vettore ξ, tangente in tale punto a $T(M)$, può scriversi come:

$$\xi=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\xi^{m+i}\frac{\partial}{\partial X^i} \tag{4.1}$$

con $i=1,2,\dots,m$.

L'esistenza della connessione Γ permette di definire un'omomorfismo K dello spazio tangente $T_{(x,X)}\big(T(M)\big)$ di $T(M)$ in (x,X), nello spazio tangente

(10) Per maggiori notizie, soprattutto di carattere bibliografico, su tali strutture rinviamo all'articolo di A. P. SHIROKOV [**5**], la cui bibliografia comprende ben 495 titoli.

(11) Vedi H. WAKAKUWA [**6**], p. 394.

(12) Vedi S. KOBAYASHI and K. NOMIZU [**3**], vol. II, p. 130.

(13) Vedi P. DOMBROWSKI [**1**]. Vedi anche A. P. SHIROKOV [**5**], p. 170.

$T_x(M)$ di M in x, ponendo:

$$K(\xi) = (\xi^{m+i} + \Gamma^i_{hk}\,\xi^h X^k)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,. \tag{4.2}$$

La proiezione $\pi\colon T(M) \to M$ induce poi un omomorfismo $\pi_*\colon T_{(x,X)}(T(M)) \to$ $\to T_x(M)$ dato da:

$$\pi_*(\xi) = \xi^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,. \tag{4.3}$$

Sono definiti infine anche due omomorfismi di $T_x(M)$ in $T_{(x,X)}(M)$, il *lift orizzontale* $\mathscr{H}$ ed il *lift verticale* $\mathscr{V}$, dati per ogni vettore $Y = Y^i(\partial/\partial x^i)$ di $T_x(M)$ da:

$$\mathscr{H}(Y) = Y^i\,\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^i_{hk}\,Y^h X^k\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,, \tag{4.4}$$

$$\mathscr{V}(Y) = Y^i\,\frac{\partial}{\partial X^i}\,. \tag{4.5}$$

È allora immediato verificare le seguenti relazioni:

$$\pi_*\mathscr{H} = \mathrm{id}_{T_x(M)}; \qquad K\mathscr{V} = \mathrm{id}_{T_x(M)} \tag{4.6}$$

$$\pi_*\mathscr{V} = 0 \quad ; \quad K\mathscr{H} = 0\,. \tag{4.7}$$

Osservato che per ogni $\xi \in T_{(X,X)}(T(M))$ si ha:

$$\xi = \mathscr{H}\pi_*(\xi) + \mathscr{V}K(\xi) \tag{4.8}$$

posto:

$$J_1(\xi) = -\mathscr{H}K(\xi) + \mathscr{V}\pi_*(\xi) \tag{4.9}$$

si trova che J_1 è una *struttura quasi complessa* su $T(M)$.

L'esistenza della struttura quasi complessa J sulla varietà M permette ora di definire una seconda struttura quasi complessa J_2 su $T(M)$ tale che $J_1J_2 + J_2J_1 = \alpha I$.

Poniamo infatti:

$$J_2(\xi) = \mathscr{H}J\pi_*(\xi) + \alpha\mathscr{H}K(\xi) - \mathscr{V}JK(\xi) \tag{4.10}$$

dove α è un numero reale arbitrario. Allora, tenute presenti le (4.6), (4.7), (4.8) si trova $J_2^2 = -I$, mentre si ha:

$$J_1 J_2(\xi) = \mathscr{H}JK(\xi) + \mathscr{V}J\pi_*(\xi) + \alpha\mathscr{V}K(\xi)$$

e:

$$J_2 J_1(\xi) = -\mathscr{H}JK(\xi) + \alpha\mathscr{H}\pi_*(\xi) - \mathscr{V}J\pi_*(\xi)$$

da cui si ottiene $J_1 J_2 + J_2 J_1 = \alpha I$.

Se poniamo invece:

$$\tilde{J}_2(\xi) = \mathscr{H}J\pi_*(\xi) + \mathscr{V}JK(\xi) \tag{4.11}$$

si trova ancora una struttura quasi complessa ([14]) su $T(M)$, ma in tale caso si ha:

$$J_1\tilde{J}_2(\xi) = -\mathscr{H}JK(\xi) + \mathscr{V}J\pi_*(\xi) = \tilde{J}_2 J_1(\xi) \, .$$

Abbiamo così provato il seguente teorema:

T_4. *Se M è una varietà differenziabile dotata di una struttura quasi complessa J e di una connessione lineare Γ, sul fibrato tangente $T(M)$ esistono due strutture quasi complesse che soddisfano alla* (1.1) *oppure alla* (1.2).

Bibliografia.

[1] P. Dombrowski, *On the geometry of tangent bundle,* J. Reine Angew. Math., **210** (1962), 73-88.

[2] Y. Ichijyo, *Almost complex structures of tangent bundle and Finsler metrics,* J. Math. Kyoto Univ. (3) **6** (1967), 419-452.

[3] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry,* Interscience, London 1963-1968.

[4] G. Scorza, *Opere scelte,* Cremonese, Roma 1962.

([14]) Strutture di questi tipi sono state considerate da Y. Ichijyo in [2].

[5] A. P. SHIROKOV, *Structures on Differentiable Manifolds*, in *Progress in Mathematics*, R. V. GRAMKRELIDZE, Vol. 9, Plenum Press, New York 1971.

[6] H. WAKAKUWA, *On linearly indipendent almost complex structures in a differentiable manifold*, Tohoku Math. J. (3) **13** (1961), 393-422.

[7] K. YANO, *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*, Pergamon Press, New York 1965.

Summary.

Let M be a differentiable manifold with two almost complex structures J_1 and J_2 linearly indipendent over R, i.e. $J_1 \neq \pm J_2$. *Then the algebra A generated by J_1 and J_2 has dimension greater or equal to 4. The purpose of this work is the classification of the manifolds such that the dimension of A is just 4.*

Also some examples are given.

* * *